M2TK

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学Ｋ～重要分野総整理～

問題

【1】 対角線 AC と BD の交点を M とする．いま，△ABC と △ACD は辺 AC を共有するから，これらの面積が等しいとき

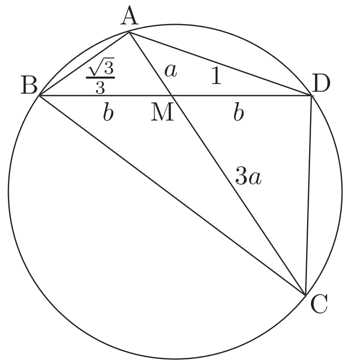
$$\mathrm{BM} = \mathrm{DM}$$

同様に，△BCD : △ABD = 3 : 1 だから

$$\mathrm{CM} = 3\mathrm{AM}$$

そこで，AM = a，BM = b とおくと，方べきの定理より

$$\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM} = \mathrm{BM}\cdot\mathrm{DM} \qquad \therefore\ \ b^2 = 3a^2 \ \cdots ①$$



次に，中線定理より

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$

なので

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1^2 = 2(a^2+b^2) \qquad \therefore\ \ a^2+b^2 = \frac{2}{3}\ \cdots ②$$

①，② より $a^2 = \dfrac{1}{6}$，$b^2 = \dfrac{1}{2}$ となるから，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAD} = \frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}} = \frac{\frac{1}{3}+1-4b^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\quad \sin\angle\mathrm{BAD} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

したがって, 四角形 ABCD の面積は

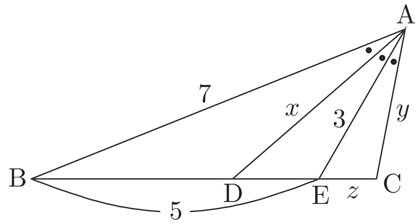
$$4\triangle\mathrm{ABD} = 4\left(\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \text{(答)}$$

また，円の半径は正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BD}}{2\sin\angle\mathrm{BAD}} = \frac{2b}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【2】 (a) $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAE}$ であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=7:3$$



よって

$$\mathrm{DE}=\frac{3}{10}\mathrm{BE}=\frac{3}{2} \qquad (答)$$

次に, $\mathrm{AD}=x$ とおくと, 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ADE}=\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DE}^2-\mathrm{EA}^2}{2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}}=\frac{x^2+\frac{9}{4}-9}{2x\cdot\frac{3}{2}}=\frac{x^2-\frac{27}{4}}{3x}$$

また, $\mathrm{BD}=\frac{7}{2}$ だから, 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ADB}=\frac{\mathrm{AD}^2+\mathrm{DB}^2-\mathrm{BA}^2}{2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DB}}=\frac{x^2+\frac{49}{4}-49}{2x\cdot\frac{7}{2}}=\frac{x^2-\frac{147}{4}}{7x}$$

となるが, $\angle\mathrm{ADE}+\angle\mathrm{ADB}=180^\circ$ だから

$$\cos\angle\mathrm{ADE}+\cos\angle\mathrm{ADB}=0 \qquad \therefore \quad \frac{x^2-\frac{27}{4}}{3x}+\frac{x^2-\frac{147}{4}}{7x}=0$$

これより

$$\frac{10}{21}x^2-\frac{30}{4}=0 \qquad \therefore \quad x=\sqrt{\frac{30}{4}\cdot\frac{21}{10}}=\sqrt{\frac{63}{4}}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

すなわち, $\mathrm{AD}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ である. (答)

(b) $\mathrm{CA}=y$, $\mathrm{EC}=z$ とおくと, $\angle\mathrm{DAE}=\angle\mathrm{EAC}$ であるから

$$\mathrm{DE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AD}:\mathrm{AC} \qquad \therefore \quad \frac{3}{2}:z=\frac{3\sqrt{7}}{2}:y$$

よって

$$y=\sqrt{7}z \quad \cdots ①$$

次に, 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{AEB}=\frac{\mathrm{AE}^2+\mathrm{EB}^2-\mathrm{BA}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EB}}=\frac{9+25-49}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \angle\mathrm{AEB}=120^\circ$$

なので, $\angle\mathrm{AEC}=60^\circ$ となる. よって, 余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AE}^2+\mathrm{EC}^2-2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{EC}\cos\angle\mathrm{AEC}\\ &= 9+z^2-2\cdot3z\cdot\frac{1}{2} = z^2-3z+9\end{aligned}$$

$$\therefore \quad y^2=z^2-3z+9$$

これに ①を代入して

$$7z^2=z^2-3z+9 \quad \Leftrightarrow \quad 2z^2+z-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)(2z+3)=0$$

よって, $z=1$ となり, これと ①から

$$y=\sqrt{7} \qquad \therefore \quad \mathrm{CA}=\sqrt{7},\ \ \mathrm{EC}=1 \qquad (答)$$

【3】(1) 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の外接円の半径を R とおく．すると，正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}$$

また，余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

これらを $\sin C(\cos A+\cos B)=\sin A+\sin B$ に代入すると

$$\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}$$

で，これを変形していくと

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}=a+b\\
\Leftrightarrow\quad & a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)=2ab(a+b)\\
\Leftrightarrow\quad & a^3+b^3+a^2b+ab^2-ac^2-bc^2=0\\
\Leftrightarrow\quad & (a^2+b^2)(a+b)-(a+b)c^2=0\\
\Leftrightarrow\quad & (a+b)(a^2+b^2-c^2)=0
\end{aligned}$$

そして，$a+b>0$ なので，$a^2+b^2=c^2$ となる．よって，三角形 ABC は ∠C が直角の直角三角形である．　(答)

(2) $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ なので，三角形 ABC の内心を I とおくと右下図より

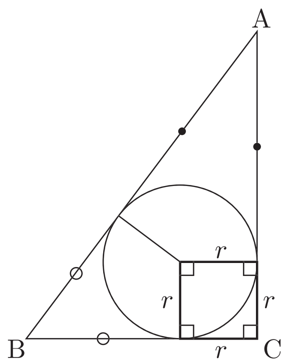
$$2r=\mathrm{BC}+\mathrm{CA}-\mathrm{AB}$$

ここで，三平方の定理から

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

よって

$$r=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$　(答)



【4】(1) C_1 の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=4$$

と変形できるから，C_1 の中心の座標は $(2,\ 1)$ であり，半径は 2 である．一方，C_2 の中心は原点であり，半径は 2 である．すると，2 円の中心間の距離は

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

であり,

$$(\text{半径の差})=0,\quad (\text{半径の和})=4$$

なので,

$$(\text{半径の差})<(\text{中心間の距離})<(\text{半径の和})$$

となるから，2 円は相異なる 2 つの共有点をもつ． 〔証明終〕

(2) 2 円の共有点を通る円の方程式は,

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0 \quad (k \fallingdotseq -1) \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

のいずれかの形で表されるが，題意の円は原点を通るので，C_2 自身ではない．したがって，題意の円の方程式は,

$$x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0$$

と表すことができる．そして，これが原点を通るから

$$1-4k=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{4}\ (\fallingdotseq -1)$$

よって，求める円の方程式は,

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-4x-2y+1+\frac{1}{4}(x^2+y^2-4)=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2-\frac{16}{5}x-\frac{8}{5}y=0 \end{aligned}$$

＜解説＞一般に，図形 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ が共有点 $(X,\ Y)$ をもつとき,

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)+kg(x,\ y) \quad (k \text{ は実数の定数})$$

に対して，方程式 $F(x,\ y)=0$ で表される図形を考えると,

$$f(X,\ Y)=g(X,\ Y)=0 \qquad \therefore \quad F(X,\ Y)=0$$

であるから，この図形はつねに 2 つの図形 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$ の共有点を通る．本問の場合，方程式

$$x^2+y^2-4x-2y+1+k(x^2+y^2-4)=0 \quad (k \fallingdotseq -1)$$

で表される図形は，C_1，C_2 の共有点をつねに通る．そして，$k \fallingdotseq -1$ より x^2, y^2 の係数はともに等しく，また 0 ではないので，この図形は円を表すことになる．

ただし, この方程式によって，2 円の共有点を通るすべての円が表現できるわけではない. つまり，$x^2+y^2-4=0$ だけは上の方程式では表すことができないので，［解答］では 2 つの方程式を示し，原点を通ることから $x^2+y^2-4=0$ を除外しているわけだ.

【5】(1) 直線 PQ を $y=2x+b$ とする.

$y=x^2$ と交わるために,

$$x^2-2x-b=0 \quad \cdots ①$$

これが異なる 2 つの実数解をもたねばならないので, 判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1+b>0 \qquad \therefore \quad b>-1$$

①の解を $\alpha,\ \beta$ とすると,

$$\alpha+\beta=2, \quad \alpha\beta=-b$$

また, 交点は $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ となるので, 中点を $(X,\ Y)$ とすると,

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad Y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

ゆえに,

$$X=1, \quad Y=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4+2b}{2}=2+b$$

$b>-1$ より,

$$Y>1$$

よって, 求める軌跡は,

半直線 : $x=1 \quad (y>1)$

(2) 直線 PQ を $y=m(x+1)$ とおくと, (1) と同様に,

$$x^2-mx-m=0 \quad \cdots ①$$

これが異なる 2 つの実数解をもつには,

$$D=m^2+4m>0 \qquad \therefore \quad m<-4,\ 0<m \quad \cdots ②$$

①の解を $\alpha,\ \beta$ とすると,

$$\alpha+\beta=m, \quad \alpha\beta=-m$$

中点を $(X,\ Y)$ とすると,

$$X=\frac{m}{2}, \quad Y=\frac{m^2+2m}{2}=2X^2+2X$$

②より,

$$2X<-4,\ 0<2X \qquad \therefore \quad X<-2,\ 0<X$$

よって, 求める軌跡は,

放物線 : $y=2x^2+2x \quad (x<-2,\ 0<x)$

(3) 点 P を $(X,\ Y)$ とおき, P を通る直線を $y=m(x-X)+Y$ とする.
これが $y=x^2$ と接するので,

$$x^2-mx+mX-Y=0 \quad \cdots ①$$

より,

$$D=m^2-4(mX-Y)=0 \quad \cdots ②$$

②の解を $m_1,\ m_2$ とすると,

$$m_1+m_2=4X, \quad m_1m_2=4Y$$

2 つの接線が直交するということは, $m_1m_2=-1$ が必要十分条件である.
よって, 求める軌跡は,

$$4Y=-1 \qquad \therefore \quad \text{直線}:y=-\frac{1}{4}$$

【6】

$$x^2+y^2-2(x+y)-6=0 \quad \cdots(*)$$

(a)

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+(y-1)^2=(2\sqrt{2})^2$$

は円であり, C とおく.

$x+y=k$ とおくと, これは直線であり, l とおく. l と C が共有点をもつためには C の中心 $(1,\ 1)$ と l との距離が C の半径 $2\sqrt{2}$ 以下であればよいから,

$$\begin{aligned}\frac{|1+1-k|}{\sqrt{1+1}} \leqq 2\sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad |k-2| \leqq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -4 \leqq k-2 \leqq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leqq k \leqq 6 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leqq x+y \leqq 6\end{aligned}$$

≪別解≫ $x+y=k \quad \cdots$① とおいて, $(*)$ から

$$\begin{aligned}x^2+y^2-2(x+y)-6=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+y)^2-2xy-2(x+y)-6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad k^2-2xy-2k-6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad xy=\frac{1}{2}(k^2-2k-6) \quad \cdots②\end{aligned}$$

①,②をみたす実数 $x,\ y$ が存在するためには, t の 2 次方程式

$$t^2-kt+\frac{1}{2}(k^2-2k-6)=0$$

が実数解をもてばよく,

$$D=k^2-2(k^2-2k-6) \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqq k \leqq 6$$

(b)

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2-2xy-2(x+y)-6=0$$

ここで, $x+y=k$ とおくと,

$$k^2-2xy-2k-6=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2xy=-k^2+2k+6$$

$-2 \leqq k \leqq 6$ のとき (1) より実数 $x,\ y$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned}x+y-2xy \quad &= \quad k-k^2+2k+6 \\ &= \quad -k^2+3k+6 \\ &= \quad -\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{33}{4} \quad (-2 \leqq k \leqq 6)\end{aligned}$$

$-2<\dfrac{3}{2}<6$ より, $k=x+y=\dfrac{3}{2}$ のとき, $x+y-2xy$ は最大値 $\dfrac{33}{4}$ をとる.

問題

【1】〔I〕(1)

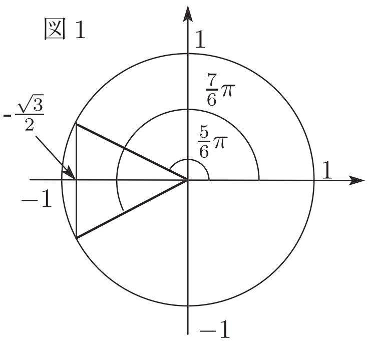


図 1 より,

$$\therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{x}{2} = \theta$ とおくと, 方程式

$$2\cos\theta = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

を

$$0 \leqq x < 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq \theta < \pi$$

の範囲で解くことと同値であるから,

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \qquad \therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{7}{4}\pi$ より,

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad x = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$

(4) 与式より

$$2\sin x\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

すなわち

$$\sin x(2\cos^2 x - 1) = 0 \text{ かつ } \cos x \fallingdotseq 0$$

よって

$$\sin x = 0 \text{ または } \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるから

$$x = \boldsymbol{0,\ \pi,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi} \qquad \text{(答)}$$

〔II〕(1) $\dfrac{\theta}{2}=\alpha$ とすると，$0 \leqq \alpha < \pi$ の範囲で，不等式

$$\cos\alpha > -\frac{1}{2} \quad \cdots ①$$

を解けばよい．① を解くと

$$0 \leqq \alpha < \frac{2}{3}\pi$$

であるので，

$$0 \leqq \frac{\theta}{2} < \frac{2}{3}\pi \quad \therefore \quad \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{4}{3}\pi} \qquad \textbf{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta + 3\cos\theta > 0 &\iff 2(1-\cos^2\theta)+3\cos\theta > 0 \\ &\iff -2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 2 > 0 \\ &\iff 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 < 0 \\ &\iff (2\cos\theta+1)(\cos\theta-2) < 0 \\ &\qquad \therefore\ -\frac{1}{2} < \cos\theta < 2 \end{aligned}$$

したがって $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，$-\dfrac{1}{2} < \cos\theta \leqq 1$

$$\therefore\ \boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi} \qquad (答)$$

(3)

$$\begin{aligned} \tan^2\theta &\leqq 1 \\ \tan^2\theta - 1 &\leqq 0 \\ (\tan\theta-1)(\tan\theta+1) &\leqq 0 \\ \therefore -1 \leqq \tan\theta &\leqq 1 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

① をみたす θ の範囲は，

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi \leqq \theta < 2\pi} \quad \textbf{(答)}$$

(4) 与式より

$$\begin{aligned} 1-2\sin^2\theta > 3-5\sin\theta &\iff 2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 < 0 \\ &\iff (2\sin\theta-1)(\sin\theta-2) < 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1}{2} < \sin\theta < 2$$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\dfrac{1}{2} < \sin\theta \leqq 1$

$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi} \qquad (答)$$

【2】(1) ①

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

②

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{5}{12}\pi &= \cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\frac{2}{3}\pi\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{2}{3}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{4}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

③

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{7}{12}\pi &= \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}\\
&= -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\
&= -\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\
&= -\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}\\
&= \boldsymbol{-2-\sqrt{3}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ であるから,

$$\cos\alpha>0,\ \cos\beta>0$$

ゆえに,

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}\\
\cos\beta &= \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\ &= \frac{\frac{3}{4}-\frac{12}{5}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5}} \\ &= \frac{-\frac{33}{20}}{\frac{14}{5}} \\ &= -\boldsymbol{\frac{33}{56}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $0<\theta<\pi$ より，

$$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{5}{4}\pi$$

であり，$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} > 0$ であるから，$\theta+\frac{\pi}{4}$ は，第 1 象限の角である．

よって，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

$$\begin{aligned}\therefore\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{1-\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{8}{9}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

さらに，

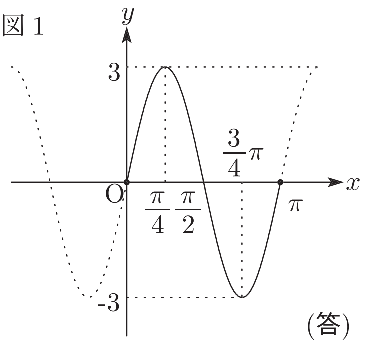
$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin\left\{\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right\} \\ &= \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{4-\sqrt{2}}{6}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1) $y=3\sin 2x$ より, これは, $y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍, y 軸方向に 3 倍にそれぞれ拡大したものであるから, 周期は,

$$2\pi\times\frac{1}{2}=\pi \qquad (答)$$

であり, グラフは図 1 のようになる.

図 1



(答)

(2) 基本的な考え方は (1) と同様で, $y=-\tan\dfrac{x}{2}$ より, これは, $y=-\tan x$ のグラフを x 軸方向に 2 倍に拡大したものとして考えればよい.

さらに, $y=\tan x$ をベースに考えるならば,

$$y=-\tan x \iff -y=\tan x$$

のグラフは, $y=-\tan x$ のグラフを x 軸に関して対称に移したものと考えられる.
よって, 求める周期は,

$$\pi\times 2=\mathbf{2}\pi \qquad (答)$$

であり, 図 2 を得る.

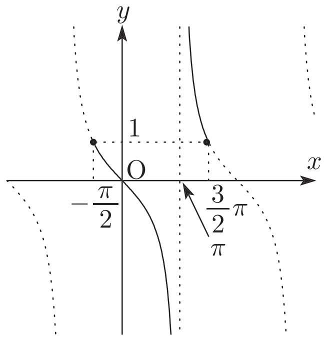


図 2

(答)

(3) 先に変形を行うと,

$$y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2 \iff y-2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\iff \frac{y-2}{2}=\cos\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}} \quad \cdots①$$

と変形すると, 次のように式を読み取ることが出来る. $y=\cos x$ のグラフを x 軸方向, y 軸方向にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ 倍, 2 倍した

$$\frac{y}{2}=\cos\frac{x}{\frac{1}{2}} \quad \cdots②$$

を, さらに x 軸の正方向に $\dfrac{\pi}{6}$, y 軸の正方向に 2 だけそれぞれ平行移動したグラフである. ②より, 周期は,

$$2\pi\times\frac{1}{2}=\pi \qquad (答)$$

であり, 図 3 を得る.

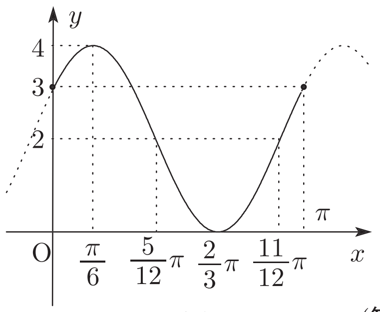


図 3

(答)

<参考>

一般に, $y=f(x)$ 上の任意の点 $(x,\ y)$ に対し, $(ax,\ by)=(X,\ Y)$ なる点 $(X,\ Y)$ をとると, これが移動後の曲線上の点を表す. よって, $x=\dfrac{X}{a}$, $y=\dfrac{Y}{b}$ をみたすことから,

$$\frac{Y}{b}=f\left(\frac{X}{a}\right)$$

を得る.

よって, $\dfrac{y}{b}=f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ のグラフは, $y=f(x)$ のグラフを y 軸方向に b 倍, x 軸方向に a 倍したものである.

【4】(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ より,

$$1+t^2=1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \iff \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって,

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}=\boldsymbol{\frac{2t}{1+t^2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果を用いると

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}{2-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+2t+t^2}{1+3t^2}$$

この値を k とおく.

$$\frac{1+2t+t^2}{1+3t^2}=k$$

$1+3t^2 \fallingdotseq 0$ なので, これは

$$1+2t+t^2=k(1+3t^2) \qquad \therefore \quad (3k-1)t^2-2t+k-1=0 \quad \cdots(*)$$

と同値である. k のとり得る値の範囲は, $(*)$ が実数解をもつことによって定まる.
いま, $g(t)=(3k-1)t^2-2t+k-1$ とおく. ここで, $t\left(=\tan\dfrac{x}{2}\right)$ はすべての実数値をとる.

(i) $k=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$g(t)=-2t-\frac{2}{3}$$

$(*)$ つまり $g(t)=0$ を満たす t を求めると, $t=-\dfrac{1}{3}$ を解にもつので $k=\dfrac{1}{3}$ は適する.

(ii) $k \fallingdotseq \dfrac{1}{3}$ のとき
$y=g(t)$ は 2 次関数となり, $(*)$ が実数解をもつための条件は, $(*)$ の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4}=1-(3k-1)(k-1) = 1-(3k^2-4k+1)=-3k^2+4k \geqq 0$$

$$k(3k-4)\leqq 0 \qquad \therefore \quad 0\leqq k\leqq\frac{4}{3} \ \text{かつ} \ k\fallingdotseq\frac{1}{3}$$

(i), (ii) より, $0\leqq k\leqq\dfrac{4}{3}$ $\qquad \therefore\ \boldsymbol{0\leqq f(x)\leqq\dfrac{4}{3}}$ $\qquad$ (答)

【5】(1) 積→和の変換公式 $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ より

$$
\begin{aligned}
y &= \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta+\cos\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cos 2\theta
\end{aligned}
$$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ より

y の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ $\quad \boldsymbol{(\theta = 0, \pi)}$

最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$ $\quad \boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi\right)}$ **(答)**

(2) 和→積の変換公式 $\sin A+\sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ より

$$
\begin{aligned}
y &= \sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2\sin\frac{1}{2}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\\
&= 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{13}{6}\pi$ より

y の最大値は $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{\pi}{3}\right)}$

最小値は $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$ $\boldsymbol{\left(\theta = \dfrac{4}{3}\pi\right)}$ **(答)**

【6】 $f(\theta)=3\sin\theta+4\cos\theta=5\sin(\theta+\alpha)$

$$\left(ただし,\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(1) θ は任意の角だから,

$\therefore$ **最大値 5, 最小値 − 5** (答)

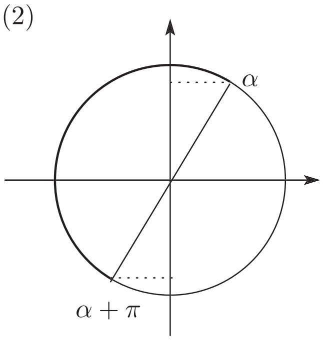
(2) $0\leqq\theta\leqq\pi \iff \alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ より,

$$\therefore\ \begin{cases}\textbf{最大値 5}\\ \textbf{最小値}\ 5\sin(\pi+\alpha)=-5\sin\alpha=\mathbf{-4}\end{cases}\qquad(答)$$

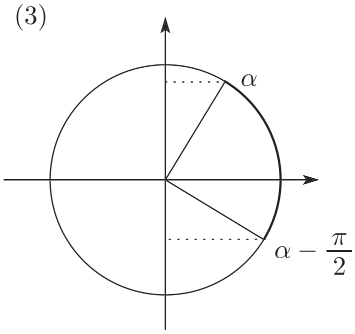
(3) $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq 0 \iff \alpha-\frac{\pi}{2}\leqq\theta+\alpha\leqq\alpha$ より,

$$\therefore\ \begin{cases}\textbf{最大値}\ 5\sin\alpha=\mathbf{4}\\ \textbf{最小値}\ 5\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-5\cos\alpha=\mathbf{-3}\end{cases}\qquad(答)$$

(2)



(3)



【7】

$$2\sin x\cos x=\sin 2x \iff \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$
$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

であることから,

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$$

これで, 変数が $2x$ $(0\leqq 2x\leqq \pi)$ でまとめられた. さらに, 三角関数の合成を行うと,

$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\quad\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\right)$$

よって,

$$-\frac{\pi}{6}\leqq 2x-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$$

であるから, 下図より

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1\quad\cdots①$$

よって,

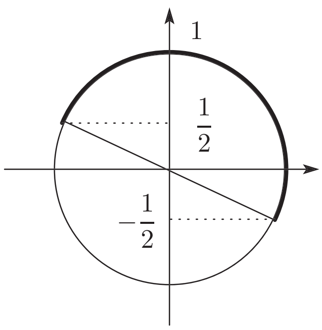
$$-1\leqq f(x)\leqq\frac{1}{2}$$

①の等号成立条件が,

$$(\text{左辺})\quad 2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\iff x=0$$
$$(\text{右辺})\quad 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\iff x=\frac{\pi}{3}$$

であるから,

最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$, 最小値 $f(0)=-\mathbf{1}$ (答)



問題

【1】(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 3^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{4}} \times 540^{-\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{4}} \\
&= 3^{\frac{1}{2}} \times (2 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} \times (2^2 \cdot 3^3 \cdot 5)^{-\frac{1}{4}} \times (2 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} \\
&= 2^{\frac{1}{4}+2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+3\times\left(-\frac{1}{4}\right)} \times 5^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \\
&= 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \\
&= \mathbf{1} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

(2) $x^{\frac{1}{6}} = X,\ y^{\frac{1}{6}} = Y$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (X-Y)(X^2+XY+Y^2)(X+Y)(X^2-XY+Y^2) \\
&= (X^3-Y^3)(X^3+Y^3) \\
&= X^6 - Y^6 \\
&= \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6 - \left(y^{\frac{1}{6}}\right)^6 \\
&= \boldsymbol{x-y} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

＜参考＞

因数分解 (展開) の公式

- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ (複号同順)
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

(3) 底がそろっていることから, 指数だけを計算すると,

$$p(q-r) + q(r-p) + r(p-q) = 0$$

であるから,

$$(\text{与式}) = x^0 = \mathbf{1} \qquad (\text{答})$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \log_2 5 + \log_2 3^3 - \log_2 270\\ &= \log_2 \frac{5\times 3^3}{270}\\ &= \log_2 \frac{1}{2} = \mathbf{-1} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{\log_2 5}{\log_2 4} - \log_2 5 + 2\cdot\frac{\log_2 5}{\log_2 16}\\ &= \frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 5 + \frac{1}{2}\log_2 5\\ &= \mathbf{0} \qquad \textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \log_3 5\cdot\frac{\log_3 9}{\log_3 5}\\ &= \log_3 9 = \mathbf{2} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【3】与えられた数の底を 2 にそろえる.

$$\begin{aligned}&1 = 2^0\\ &8^{0.25} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}\\ &(\sqrt{2})^{-3} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = 2^{-\frac{3}{2}}\\ &4^{\frac{1}{3}} = \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}\\ &\sqrt{\frac{1}{8}} = \left(2^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$2>1$ であることから,

$$2^{-\frac{3}{2}} < 2^0 < 2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore\quad (\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{-3}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}} < \mathbf{1} < \mathbf{4}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} < \mathbf{8}^{\mathbf{0.25}} \qquad (\text{答})$$

＜別解＞

対数を用いて解くことも出来る.

$$\begin{aligned}&\log_2 1 = 0\\ &\log_2 8^{0.25} = \frac{1}{4}\times 3 = \frac{3}{4}\\ &\log_2(\sqrt{2})^{-3} = -3\log_2\sqrt{2} = -\frac{3}{2}\\ &\log_2 4^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\\ &\log_2\sqrt{\frac{1}{8}} = \log_2 2^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$2>1$ であることから,

$$(\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{-3}} = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}} < \mathbf{1} < \mathbf{4}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}} < \mathbf{8}^{\mathbf{0.25}} \qquad (\text{答})$$

【4】 $$2^x = 3^y = 5^z = a \quad \cdots ①$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \qquad \cdots ②$$

とおく. ①より,

$$a > 0 \quad \cdots ③$$

であり, ②より,

$$x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0$$

であるから, $a \neq 1$ である. そこで, ①において, a を底とする対数をとると,

$$x \log_a 2 = y \log_a 3 = z \log_a 5 = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \log_a 2, \quad \frac{1}{y} = \log_a 3, \quad \frac{1}{z} = \log_a 5$$

よって, ②より,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5 = \log_a 30$$

$$\therefore \quad \log_a 30 = 2 = \log_a a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = 30$$

$$\therefore \quad a = \pm\sqrt{30}$$

③より, $a > 0$ であるので,

$$\boldsymbol{a = \sqrt{30}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $N=2^{40}$ とおく.

$$\log_{10} N = 40\times\log_{10} 2 = 40\times 0.3010 = 12.04$$

$$\left(\log_{10} 10^{12} =\right) 12 \leqq \log_{10} N < 13 \left(= \log_{10} 10^{13}\right)$$

$$10^{12} \leqq N < 10^{13}$$

$$\therefore\quad 10^{12} \leqq 2^{40} < 10^{13}$$

よって

13 桁　　(答)

(2) $N=15^{10}$ とおく.

$$\begin{aligned}\log_{10} N &= 10\times\log_{10} 15\\ &= 10\times(\log_{10} 3+\log_{10} 5)\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで, $\log_{10} 5 = \log_{10}\frac{10}{2} = 1-\log_{10} 2 = 0.6990$
これと, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を ① に代入すると,

$$\begin{aligned}\log_{10} N &= 10\times(0.4771+0.6990) = 11.761\\ (\log_{10} 10^{11} =)11 &\leqq \log_{10} N < 12(=\log_{10} 10^{12})\\ 10^{11} &\leqq N < 10^{12}\\ \therefore\quad 10^{11} &\leqq 15^{10} < 10^{12}\end{aligned}$$

よって,

12 桁　　**(答)**

【6】(1) $2^x+2^{-x}=t$ とおくと, $2^x>0,\ 2^{-x}>0$ より,

$$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$$
(等号成立は, $2^x=2^{-x}$ より, $x=0$ のとき)

よって,

$t \geqq 2$ (答)

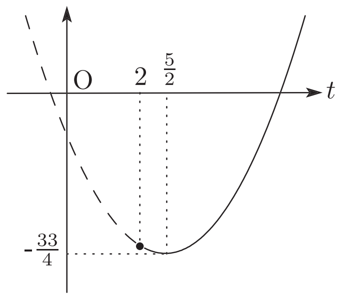


図 1

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{2x}-5(2^x+2^{-x})+2^{-2x} \\ &= (2^x+2^{-x})^2-2-5(2^x+2^{-x}) \\ &= t^2-5t-2 \\ &= \left(t-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{33}{4} \end{aligned}$$

これより, 最小値は, $-\dfrac{33}{4}$ であり, このとき $t=\dfrac{5}{2}$ である (図 1 参照).

ここで, $t=\dfrac{5}{2}$ となる x を求める.

$\dfrac{5}{2}=2^x+2^{-x}$ で, $2^x=X$ とすると,

$$X+\frac{1}{X}=\frac{5}{2}$$

したがって

$$2X^2-5X+2=(2X-1)(X-2)=0$$
$$\therefore \quad X=\frac{1}{2},\ 2$$

よって

$$2^x=\frac{1}{2},\ 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1,\ 1$$

となるので

$x=1,\ -1$ のとき 最小値 $-\dfrac{33}{4}$ (答)

【7】$\log_2 x + \log_x 2 = \log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 x} = t$ とおく.

$x > 1$ より

$$\log_2 x > 0$$

なので，t のとりうる値の範囲は

$$t \geqq 2\sqrt{\log_2 x \cdot \frac{1}{\log_2 x}} = 2$$

$t = 2$ となるのは

$$\log_2 x = \frac{1}{\log_2 x}$$

となるときで

$$(\log_2 x)^2 = 1 \text{ つまり } \log_2 x = \pm 1$$

のときである. $x > 1$ より

$$x = 2$$

このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log_2 x + \log_x 2)^2 - 2 - 4(\log_2 x + \log_x 2) + 1 \\ &= t^2 - 2 - 4t + 1 \\ &= t^2 - 4t - 1 \\ &= (t-2)^2 - 5 \end{aligned}$$

だから，$f(x)$ は $t = 2$ で最小値 -5 をとる．よって，

最小値 -5　($x = 2$ のとき)　　(答)

【8】真数条件と底の条件から

$$x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ y \neq 1$$

このとき, 条件は $\log_x y > \dfrac{1}{\log_x y} \quad (\log_x y \neq 0)$ となる. つまり

$$\frac{(\log_x y)^2 - 1}{\log_x y} > 0$$

ここで, $\log_x y$ の正負で場合分けをする.

(i) $\log_x y > 0$ のとき, 分子 > 0 となるので

$$(\log_x y + 1)(\log_x y - 1) > 0 \qquad \therefore \quad \log_x y > 1$$

(ii) $\log_x y < 0$ のとき, 分子 < 0 となるので

$$(\log_x y + 1)(\log_x y - 1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < \log_x y < 0$$

(i), (ii) より

$$\begin{aligned} & -1 < \log_x y < 0,\ 1 < \log_x y \\ \therefore \quad & \log_x x^{-1} < \log_x y < \log_x x^0,\ \log_x x < \log_x y \\ \therefore \quad & \log_x \frac{1}{x} < \log_x y < \log_x 1,\ \log_x x < \log_x y \end{aligned}$$

したがって

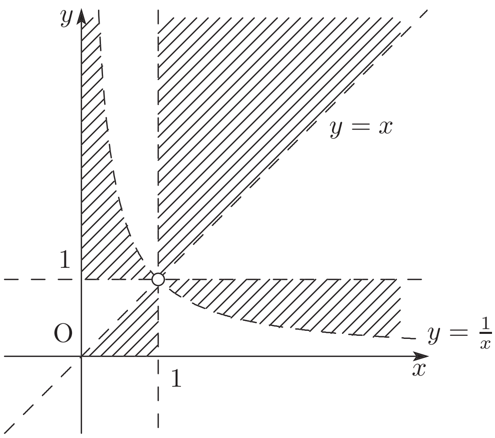
(i) $0 < x < 1$ のとき

$$\frac{1}{x} > y > 1,\ x > y$$

(ii) $1 < x$ のとき

$$\frac{1}{x} < y < 1,\ x < y$$

これを図示すると, 図のようになる.



ただし, 境界線上を除く　　(答)

問題

【1】(1) 与えられた条件より

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{6}$$

両辺2乗して

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$$
$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=6$$

整理して

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(1+9-6)=\mathbf{2} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果より

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot 9-2^2}\\&=\frac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\mathbf{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\geqq 0$ より

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right| \text{ が最小} \iff \left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2 \text{ が最小}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=9t^2+4t+1\\&=9\left(t+\frac{2}{9}\right)^2+\frac{5}{9}\end{aligned}$$

したがって $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$，すなわち $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ を最小にする t の値は，

$$\boldsymbol{t=-\frac{2}{9}} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より，C の座標は **(5, 12)**　　(答)

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 12 \cdot 5 + (-5) \cdot 12 = 0$$

ゆえに

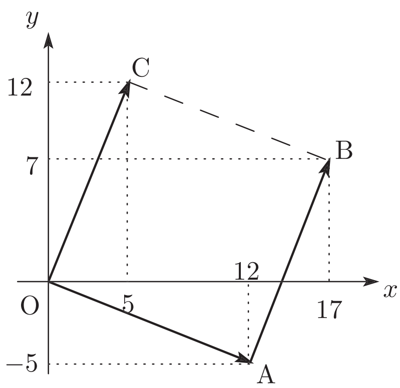
$$\therefore \cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|} = \mathbf{0} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 13 \quad \text{かつ} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

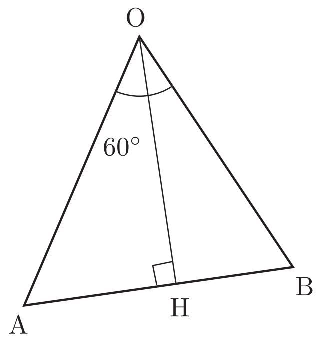
であるから，平行四辺形 OABC は正方形である．その面積 S は

$S = 13^2 = \mathbf{169}$　　(答)



【3】3 点 A，B，H は共線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad (t \text{ は実数})$$



ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \iff\ &\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ \iff\ &(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} - (1-t)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - t\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0 \end{aligned}$$

ここで

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 5, \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 4, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 10$$

であるから，これを代入して

$$\begin{aligned}(1-2t) \cdot 10 - (1-t) \cdot 5^2 + t \cdot 4^2 &= 0 \\ 21t &= 15 \\ t &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

よって，$(*)$ とから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad (\text{答})$$

【4】(1) 始点を A にそろえる.

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}\\&=\frac{5}{6}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}\end{aligned}$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}'=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

とすると, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}'=\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より D′ は直線 AP 上にあり, さらに線分 BC を 3: 2 に内分する点である. すなわち D′ と D は一致する. よって

BD : DC = **3 : 2**　　(答)

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

より, P は線分 AD を 5: 1 に内分する点である. つまり, △ABC の内部にある.

〔証明終〕

【5】求める直線上の点を P$(x,\ y)$ とし，点 A，P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{p}$ とする．またベクトルの成分を縦書きで表示する．

(1) 求める直線のベクトル方程式は，t を実数として

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{d}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 1+3t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 4-2t & \cdots ① \\ y = 1+3t & \cdots ② \end{cases}$$

① × 3 + ② × 2 より t を消去すると

$\boldsymbol{3x+2y=14}$　(答)

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線であるから，t を実数として

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5t \\ 4-6t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = -3+5t & \cdots ③ \\ y = 4-6t & \cdots ④ \end{cases}$$

③ × 6 + ④ × 5 より t を消去すると

$\boldsymbol{6x+5y=2}$　(答)

(3) 求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，

$$\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right)\cdot\overrightarrow{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$3(x+2)+4(y-4) = 0$$

よって求める直線は

$\boldsymbol{3x+4y=10}$　(答)

【6】求める円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{p}$ とする．

(1) 求める円の半径を r とすると，

$$r=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\begin{pmatrix}6-3\\6-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{25}=5$$

ゆえに $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ として

$$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=5$$
$$\left|\begin{pmatrix}x-3\\y-2\end{pmatrix}\right|=5$$

よって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=25} \qquad \text{(答)}$$

(2) 【解 1】

求める円の中心を $\mathrm{C}(\overrightarrow{c})$ とすると，C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{c}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

また半径を r とすると

$$\begin{aligned}r&=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\\&=\left|\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right|\\&=\left|\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right|\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}\right|=\sqrt{5}$$
$$\left|\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{5}$$

両辺 2 乗して，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=5} \qquad \text{(答)}$$

【解 2】

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると，円周上の点 P に対し AP $\perp$ BP であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

となる．これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する．よって

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}\right) &= 0 \\ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ (x-1)(x-3) + (y-4)y &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5} \qquad \text{(答)}$$

【7】原点を O とする.

(1) $\left|2\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=6$ より

$$\left|\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|=3$$

よって点 P の軌跡は

線分 OA の中点を中心とする半径 3 の円 (答)

である.

(2) $\left(2\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=0$ より,

$$\left(\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}\right)=0$$

ここで, 辺 AB の中点を M とすると, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}$

ゆえに

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=0$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \quad \cdots(*)$$

点 M と点 P が一致するときは, 点 P は辺 AB の中点と一致する.

点 M と点 P が一致しないときは, $(*)$ から

$\mathrm{MP}\perp\mathrm{AB}$

である. よって, 点 P の軌跡は,

辺 AB の垂直二等分線 (答)

である.

(3) 与式の両辺を 2 乗して,

$$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|^2=4\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right|^2$$

$$\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right)=4\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}+\left|\overrightarrow{a}\right|^2=4\left(\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2\right)$$

$$3\left|\overrightarrow{p}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-8\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p}-\left|\overrightarrow{a}\right|^2+4\left|\overrightarrow{b}\right|^2=0$$

$$3\left|\overrightarrow{p}\right|^2+2\left(\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{p}-\left(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)=0$$

$$\left\{3\overrightarrow{p}-(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\right\}\cdot\left\{\overrightarrow{p}+(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b})\right\}=0$$

$$\boldsymbol{\left(\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{2+1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{p}-\frac{-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}}{2-1}\right)=0}$$

よって, 点 P の軌跡は,

線分 AB を 2 : 1 に内分, 外分する点をそれぞれ C, D とするとき,
線分 CD を直径とする円 (答)

【8】　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$，$s+t \leqq 2$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$

$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ より $0 \leqq s+t \leqq 2$.

ここで $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ とし，$s+t=k$ とおく.

(i) $0 < s+t \leqq 2$ のとき

$$\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1,\quad \frac{s}{k} \geqq 0,\quad \frac{t}{k} \geqq 0 \quad \cdots(*)$$

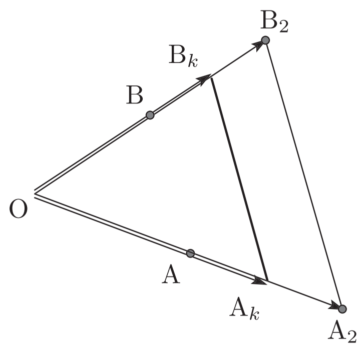
であり,

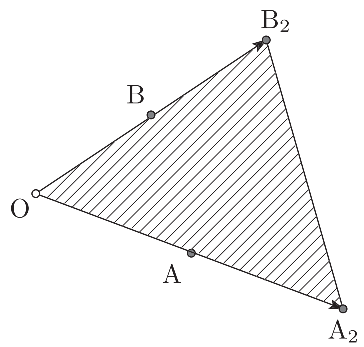
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{a}\right) + \frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{b}\right) = \frac{s}{k}\overrightarrow{a_k} + \frac{t}{k}\overrightarrow{b_k}$$

（ただし $\overrightarrow{a_k} = k\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b_k} = k\overrightarrow{b}$ とおいた）

半直線 OA，OB 上の 2 点 A_k，B_k をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}_k} = \overrightarrow{a_k}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_k} = \overrightarrow{b_k}$ で定めると，$(*)$ より点 P は左下図の線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ 上を動く（両端含む）.

ここで k を $0 < k \leqq 2$ の範囲で動かすと，線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ は平行に移動するから，P は右下図の 3 角形 $\mathrm{OA_2B_2}$ の内部および周上を動く（ただし O をのぞく）.





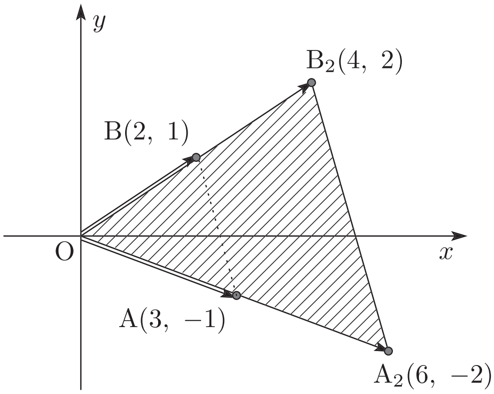
(ii) $k=0$ のとき

$$s+t=0,\quad s \geqq 0,\quad t \geqq 0 \text{ より},\ s=t=0$$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{0}$ より P は原点 O と一致する.

以上より，求める領域は 3 角形 OA_2B_2 の内部および周上.

$A(3,\ -1)$，$B(2,\ 1)$ より，求める領域は下図のようになる.　　　(答)



問題

【1】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

であり，3点A，B，Cが共線（同一直線上にある）のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots(*)$$

をみたす実数kが存在する．

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a-1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} a-1 = 3k & \cdots① \\ -5 = -3k & \cdots② \\ 5 = k(a-3) & \cdots③ \end{cases}$$

② より

$$k = \frac{5}{3}$$

① より

$$a = 3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = 6$$

これらは ③ をみたすから，求めるaの値は

$a = \mathbf{6}$　　(答)

【2】$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$をみたす実数$\alpha$，$\beta$が存在すればよく，

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha+2\beta \\ -\alpha+3\beta \\ 2\alpha+4\beta \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{cases} x+1 = 3\alpha+2\beta \\ 2x = -\alpha+3\beta \\ 3x = 2\alpha+4\beta \end{cases}$$

これを解くと，$x = \dfrac{10}{7}$，$(\alpha,\ \beta) = \left(\dfrac{1}{7},\ 1\right)$

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{10}{7}}$　**(答)**

【3】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}$$

ここで $\theta=\angle\mathrm{BAC}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}=-4+2-4=-6$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{6},\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=2\sqrt{6}$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\frac{-6}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\theta=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}\qquad(\text{答})$$

また 3 角形 ABC の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\boldsymbol{3\sqrt{3}}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

【4】 (1) l_1 は，O を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に平行な直線であるから, t を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

よって

$$l_1 : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{t} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は実数)} \qquad \text{(答)}$$

同様に l_2 は，B を通り $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ に平行な直線であるから，s を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

よって

$$l_2 : \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} + \boldsymbol{s} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \quad \textbf{(}\boldsymbol{s}\ \textbf{は実数)} \qquad \text{(答)}$$

(2) l_1 と l_2 の交点を求める．交点において

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = 1 + s & \cdots\cdots ① \\ 2t = s & \cdots\cdots ② \\ t = 2 - 2s & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

をみたす s，t を求める．① より

$$s = -1$$

② に代入して

$$2t = -1 \qquad \therefore \quad t = -\frac{1}{2}$$

ところが $t = -\dfrac{1}{2}$，$s = -1$ は ③ をみたさない.

ゆえに l_1 と l_2 の交点は存在しない．すなわち直線 l_1 と直線 l_2 は交わらない.

〔証明終〕

(3) l_1 と l_2 のどちらにも直交する直線と l_1，l_2 の交点を T，S とおくと，求める直線の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{TS}}$ である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

と表せるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{TS}} &= \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}\\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+s\\s-2t\\2-2s-t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$l_1 \perp \overrightarrow{\mathrm{TS}}$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+s\\s-2t\\2-2s-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} &= 0\\ -5t+2 &= 0\\ t &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

また $l_2 \perp \overrightarrow{\mathrm{TS}}$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+s\\s-2t\\2-2s-t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0\\ 6s-3 &= 0\\ s &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

以上より

$$\overrightarrow{\mathrm{TS}} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{3}{10}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} \quad /\!/ \quad \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$$

また，T の座標は

$$\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$$

であることから，求める直線のベクトル方程式は

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}} \quad \textbf{(}\boldsymbol{u}\ \textbf{は実数)} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 各辺の長さが 1 であるから

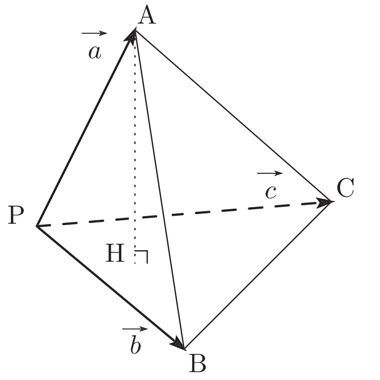
$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right| = 1$$

また，各面が正三角形であるから

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} = 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ は 1 次独立であるから，A から平面 PBC に 下ろした垂線の足 H は，s，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$$



とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}} = s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$$

ここで AH ⊥ PB，AH ⊥ PC であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{b}\cdot\left(s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right)\\ &= s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots①\\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{c}\cdot\left(s\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right)\\ &= \frac{1}{2}s + t - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，② より

$$s = \frac{1}{3},\quad t = \frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c}} \qquad \text{(答)}$$

(2) △PBC は 1 辺の長さ 1 の正三角形であるから，その面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}$$

より

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|^2 &= \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{b}\right|^2 + \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{c}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} - \frac{2}{3}\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} - \frac{2}{3}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\vec{b}+5\vec{c}}{8}-\frac{4}{7}\vec{a}=-\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\vec{a}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}-\vec{a}=-\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ とする.

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\left(1-\frac{5}{7}k\right)\vec{a}+\left(\frac{3}{16}k\right)\vec{b}+\left(\frac{5}{16}k\right)\vec{c}$$

S は△ OBC 上にあるので

$$1-\frac{5}{7}k=0 \qquad \therefore \quad k=\frac{7}{5}$$

よって

$$\mathrm{AR}:\mathrm{AS}=1:\frac{7}{5}=5:7$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\angle\mathrm{AOQ}$ より

$$\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=|\vec{a}|\left|\frac{3\vec{b}+5\vec{c}}{8}\right|\cos\angle\mathrm{AOQ} \qquad \cdots(*)$$

正四面体の一辺の長さを l とおく.

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=l^2\cos 60^\circ=\frac{l^2}{2}$$

$(*)$ より

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{l^2}{2}+\frac{5}{8}\cdot\frac{l^2}{2}=l\cdot\frac{\sqrt{9l^2+2\cdot 3\cdot 5\cdot\dfrac{l^2}{2}+25l^2}}{8}\cos\angle\mathrm{AOQ}$$

よって

$$\cos\angle\mathrm{AOQ}=\frac{4}{7}$$

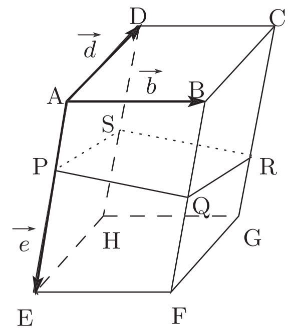
【7】■ 確認

4 点 P, Q, R, S は同一平面上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = m\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + n\overrightarrow{\mathrm{PR}} \quad (m,\ n \text{ は実数})$$

と書ける. $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ を 2 通りで表すことを目標とする.

■ 解答



(1)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} \\
&= -p\vec{e} + \vec{b} + q\vec{e} \\
&= \vec{b} + (q-p)\vec{e} \\
\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}} \\
&= -p\vec{e} + \vec{b} + \vec{d} + r\vec{e} \\
&= \vec{b} + \vec{d} + (r-p)\vec{e}
\end{aligned}$$

(2) 点 S は平面 PQR 上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = m\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + n\overrightarrow{\mathrm{PR}} \quad (m,\ n \text{ は実数})$$

と表せる. (1) より,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PS}} &= m\{\vec{b} + (q-p)\vec{e}\} + n\{\vec{b} + \vec{d} + (r-p)\vec{e}\} \\
&= (m+n)\vec{b} + n\vec{d} + \{m(q-p) + n(r-p)\}\vec{e} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DS}} &= -p\vec{e} + \vec{d} + s\vec{e} \\
&= \vec{d} + (s-p)\vec{e} \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

①と②とを比較すると,

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ n = 1 \\ m(q-p) + n(r-p) = s - p \end{cases}$$

よって,

$$s = p - q + r$$

(3) $p + r = 1$ を $s = p - q + r$ に代入すると,

$$s = 1 - q$$

$0 < q < 1$ より,

$$0 < s < 1, \quad \overrightarrow{\mathrm{DS}} = s\overrightarrow{\mathrm{DH}}$$

が成り立つ. よって, 点 S は辺 DH 上の点であり, 平面 PQR は辺 DH と交わる.

【8】■ テーマ

・平面と直線の交点

・四面体の体積比

■ 解答

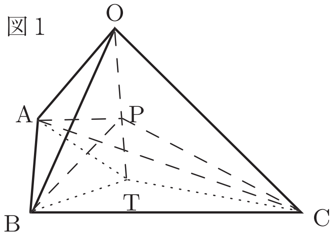
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\vec{a}$

(2) 条件より

$$2\vec{p}+3(\vec{p}-\vec{a})+5(\vec{p}-\vec{b})+7(\vec{p}-\vec{c})=\vec{0}$$
$$17\vec{p}=3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c}$$
$$\therefore\quad \vec{p}=\frac{1}{17}(3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c})$$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\vec{p}=\frac{3k}{17}\vec{a}+\frac{5k}{17}\vec{b}+\frac{7k}{17}\vec{c}$$

図 1



T は平面 ABC 上にあるので

$$\frac{3k}{17}+\frac{5k}{17}+\frac{7k}{17}=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{17}{15}$$

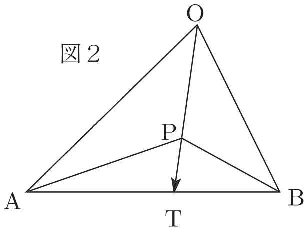
よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{17}{15}\vec{p}$$

(4) 四面体 OABC の体積を，OABC のように表す．このとき，(3) より

$$\mathrm{PABC}=\frac{2}{17}\mathrm{OABC}\quad\cdots①$$

図 2



一方，図 2 を参照すると，面積比と線分比の関係は

$$\frac{\triangle\mathrm{OBP}}{\triangle\mathrm{OAP}}=\frac{\triangle\mathrm{OBT}}{\triangle\mathrm{OAT}}=\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{AT}}$$

となり，これを 3 次元に応用すれば

$$\mathrm{PBCO}:\mathrm{PCOA}:\mathrm{POAB}=\triangle\mathrm{TBC}:\triangle\mathrm{TCA}:\triangle\mathrm{TAB}$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{15}(3\vec{a}+5\vec{b}+7\vec{c})-\vec{a}$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{7}{15}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{7}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{12}{15}\cdot\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+7\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{TAB}:\triangle\mathrm{TAC}=7:5$$

そして

$$\triangle\,\mathrm{TBC}=\frac{3}{15}\triangle\,\mathrm{ABC}=\frac{1}{5}\triangle\,\mathrm{ABC}$$
$$\triangle\,\mathrm{TAB}=\frac{7}{12}\cdot\frac{12}{15}\triangle\,\mathrm{ABC}=\frac{7}{15}\triangle\,\mathrm{ABC}$$
$$\triangle\,\mathrm{TAC}=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5}\triangle\,\mathrm{ABC}=\frac{1}{3}\triangle\,\mathrm{ABC}$$

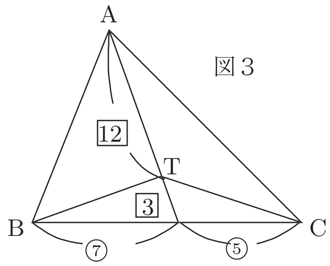


図３

これより

$$\triangle\,\mathrm{TBC}:\triangle\,\mathrm{TCA}:\triangle\,\mathrm{TAB}=3:5:7$$

①より

$$\mathrm{PBCO}+\mathrm{PCOA}+\mathrm{POAB}=\frac{15}{17}\mathrm{OABC}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{PBCO}&=\frac{3}{15}\cdot\frac{15}{17}\mathrm{OABC}=\frac{3}{17}\mathrm{OABC}\\ \mathrm{PCOA}&=\frac{5}{15}\cdot\frac{15}{17}\mathrm{OABC}=\frac{5}{17}\mathrm{OABC}\\ \mathrm{POAB}&=\frac{7}{15}\cdot\frac{15}{17}\mathrm{OABC}=\frac{7}{17}\mathrm{OABC}\end{aligned}\right\}\quad\cdots②$$

①，②より，求める体積比は

$2:3:5:7$

添削課題

【1】

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

の両方に垂直なベクトルの一つを

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

とおく．条件より

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}=2x+6y+z=0 \quad \cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=x-z=0 \quad \cdots②$$

ここで $x=1$ とおくと，② より

$$z=1$$

① より

$$y=-\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

求めるベクトルは，$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ に平行で，大きさが 9 であるから

$$\left|k\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right|=|k|\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3|k|=9$$

$$\therefore \quad k=\pm 3$$

ゆえに求めるベクトルは

$$\pm 3\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}\mathbf{6}\\\mathbf{-3}\\\mathbf{6}\end{pmatrix} \qquad (答)$$

M2TK

高２難関大数学Ｋ～重要分野総整理～

Z-KAI

会員番号		氏　名	