P2JR

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２物理力学導入

1章　瞬間の速度および加速度

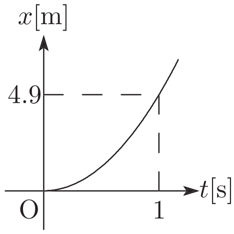
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) データ点の間は折れ曲がることなくつながると考えられるので，$x-t$ グラフは右図のようになる．

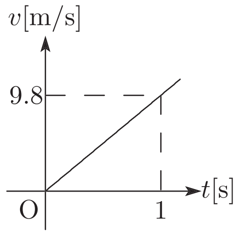


(2) (1) より，$x(t)$ を t の 2 次関数と推測して，

$$x(t) = 4.9t^2[\mathrm{m}]$$

(3) 時刻 t から微小時間 $\varDelta t$ だけ経過する間の変位は，

$$\begin{aligned}\varDelta x &= 4.9(t+\varDelta t)^2 - 4.9t^2 \\ &= 9.8t\cdot\varDelta t + 4.9\cdot(\varDelta t)^2\end{aligned}$$



$\varDelta x$ を $\varDelta t$ で割り，$\varDelta t$ を 0 に近付けて得られる極限値が時刻 t での速度なので，

$$\begin{aligned}v(t) &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \\ &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{9.8t\cdot\varDelta t + 4.9(\varDelta t)^2}{\varDelta t} = 9.8t[\mathrm{m/s}]\end{aligned}$$

(4) 時刻 t から微小時間 $\varDelta t$ だけ経過する間の速度変化は，

$$\begin{aligned}\varDelta v &= 9.8(t+\varDelta t) - 9.8t \\ &= 9.8\varDelta t\end{aligned}$$

$\varDelta v$ を $\varDelta t$ で割り，$\varDelta t$ を 0 に近付けて得られる極限値が時刻 t での加速度なので，

$$\begin{aligned}a(t) &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta v}{\varDelta t} \\ &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{9.8\varDelta t}{\varDelta t} = 9.8[\mathrm{m/s^2}]\end{aligned}$$

(5) 物体の質量を m[kg]，地球から受ける重力を W[N] とすると，運動方程式は，

$$m\cdot a(t) = W$$

(6) 9.8[m/s^2]=g と表すことにすると，

$$W = mg$$

物体が地球から受ける重力の大きさは質量に比例していることが分かる．

《解説》

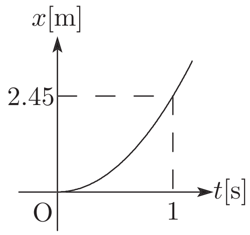
(6) で得た結果は重要である．地球上での力学を扱う限り，物体に必ず作用する力が地球から受ける「重力」であり，「重力」は鉛直下向きで，大きさ mg と表すことができる．

なお，「g」は重力加速度の大きさとよばれ，質量 1kg あたりが受ける重力の大きさに相当している．

【2】

《解答》

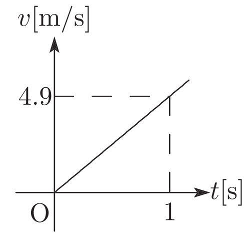
(1) データ点の間は折れ曲がることなくつながると考えられるので，$x-t$ グラフは右図のようになる．



(2) (1) より，$x(t)$ を t の 2 次関数と推測して，

$$x(t) = 2.45t^2[\mathrm{m}]$$

(3) 時刻 t から微小時間 $\varDelta t$ だけ経過する間の変位は，



$$\begin{aligned}\varDelta x &= 2.45(t+\varDelta t)^2 - 2.45t^2\\ &= 4.9t\cdot\varDelta t + 2.45\cdot(\varDelta t)^2\end{aligned}$$

$\varDelta x$ を $\varDelta t$ で割り，$\varDelta t$ を 0 に近付けて得られる極限値が時刻 t での速度なので，

$$\begin{aligned}v(t) &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\\ &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{4.9t\cdot\varDelta t + 2.45(\varDelta t)^2}{\varDelta t} = 4.9t[\mathrm{m/s}]\end{aligned}$$

(4) 時刻 t から微小時間 $\varDelta t$ だけ経過する間の速度変化は，

$$\begin{aligned}\varDelta v &= 4.9(t+\varDelta t) - 4.9t\\ &= 4.9\varDelta t\end{aligned}$$

$\varDelta v$ を $\varDelta t$ で割り，$\varDelta t$ を 0 に近付けて得られる極限値が時刻 t での加速度なので，

$$\begin{aligned}a(t) &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta v}{\varDelta t}\\ &= \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{4.9\varDelta t}{\varDelta t} = 4.9[\mathrm{m/s^2}]\end{aligned}$$

(5) 物体の質量を m[kg]，重力加速度の大きさを $g[\mathrm{m/s^2}]$ として，x 方向の運動方程式は，

$$m\cdot a(t) = mg\sin\theta$$

(6) (5) より

$$a(t) = g\sin\theta$$

g=9.8[m/s^2] であることもふまえると，

$$9.8\sin\theta = 4.9 \qquad \therefore\quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

よって，斜面の傾斜角は $\theta = 30°$ であることが分かる．

【3】

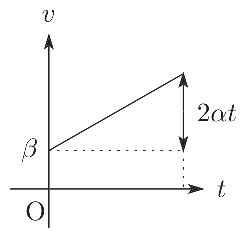
《解答》

(1)　時刻 t から微小時間 Δt だけ経過する間の変位は，

$$\begin{aligned}\Delta x &= \left\{\alpha(t+\Delta t)^2+\beta(t+\Delta t)\right\}-(\alpha t^2+\beta t)\\ &= (2\alpha t+\beta)\Delta t+\alpha\cdot(\Delta t)^2\end{aligned}$$

Δx を Δt で割り，Δt を 0 に近付けて得られる極限値が時刻 t での速度なので，

$$\begin{aligned}v(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(2\alpha t+\beta)\Delta t+\alpha(\Delta t)^2}{\Delta t}\\ &= 2\alpha t+\beta\end{aligned}$$

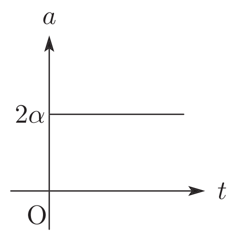


(2) 時刻 t から微小時間 Δt だけ経過する間の速度変化は，

$$\begin{aligned}\Delta v &= \{2\alpha(t+\Delta t)+\beta\}-(2\alpha t+\beta)\\ &= 2\alpha\cdot\Delta t\end{aligned}$$

Δv を Δt で割り，Δt を 0 に近付けて得られる極限値が時刻 t での加速度なので，

$$\begin{aligned}a(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\alpha\cdot\Delta t}{\Delta t}=2\alpha\end{aligned}$$



(3) x 方向の運動方程式は，

$$m\cdot a(t)=mg\sin\theta \qquad \therefore\quad a(t)=g\sin\theta$$

これと (2) より，

$$2\alpha=g\sin\theta \qquad \therefore\quad \alpha=\frac{1}{2}g\sin\theta$$

(4) 傾斜角が小さいと加速度が小さく，傾斜角が大きいと加速度が大きい．

(5) 時刻 $t=0$ で与えた初速度によって定まる．

《解説》

物体の運動は，物体が受けている力だけで決まるわけではない．物体が受ける力によって決まるのは加速度のみであり，速度を決定するためには全く別の条件が必要とされる．本問では「β の値を特定すること」がこの条件を与えることに相当しているのである．

【4】

《解答》

(ア) 質量

(イ) v と y の式から t を消去すると，

$$y=\frac{g}{2}\left(\frac{v}{g}\right)^2=\frac{v^2}{2g}$$

(ウ) $y=1000$[m] となるとき，

$$1000=\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2 \qquad \therefore \quad t=\frac{100}{7}\fallingdotseq 14[\mathrm{s}]$$

(エ) (イ) で $y=1000$[m] となるとき，

$$1000=\frac{v^2}{2\times 9.8} \qquad \therefore \quad v=140[\mathrm{m/s}]$$

(オ) 下向きに重力 mg，上向きに抵抗力 k_srv を受けるので，運動方程式は，

$$ma=mg-k_srv \quad \cdots ①$$

(カ) ① で $a=0$ となるとき，

$$0=mg-k_srv_s \qquad \therefore \quad v_s=\frac{1}{k_sr}\times mg \quad \cdots ②$$

(キ) 雨滴の密度が ρ なので，

$$\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\rho \qquad \therefore \quad m=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

(ク) (キ) の m を②に代入すると，

$$\begin{aligned} v_s &= \frac{1}{k_sr}\times\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot g \\ &= \frac{4\pi\rho g}{3k_s}\times r^2 \quad \cdots r \text{ の 2 乗に比例} \end{aligned}$$

(ケ) 下向きに重力 mg，上向きに抵抗力 $k_L\cdot\pi r^2\cdot v^2$ を受けるので，運動方程式は，

$$ma=mg-k_L\pi r^2v^2 \quad \cdots ③$$

(コ) ③ で $a=0$ となるとき，

$$0=mg-k_L\pi r^2{v_L}^2 \qquad \therefore \quad v_L=\frac{1}{r\sqrt{\pi k_L}}\times\sqrt{mg} \quad \cdots ④$$

(サ) (キ) の m を④に代入すると，

$$\begin{aligned} v_L &= \frac{1}{r\sqrt{\pi k_L}}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot g} \\ &= \sqrt{\frac{4\rho g}{3k_L}}\times\sqrt{r} \quad \cdots r \text{ の}\frac{1}{2}\text{乗に比例} \end{aligned}$$

2章　初期条件を満たす運動

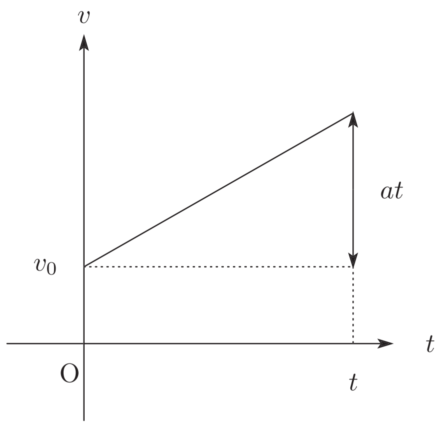
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 初速度 v_0 から，1 s あたり速度が a ずつ増加するので，$v-t$ グラフは下図のようになる．



(2) 微小時間 $\varDelta t$ での変位 $\varDelta x = v \cdot \varDelta t$ を合計すると，(1) の $v-t$ グラフと t 軸の間の面積となるので，

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

(3) 変位の合計は $x(t) - x_0$ と等しいので，

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \qquad \therefore \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

《解説》

$v-t$ グラフには，重要な特徴が 2 つある．

① グラフの「傾き」$\cdots$ 加速度と一致する．

② グラフと t 軸の間の「面積」$\cdots$ 変位の大きさと一致する．

本問のように加速度が一定の運動を扱う場合は，これらの特徴を利用することで速度および位置の表式を求めることができる．

【2】

《解答》

(1) 図 2 で SA の傾きに相当するので，

$$a = 6[\mathrm{m/s^2}]$$

(2) 図 2 で AB と t 軸との間の面積に相当するので，

$$\overline{\mathrm{AB}} = 2 \times 6 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 15[\mathrm{m}]$$

(3) 図 2 で CD の傾きは $-2\,\mathrm{m/s^2}$，また $t = 4[\mathrm{s}]$ では v =9[m/s] なので，

$$\frac{v-9}{t-4} = -2 \qquad \therefore \quad v = -2t + 17[\mathrm{m/s}]$$

(4) 図 2 で CP と t 軸の間の面積に相当するので，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CP}} &= \frac{9 + (-2t + 17)}{2} \cdot (t-4) \\ &= -(t-13)(t-4)[\mathrm{m}]\end{aligned}$$

【3】

《解答》

(1) 図 2 より，時刻 t における A，B の速度は，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{A}} = 1 \cdot t[\mathrm{m/s}] & \cdots ① \\ v_{\mathrm{B}} = 1 - 2 \cdot t[\mathrm{m/s}] & \cdots ② \end{cases}$$

また，$v - t$ グラフと t 軸の間の面積が変位に相当するので，時刻 $t[\mathrm{s}]$ における A，B の位置は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}t^2[\mathrm{m}] \\ x_{\mathrm{B}} = 4 + t - t^2[\mathrm{m}] \end{cases}$$

(2) $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}}$ となるとき，

$$\frac{1}{2}t^2 = 4 + t - t^2 \qquad \therefore \quad (3t + 4)(t - 2) = 0$$

ここで注目している時刻は $t > 0$ なので，A と B が衝突する時刻は

$$t = 2[\mathrm{s}]$$

(3) $t = 2[\mathrm{s}]$ のとき，①，②式より，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{A}} = 2[\mathrm{m/s}] \\ v_{\mathrm{B}} = -3[\mathrm{m/s}] \end{cases} \qquad \therefore \quad |v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}| = 5[\mathrm{m/s}]$$

【4】
《解答》

(1) $v-t$ グラフの傾きより，

$$a=\frac{60}{30}=2.0[\mathrm{m/s^2}]$$

(2) (1) と同様に，$v-t$ グラフの傾きより，

$$b=\left|\frac{0-60}{110-70}\right|=1.5[\mathrm{m/s^2}]$$

(3) 求める距離 l_1 は，$t=0$〜110[s] における $v-t$ グラフと t 軸の間の面積より，

$$l_1=\frac{1}{2}\times 60\times(110+40)=4500[\mathrm{m}]$$

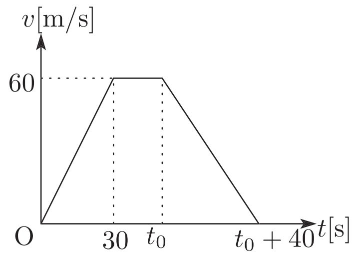
(4) $t=130$〜180[s] における $v-t$ グラフと t 軸の間の面積より，B 駅に戻るために移動した距離 l_2 は，

$$l_2=\frac{1}{2}\times 30\times(50+30)=1200[\mathrm{m}]$$

よって，A 駅と B 駅の間の距離は，

$$l_1-l_2=4500-1200=3300[\mathrm{m}]$$

(5) 減速を始める時刻を t_0 とすると，$v-t$ グラフは右図のようになる．この $v-t$ グラフと t 軸の間の面積が 3300 m となるので，



$$\frac{1}{2}\times 60\times\{(t_0+40)+(t_0-30)\}=3300$$
$$\therefore\quad t_0=50[\mathrm{s}]$$

3章　投射された物体の運動

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 各方向の運動について $v-t$ グラフを描き，グラフと t 軸の間の面積を求めることにより，

$$\begin{cases} x = v_x t \\ y = v_y t - \dfrac{1}{2}gt^2 \quad \cdots ① \end{cases}$$

(2) (1) より t を消去して，y を x の関数として表すと，

$$y = \frac{v_y}{v_x}x - \frac{g}{2{v_x}^2}x^2 \quad \cdots ②$$

(3) $y = h$ での速度成分は，

$$\begin{cases} V_x = v_x \\ V_y = v_y - gt \end{cases} \qquad \therefore \quad t = \frac{v_y - V_y}{g}$$

これと $y = h$ を①に代入して整理すると，

$${V_y}^2 - {v_y}^2 = -2gh \qquad \therefore \quad {V_y}^2 = {v_y}^2 - 2gh$$

よって，$y = h$ での速さは，

$$v = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 - 2gh}$$

(4) ②で v_x と v_y をともに v_{x0} とおき，$x = 4h$ のとき $y = h$ とすると，

$$h = 4h - \frac{g}{2{v_{x0}}^2}(4h)^2 \qquad \therefore \quad v_{x0} = \sqrt{\frac{8gh}{3}}$$

数値を代入すると，

$$v_{x0} = \sqrt{\frac{8}{3} \times 10 \times 2.4} = 8.0[\mathrm{m/s}]$$

【2】

《解答》

(1) 初速度 V_0 を 2 方向に分解すると，

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}V_0 \\ V_{0y} = V_0 \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V_0 \end{cases}$$

(2) 打ち出してから t 後の速度成分は，

$$\begin{cases} v_x = V_{0x} = \dfrac{1}{2}V_0 \\ v_y = V_{0y} - gt = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V_0 - gt \end{cases}$$

これらより，速さは，

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{{V_0}^2 - \sqrt{3}V_0 gt + g^2t^2}$$

(3) 各方向の運動について $v-t$ グラフを描き，グラフと t 軸の間の面積を求めることにより，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}V_0 t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(4) (3) の y を平方完成すると，

$$y = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{\sqrt{3}V_0}{2g}\right)^2 + \frac{g}{2}\left(\frac{\sqrt{3}V_0}{2g}\right)^2 \qquad \therefore \quad y_{\mathrm{max}} = \frac{3{V_0}^2}{8g}$$

天井に衝突しないための条件は $y_{\mathrm{max}} < H$ なので，

$$\frac{3{V_0}^2}{8g} < H \qquad \therefore \quad V_0 < \sqrt{\frac{8gH}{3}}$$

(5) 打ち出してから t 後の物体の位置は，

$$\begin{cases} x = V\cos 45^\circ \cdot t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Vt \\ y = V\sin 45^\circ \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Vt - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

これらより t を消去して，物体の軌跡の式を求めると，

$$y = -\frac{g}{V^2}x^2 + x$$

(a) $x = S$ のとき $y = 0$ であればよいので，

$$-\frac{g}{V^2}S^2 + S = 0 \qquad \therefore \quad V = \sqrt{gS}$$

(b) $x = S$ のとき $y > L$ であればよいので,

$$-\frac{g}{V^2}S^2 + S > L \qquad \therefore \quad V > S\sqrt{\frac{g}{S-L}}$$

【3】
《解答》

(1) (a) P，Q それぞれについて，各方向の運動の $v-t$ グラフを描き，グラフと t 軸の間の面積を求めることにより，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{P}} = a \\ y_{\mathrm{P}} = b - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{Q}} = v\cos\theta \cdot t \\ y_{\mathrm{Q}} = v\sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(b) $x_{\mathrm{Q}} = a$ となるとき，

$$v\cos\theta \cdot t = a \qquad \therefore \quad t = \frac{a}{v\cos\theta}$$

この t を y_{P}，y_{Q} に代入すると，

$$\begin{cases} y_{\mathrm{P}} = b - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{a}{v\cos\theta}\right)^2 = b - \dfrac{ga^2}{2v^2\cos^2\theta} \\ y_{\mathrm{Q}} = v\sin\theta \cdot \dfrac{a}{v\cos\theta} - \dfrac{g}{2} \cdot \left(\dfrac{a}{v\cos\theta}\right)^2 = a\tan\theta - \dfrac{ga^2}{2v^2\cos^2\theta} \end{cases}$$

(c) (b) の y_{Q} と y_{P} が一致すれば衝突するので，

$$a\tan\theta - \frac{ga^2}{2v^2\cos^2\theta} = b - \frac{ga^2}{2v^2\cos^2\theta} \qquad \therefore \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

(2) (d) P について，各方向の運動の $v-t$ グラフを描き，グラフと t 軸の間の面積を求めることにより，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{P}} = a + wt \\ y_{\mathrm{P}} = b - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(e) (a) の y_{Q} を平方完成すると，

$$y_{\mathrm{Q}} = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{v\sin\theta}{g}\right)^2 + \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v\sin\theta}{g}\right)^2$$

y_{Q} が最大となる $t = \dfrac{v\sin\theta}{g}$ のとき，$x_{\mathrm{P}} = x_{\mathrm{Q}}$ かつ $y_{\mathrm{P}} = y_{\mathrm{Q}}$ となり衝突するためには，

$$\begin{cases} a + w \cdot \dfrac{v\sin\theta}{g} = v\cos\theta \cdot \dfrac{v\sin\theta}{g} & \cdots ① \\ b - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{v\sin\theta}{g}\right)^2 = v\sin\theta \cdot \dfrac{v\sin\theta}{g} - \dfrac{g}{2}\left(\dfrac{v\sin\theta}{g}\right)^2 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，

$$b = \frac{v^2\sin^2\theta}{g} \qquad \therefore \quad v\sin\theta = \sqrt{gb} \quad \cdots ②'$$

① に代入すると，

$$a + w \cdot \frac{\sqrt{gb}}{g} = v\cos\theta \cdot \frac{\sqrt{gb}}{g} \qquad \therefore \quad v\cos\theta = w + a\sqrt{\frac{g}{b}} \quad \cdots ①'$$

$\dfrac{②'}{①'}$ より，

$$\frac{v\sin\theta}{v\cos\theta} = \frac{\sqrt{gb}}{w + a\sqrt{\dfrac{g}{b}}} \qquad \therefore \quad \tan\theta = \frac{b\sqrt{g}}{w\sqrt{b} + a\sqrt{g}}$$

$①'^2 + ②'^2$ より，

$$(v\cos\theta)^2 + (v\sin\theta)^2 = \left(w + a\sqrt{\frac{g}{b}}\right)^2 + gb$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\left(w + a\sqrt{\frac{g}{b}}\right)^2 + gb}$$

【4】

《解答》

(1) (イ) $v_{0x} = v_0 \cos\theta$

(ロ) $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

(ハ) $x_T = v_0 \cos\theta \cdot T$

(ニ) $y_T = h + v_0 \sin\theta \cdot T - \frac{1}{2}gT^2$

(ホ) $x_\mathrm{C} = 0$

(ヘ) $y_\mathrm{C} = h - \frac{1}{2}gT^2$

(ト) $X_T = x_T - x_\mathrm{C} = v_0 T \cos\theta$

(チ) $Y_T = y_T - y_\mathrm{C} = v_0 T \sin\theta$

(2) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より，

$$\left(\frac{X_T}{v_0 T}\right)^2 + \left(\frac{Y_T}{v_0 T}\right)^2 = 1 \qquad \therefore \quad {X_T}^2 + {Y_T}^2 = (v_0 T)^2$$

(3) 中心が自由落下をしながら，半径が破裂後の時間に比例して増大する球形に見える．

４章　運動方程式の運用（１）

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) $ma = F - F_2$

(2) $ma = F_1 - F_4$

(3) $ma = F_3$

(4) 作用・反作用の法則

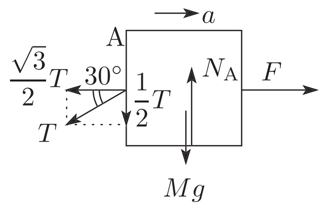
(5) (1)～(4) より，F_2 と F_4 を消去すると，

$$\begin{cases} ma = F - F_1 \\ ma = F_1 - F_3 \\ ma = F_3 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{2}{3}F \\ F_3 = \dfrac{1}{3}F \\ a = \dfrac{F}{3m} \end{cases}$$

【2】

《解答》

(1) 右向きを正とすると，

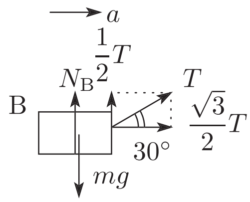


$$Ma = F - \frac{\sqrt{3}}{2}T$$

(2) 上向きを正とすると，

$$0 = N_{\mathrm{A}} - Mg - \frac{1}{2}T$$

(3) 右向きを正とすると，



$$ma = \frac{\sqrt{3}}{2}T$$

(4) 上向きを正とすると，

$$0 = N_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}T - mg$$

(5) (1)，(3) より，

$$(M+m)a = F \qquad \therefore \quad a = \frac{F}{M+m}$$

これを (3) に代入すると，

$$m \cdot \frac{F}{M+m} = \frac{\sqrt{3}}{2}T \qquad \therefore \quad T = \frac{2mF}{\sqrt{3}(M+m)}$$

(6) B が床から浮かない限界では，(4) で $N_{\mathrm{B}} = 0$ なので，このとき $T = T_0$ とすると，

$$0 = \frac{1}{2}T_0 - mg \qquad \therefore \quad T_0 = 2mg$$

これを (3) に代入すると，

$$ma_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2mg \qquad \therefore \quad a_0 = \sqrt{3}g$$

【3】

《解答》

(イ) 逆

(ロ) $-a_2$

(ハ) $m_1 g$

(ニ) $T - m_1 g$

(ホ) $m_2 g$

(ヘ) $T - m_2 g$

(ト) ①，②，③より，

$$\frac{T - m_1 g}{m_1} = -\frac{T - m_2 g}{m_2} \qquad \therefore \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

(チ) (ト) を②に代入すると，

$$m_1 a_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} - m_1 g \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

この式と，$m_2 \geqq m_1$，および①より，

$$|a_1| = |a_2| = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

(リ) $m_1 + m_2 = k$(一定) とおき，(ト) から m_2 を消去すると，

$$T = \frac{2m_1(k - m_1)}{k} g = -\frac{2g}{k} \left\{ \left(m_1 - \frac{k}{2} \right)^2 - \frac{k^2}{4} \right\}$$

よって，T が最大となるのは，$m_1 = \dfrac{k}{2}$ すなわち $m_1 = m_2$ のとき．

(ヌ) (チ)，(リ) より，$a_1 = 0$

【4】

《解答》

(a) 加速度の大きさを α とすると，運動方程式は，

$$4m\cdot\alpha = 4mg\sin\theta \qquad \therefore \quad \alpha = g\sin\theta$$

所要時間を t とすると，

$$\begin{cases} V = v_1 + \alpha t \\ L = v_1 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

これらより，t を消去して整理すると，

$$V^2 - {v_1}^2 = 2\alpha L \qquad \therefore \quad V = \sqrt{{v_1}^2 + 2gL\sin\theta}$$

(b) $mg\sin\theta - T_1$

(c) $T_1 - T_2$

(d) $T_2 - T_3$

(e) T_3

(f) それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} m\alpha_1 = mg\sin\theta - T_1 \\ m\alpha_1 = T_1 - T_2 \\ m\alpha_1 = T_2 - T_3 \\ m\alpha_1 = T_3 \end{cases}$$

これらを加えると，

$$4m\alpha_1 = mg\sin\theta \qquad \therefore \quad \alpha_1 = \frac{1}{4}g\sin\theta$$

(g) $mg\sin\theta - {T_1}'$

(h) $mg\sin\theta + {T_1}' - {T_2}'$

(i) ${T_2}' - {T_3}'$

(j) ${T_3}'$

(k) (f) と同様に，それぞれの運動方程式を立て，それらを加えると

$$4m\alpha_2 = 2mg\sin\theta \qquad \therefore \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}g\sin\theta$$

(l) (k) と同様にして，

$$4m\alpha_3 = 3mg\sin\theta \qquad \therefore \quad \alpha_3 = \frac{3}{4}g\sin\theta$$

(m) 加速度の大きさを α_4 とすると，(k) と同様にして

$$4m\alpha_4 = 4mg\sin\theta \qquad \therefore \quad \alpha_4 = g\sin\theta$$

5章　運動方程式の運用（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 水平方向の運動方程式は，

$$\begin{cases} Ma = F - ks & \cdots ① \\ ma = ks & \cdots ② \end{cases}$$

(2) ① + ② より，

$$(M+m)a = F \qquad \therefore \quad a = \frac{F}{M+m}$$

② に代入すると，

$$m \cdot \frac{F}{M+m} = ks \qquad \therefore \quad s = \frac{mF}{k(M+m)}$$

(3) 水平方向の運動方程式は，

$$\begin{cases} Ma' = ks' & \cdots ③ \\ ma' = F - ks' & \cdots ④ \end{cases}$$

(4) ③ + ④ より

$$(M+m)a' = F \qquad \therefore \quad a' = \frac{F}{M+m}$$

③に代入すると

$$M \cdot \frac{F}{M+m} = ks' \qquad \therefore \quad s' = \frac{MF}{k(M+m)}$$

《解説》

本来，ばねで連結された 2 物体の加速度が等しい保証はない．それというのも，ばねの長さは増加することも減少することも可能だからである．

しかし，本問ではばねの長さが一定に保たれるような運動を考えている．この条件を満たす運動では，2 物体の変位はつねに等しく，2 物体の速度および加速度も等しくなるのである．

【2】

《解答》

(1) 糸の張力の大きさを T，Q が斜面から受ける抗力の大きさを N とすると，水平方向，鉛直方向の運動方程式は，

$$\begin{cases} m \cdot a = N\sin\theta - T\cos\theta \\ m \cdot 0 = N\cos\theta + T\sin\theta - mg \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} T = mg\sin\theta - ma\cos\theta \\ N = mg\cos\theta + ma\sin\theta \end{cases}$$

(2) $a = a_0$ のとき $T = 0$ より，

$$mg\sin\theta - ma_0\cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad a_0 = g\tan\theta$$

(3) 糸の張力の大きさを T'，Q が斜面から受ける抗力の大きさを N' とすると，水平方向，鉛直方向の運動方程式は，

$$\begin{cases} m \cdot b = T'\cos\theta - N'\sin\theta \\ m \cdot 0 = T'\sin\theta + N'\cos\theta - mg \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} T' = mg\sin\theta + mb\cos\theta \\ N' = mg\cos\theta - mb\sin\theta \end{cases}$$

(4) $b = b_0$ のとき $N' = 0$ より，

$$mg\cos\theta - mb_0\sin\theta = 0 \qquad \therefore \quad b_0 = \frac{g}{\tan\theta}$$

【3】

《解答》

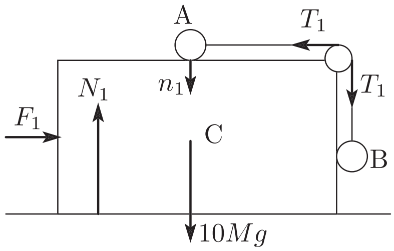
(1) 糸の張力の大きさを T_1，A と B の加速度の大きさを a_1 とする．A，B の運動方程式は，

$$\begin{cases} 3M \cdot a_1 = T_1 \\ 2M \cdot a_1 = 2Mg - T_1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{5}g \\ T_1 = \dfrac{6}{5}Mg \end{cases}$$

(2) C が受ける水平方向の力のつりあいより，

$$10M \cdot 0 = F_1 - T_1 \qquad \therefore \quad F_1 = \frac{6}{5}Mg$$

(3) AC 間で働く垂直抗力の大きさを n_1，DC 間で働く垂直抗力の大きさを N_1 とする．A，C の受ける鉛直方向の力のつりあいより，



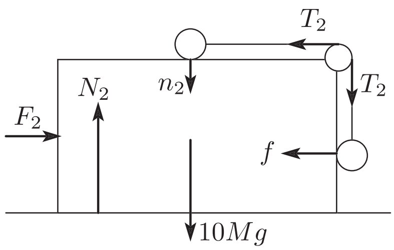
$$\begin{cases} 0 = n_1 - 3Mg \\ 0 = N_1 - 10Mg - n_1 - T_1 \end{cases}$$

これらを加えると，

$$0 = N_1 - 13Mg - T_1 \qquad \therefore \quad N_1 = \frac{71}{5}Mg$$

(4) BC 間で働く垂直抗力の大きさを f，糸の張力の大きさを T_2，共通の加速度を a_2 とする．A，B の水平方向の運動方程式と，B が受ける鉛直方向の力のつりあいより，

$$\begin{cases} 3M \cdot a_2 = T_2 \\ 2M \cdot a_2 = f \\ 2M \cdot 0 = 2Mg - T_2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} T_2 = 2Mg \\ a_2 = \dfrac{2}{3}g \\ f = \dfrac{4}{3}Mg \end{cases}$$

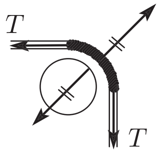


(5) C の水平方向の運動方程式は，

$$10M \cdot a_2 = F_2 - f - T_2 \qquad \therefore \quad F_2 = 10Mg$$

《解説》

注目する「物体 C の一部」である滑車にも糸からの力が作用することは見落としがちである．この力は糸からの垂直抗力なのだが，糸と滑車の質量を無視できる場合は便宜的に「張力が滑車に作用する」と考えてよい．



【4】

《解答》

(ア) Q の質量を M_0，糸の張力を T_0 とする．力のつり合いより，

$$\begin{cases} 0 = Mg - 2T_0 \\ 0 = M_0 g - T_0 \end{cases} \qquad \therefore \quad M_0 = \frac{M}{2}$$

(イ) P が上に l だけ変位すると，糸は動滑車の両側で l ずつ減少し，S は下に $2l$ だけ変位する．よって，S が下に x だけ変位すると，P は上に $\dfrac{x}{2}$ だけ変位する．

(ウ) 下向き正として，

$$\left(m + \frac{M}{2}\right) a = \left(m + \frac{M}{2}\right) g - T \quad \cdots ①$$

(エ) (イ) より，P の加速度は上向きに $\dfrac{a}{2}$ と表せる．よって，P の運動方程式は，

$$M \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) = Mg - 2T \quad \cdots ②$$

(オ) ① × 2 − ② で T を消去すると，

$$2\left(m + \frac{M}{2}\right) a + \frac{M}{2} a = 2\left(m + \frac{M}{2}\right) g - Mg \qquad \therefore \quad a = \frac{4m}{3M + 4m} g$$

(カ) $a = \dfrac{g}{2}$ となるとき，

$$\frac{4m}{3M + 4m} g = \frac{g}{2} \qquad \therefore \quad m = \frac{3}{4} M$$

(キ) $x = \dfrac{2}{3} h$ となるとき，同じ高さとなるので，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{2}{3} h \qquad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{8h}{3g}}$$

P2JR

高２物理力学導入

Z-KAI

会員番号		氏　名	