M2JD

夏期講習

解答

Z会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ

Lecture 1 数列の極限

演習問題 1 − 1

$\boxed{1}$ 次の極限を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n^3\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+n+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-1)}{3n^2+n+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+6n+5}-n)$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+2}}{-2^n+5\cdot3^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}+5^n}{4\cdot3^{2n}+5^{n+1}}$

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}+2^n}{x^n+2^n}\quad(x\neq-2)$$

と定める．このとき，$y=f(x)$ のグラフの概形を xy 平面上に図示せよ．

解答・解説

$\boxed{1}$

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-2n^3\right)=\lim_{n\to\infty}n^3\cdot\left(\frac{1}{n}-2\right)=-\infty\qquad(答)$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}}{n+1+\dfrac{1}{n}}=0\qquad(答)$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-1)}{3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}\qquad(答)$$

(4)

$$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+6n+5)-n^2}{\sqrt{n^2+6n+5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}=3\qquad(答)$$

(5)

$$(\text{与式}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n + 9\cdot 3^n}{-2^n + 5\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 9}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5} = \frac{9}{5} \qquad (\text{答})$$

(6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n+1} + 5^n}{4\cdot 3^{2n} + 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 9^n + 5^n}{4\cdot 9^n + 5\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \left(\frac{5}{9}\right)^n}{4 + 5\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n} = \frac{3}{4} \qquad (\text{答})$$

$\boxed{2}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} + 2^n}{x^n + 2^n} \quad (x \neq -2)$$

x の絶対値と 2 を比較する．

a） $-2 < x < 2$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x\cdot x^n + 2^n}{x^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n + 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^n + 1} = 1$$

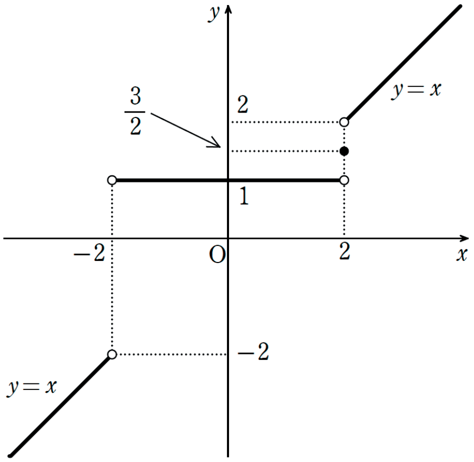
b） $x = 2$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 2^n}{2^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n}{2\cdot 2^n} = \frac{3}{2}$$

c） $x < -2,\ 2 < x$ のとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x\cdot x^n + 2^n}{x^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x + \left(\frac{2}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n} = x$$

以上より，$y = f(x)$ の概形は下図．



(答)

演習問題 1 − 2

数列 $\{a_n\}$ が次のように定義されている．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots(*)$$

次の問いに答えよ．

(1) この数列 $\{a_n\}$ が極限値 α をもつとする．このとき α を求めよ．以下の設問において，α はすべてこの値であるとする．

(2) すべての自然数 n に対して，

$$|a_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$$

を示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示せ．

解答・解説

(1) $(*)$ より，帰納的にすべての自然数 n に対して $a_n > 0$.
また $(*)$ はすべての自然数 n に対して成り立つから，$n \to \infty$ として，$(*)$ は

$$\alpha = \sqrt{\alpha + 2}. \qquad \therefore \quad \alpha = 2\ (> 0). \qquad \text{(答)}$$

(2) $(*)$ を用いると

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - 2| &= \left|\sqrt{a_n + 2} - 2\right| \\ &= \left|\frac{a_n + 2 - 2^2}{2 + \sqrt{a_n + 2}}\right| \\ &= \frac{|a_n - 2|}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \\ &< \frac{1}{2}|a_n - 2|. \qquad \text{〔証明終〕} \end{aligned}$$

(3) 上の結果は，すべての自然数 n に対して成り立つから，十分大きい n に対して

$$\begin{aligned} (0 \leqq)\ |a_n - 2| &< \frac{1}{2}|a_{n-1} - 2| \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - 2| \\ &< \cdots \\ &< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2. \qquad \text{〔証明終〕}$$

演習問題 1 − 3

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin^n x - \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \quad \left(0 < x < \pi,\ x \neq \frac{3}{4}\pi\right)$$

と定める．このとき，$y = f(x)$ のグラフの概形を xy 平面上に図示せよ．

解答・解説

a) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3}{4}\pi < x < \pi$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\tan^n x - 1}{\tan^n x + 1} = -1$$

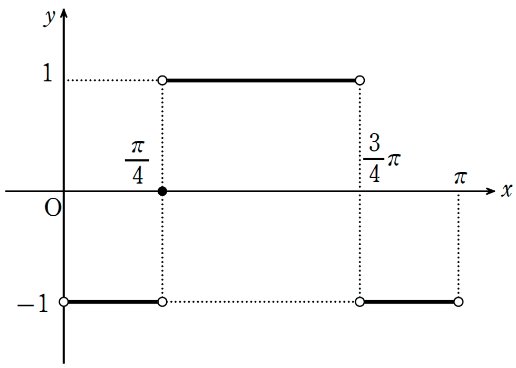
b) $x = \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n} = 0$$

c) $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{\tan^n x}}{1 + \dfrac{1}{\tan^n x}} = 1$$

以上より，$y = f(x)$ の概形は下図．



(答)

演習問題 1 − 4

数列 $\{a_n\}$ を次のよう定める．

$a_1=2$ とする．曲線 $y=x^2-2$ の上に点 $\mathrm{A}_n(a_n,\, a_n^2-2)$ をとり，点 A_n における曲線 $y=x^2-2$ の接線と x 軸の交点を $(a_{n+1},\,0)$ とする．このように，$n=1,\,2,\,3\cdots\cdots$ で $a_1,\,a_2,\,a_3,\,\cdots\cdots$ を順に与える．次の問いに答えよ．

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(2) $\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x)=x^2-2$ とする．$f'(x)=2x$ より，点 $(a_n,\,a_n^2-2)$ における接線の方程式は

$$y-(a_n^2-2)=2a_n(x-a_n)$$

この直線と x 軸との共有点が $(a_{n+1},\,0)$ であることから

$$0-(a_n^2-2)=2a_n(a_{n+1}-a_n)$$

$a_n=0$ のとき，等号は成立しない．ゆえに，$a_n\neq 0$ から

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\qquad \text{(答)}$$

(2) まず，$a_n>\sqrt{2}$ を数学的帰納法により示す．

I) $n=1$ のとき，$a_1=2>\sqrt{2}$ より成り立つ．

II) $a_k>\sqrt{2}$ とする．このとき

$$a_{k+1}-\sqrt{2}=\frac{a_k^2+2}{2a_k}-\sqrt{2}=\frac{(a_k-\sqrt{2})^2}{2a_k}>0$$

以上より，すべての自然数 n について $a_n>\sqrt{2}$ が成り立つ． 〔証明終〕

次に，$a_{n+1}<a_n$ を示す．

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^2+2}{2a_n}=\frac{a_n^2-2}{2a_n}>0\qquad (\because\quad a_n>\sqrt{2})$$

ゆえに $a_{n+1}<a_n$ が成り立つ． 〔証明終〕

(3) (2) より

$$a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}a_n}\right)(a_n-\sqrt{2})<\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{2})$$

ゆえに

$$0<a_n-\sqrt{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{2})$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{2})=0$ なので，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{2})=0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 1 − 5

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n と表す．この数列が，関係式

$$a_1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = 1, \quad n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geqq 1)$$

をみたすとき，一般項 a_n を求めよ．

解答・解説

条件より $n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad \cdots ①$．$n \geqq 2$ として $(n-1)(n-3)a_n = S_{n-1} \quad \cdots ②$．
辺々引いて

$$\begin{aligned} n(n-2)a_{n+1} - (n-1)(n-3)a_n &= S_n - S_{n-1} = a_n \\ n(n-2)a_{n+1} &= \left(n^2 - 4n + 3\right) a_n + a_n \\ &= (n-2)^2 a_n \end{aligned}$$

$n \geqq 3$ として，両辺 $n(n-2)$ で割って $a_{n+1} = \dfrac{n-2}{n} a_n \quad \cdots (*)$．$n \geqq 4$ として，$(*)$ を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-3}{n-1} a_{n-1} \\ &= \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} a_{n-2} \\ &= \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-4}{n-2} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_3 \\ &= \frac{2 \cdot 1}{(n-1)(n-2)} a_3 \quad (n = 3 \text{ でも成立}) \end{aligned}$$

ところで ① で $n = 1$ として，$S_1 = 1 \cdot (-1)a_2 = a_1$．ゆえに $a_1 + a_2 = 0$．よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=3}^{n} a_k \quad (\because a_1 + a_2 = 0) \\ &= 2a_3 \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{(k-1)(k-2)} \\ &= 2a_3 \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) \\ &= 2a_3 \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2a_3 \end{aligned}$$

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = 2a_3 = 1$ より $a_3 = \dfrac{1}{2}$．以上より，

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \ (n \geqq 3). \qquad (答)$$

演習問題 1 − 6

次の極限を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n}$

解答・解説

(1) 二項定理より，

$$(1+x)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = 1 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n \\ &> {}_n\mathrm{C}_2 = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ．これより，

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0 \qquad (答)$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2^n} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{2} \\ &\geqq \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdots\cdots\frac{2}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ．これより，

$$\frac{n}{4} \leqq \frac{n!}{2^n} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4} = \infty$ であるから，追い出しの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n} = \infty \qquad (答)$$

Lecture 2 関数の極限と微分法

演習問題 2 − 1

1 次の極限を計算せよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{2x^2+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x+\sin x}{\tan 3x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\log x\right\}$

2 等式 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax+b}{x-2}=17$ が成り立つ．実数定数 a, b の値を求めよ.

3 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{2h}$ を $f'(a)$ で表せ.

解答・解説

1

(1)

$$(与式)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{2+0}=\frac{1}{2}\qquad(答)$$

(2)

$$(与式)=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x^2-2x+4)=12\qquad(答)$$

(3) $x=-t$ とおく．このとき，$t\to+\infty$ より $t>0$ としてよい.

$$(与式)=\lim_{t\to+\infty}\frac{-3t+2}{\sqrt{(-t)^2+1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-3+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-3\qquad(答)$$

(4)

$$(与式)=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot3=1\cdot3=3\qquad(答)$$

(5)

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-2} = \frac{1}{e^2} \qquad (\text{答})$$

(6)

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2+\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\tan 3x}{3x}\cdot 3} = \frac{2+1}{3} = 1 \qquad (\text{答})$$

(7)

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos 3x}{1+\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x} = \frac{9}{2} \qquad (\text{答})$$

(8)

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) = \log 2 \qquad (\text{答})$$

$\boxed{2}$

$x\to 2$ のとき $x-2\to 0$. すなわち

$$x^3+ax+b = \frac{x^3+ax+b}{x-2}\cdot(x-2) \to 17\cdot 0 = 0$$

つまり,

$$2^3+2a+b=0 \qquad \therefore\quad b=-2a-8 \quad \cdots①$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax+(-2a-8)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+a+4)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+a+4)\\ &= a+12\end{aligned}$$

極限値が 17 であることから

$$a+12=17 \quad \cdots②$$

①, ② より

$$a=5,\ b=-18 \qquad (\text{答})$$

$\boxed{3}$

$$(\text{与式}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}f'(a) \qquad (\text{答})$$

$\boxed{\text{演習問題 } 2-2}$

関数 $f(x) = \begin{cases} \log x & (x \geqq 1) \\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (x < 1) \end{cases}$ について，$x = 1$ で微分可能となるように定数 a, b の値を定めよ．

$\boxed{\text{解答・解説}}$

関数 $f(x)$ が $x = 1$ で微分可能であるならば，$x = 1$ で連続である．

$$f(1) = \log 1 = 0$$

また

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = f(1) = 0$$
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \frac{a+b}{1+1} = \frac{a+b}{2}$$

すなわち

$$0 = \frac{a+b}{2} \qquad \therefore \quad a + b = 0 \quad \cdots ①$$

また，関数 $f(x)$ は $x = 1$ で微分可能である．

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{\log(1+h) - \log 1}{h} = \lim_{h \to +0} \log{(1+h)}^{\frac{1}{h}} = 1$$

また，① より

$$\begin{aligned} \lim_{h \to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to -0} \frac{\dfrac{a(1+h)+b}{(1+h)+1} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to -0} \frac{ah + (a+b)}{h(h+2)} \\ &= \lim_{h \to -0} \frac{a}{h+2} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$1 = \frac{a}{2} \qquad \therefore \quad a = 2 \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$a = 2,\ b = -2 \qquad (\text{答})$$

演習問題 $2-3$

次の等式が成り立つように，定数 a, b の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x-1}-ax-b\right)=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx-1}+x\right)=2$

解答・解説

(1) $a \leqq 0$ のとき，$-(ax+b)\to+\infty$ から，左辺の極限は発散する．
すなわち，$a>0$ が必要である．

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{4x^2-3x-1}-(ax+b)\right\}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2-3x-1)-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2-3x-1}+(ax+b)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(4-a^2)x^2-(2ab+3)x-(b^2+1)}{\sqrt{4x^2-3x-1}+(ax+b)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(4-a^2)x-(2ab+3)-\dfrac{b^2+1}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\left(a+\dfrac{b}{x}\right)}
\end{aligned}$$

ゆえに

$$a>0 \quad \text{かつ} \quad 4-a^2=0$$

より，$a=2$．このとき

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-(4b+3)x-(b^2+1)}{\sqrt{4x^2-3x-1}+(2x+b)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-(4b+3)-\dfrac{b^2+1}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+2+\dfrac{b}{x}}\\
&= -\frac{4b+3}{2+2}\\
&= -\frac{4b+3}{4}
\end{aligned}$$

となり，確かに収束する．極限値が 0 であることから

$$-\frac{4b+3}{4}=0 \qquad \therefore \quad b=-\frac{3}{4}$$

ゆえに，求める値は　$a=2,\ b=-\dfrac{3}{4}$　(答)

(2)　$t=-x$ とおく．このとき

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{at^2-bt-1}-t\right)\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{(at^2-bt-1)-t^2}{\sqrt{at^2-bt-1}+t}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{(a-1)t^2-bt-1}{\sqrt{at^2-bt-1}+t}
\end{aligned}
$$

ゆえに，$a-1=0$ より $a=1$．このとき

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \lim_{t\to\infty}\frac{-bt-1}{\sqrt{t^2-bt-1}+t}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{-b-\dfrac{1}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{b}{t}-\dfrac{1}{t^2}}+1}\\
&= -\frac{b}{1+1}\\
&= -\frac{b}{2}
\end{aligned}
$$

となり，確かに収束する．極限値が 2 であることから

$$
-\frac{b}{2}=2 \qquad \therefore \quad b=-4
$$

ゆえに，求める値は　$a=1,\ b=-4$　(答)

演習問題 2 − 4

周の長さが 1 である正 n 角形 $(n = 3, 4, 5, \cdots)$ に内接する円の半径を r_n，外接する円の半径を R_n とする．

(1) r_n, R_n を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n$ を求めよ．

解答・解説

(1) 正 n 角形の隣り合う 2 つの頂点を $\mathrm{A, B}$，内接円の中心を 0，線分 AB の中点を M とする．このとき，$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2\pi}{n}$ より $\angle\mathrm{AOM} = \dfrac{\pi}{n}$．ゆえに

$$\mathrm{AM} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2n}$$

従って

$$r_n = \mathrm{OM} = \frac{\mathrm{AM}}{\tan\angle\mathrm{AOM}} = \frac{1}{2n\tan\frac{\pi}{n}} \qquad \text{(答)}$$

$$R_n = \mathrm{OA} = \frac{\mathrm{AM}}{\sin\angle\mathrm{AOM}} = \frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n \to +\infty$ のとき $\dfrac{\pi}{n} \to 0$ なので

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\tan\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{(答)}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 2 − 5

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとする．このとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}$ を a, $f(a)$, $f'(a)$ で表せ．

解答・解説

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a} &= \lim_{x\to a}\frac{x^2 f(a) - a^2 f(a) + a^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x^2 - a^2) f(a) - a^2 (f(x) - f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x\to a}\left\{(x + a) f(a) - a^2 \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right\} \\
&= 2a f(a) - a^2 f'(a) \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

演習問題 2 − 6

実数全体の上で定義された 2 つの微分可能な関数 $f(x)$, $g(x)$ は次の条件を満たす.

(A) $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$

(B) $f(0) = 1$, $g(0) = 0$

このとき，次の問いに答えよ.

(1) すべての実数 x に対し，$\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 = 1$ が成り立つことを示せ.

(2) $F(x) = e^{-x}\{f(x) + g(x)\}, G(x) = e^{x}\{f(x) - g(x)\}$ とおくとき，$F(x)$, $G(x)$ を求めよ．また，$f(x)$, $g(x)$ を求めよ.

解答・解説

(1) $H(x) = \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ とする.

$$\frac{dH(x)}{dx} = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$$

ゆえに，$H(x)$ は定数関数である．また

$$H(0) = \{f(0)\}^2 - \{g(0)\}^2 = 1 - 0 = 1$$

ゆえに，$H(x) = 1$ である．〔証明終〕

(2)

$$\frac{dF(x)}{dx} = -e^{-x}\{f(x) + g(x)\} + e^{-x}\{f'(x) + g'(x)\} = 0$$

ゆえに，$F(x)$ は定数である．また

$$F(0) = f(0) + g(0) = 1$$

ゆえに，$F(x) = 1$.　　(答)

また，

$$\frac{dG(x)}{dx} = e^{x}\{f(x) - g(x)\} + e^{x}\{f'(x) - g'(x)\} = 0$$

ゆえに，$G(x)$ は定数である．また

$$G(0) = f(0) - g(0) = 1$$

であることとあわせて，$G(x) = 1$.　　(答)

ここで，$F(x) = 1$ より $f(x) + g(x) = e^{x}$.

また，$G(x) = 1$ より $f(x) - g(x) = e^{-x}$.

2 式の和，差をとることで

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (答)$$

Lecture 3 微分法とその応用 (1)

演習問題 3 − 1

1 次の関数を微分せよ．

(1) $y = \sqrt[4]{x}$ (2) $y = (x^2 + x + 2)^5$ (3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$

(4) $y = e^{2x+1}$ (5) $y = xe^{2x}$ (6) $y = \dfrac{\log x}{x}$

(7) $y = (x+1)\sin 3x$ (8) $y = \cos^3 x$ (9) $y = \tan(2x-1)$

2 関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．

3 曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = -1$ について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．x のみの式で表さなくてよい．

解答・解説

1

(1) $y = x^{\frac{1}{4}}$ より

$$y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 合成関数の微分から

$$y' = 5(x^2+x+2)^4(2x+1) \qquad \text{(答)}$$

(3) $y = (5x+1)^{-\frac{2}{3}}$ より，合成関数の微分から

$$y' = -\frac{2}{3}(5x+1)^{-\frac{5}{3}} \cdot 5 = -\frac{10}{3\sqrt[3]{(5x+1)^5}} \qquad \text{(答)}$$

(4) 合成関数の微分から

$$y' = 2e^{2x+1} \qquad \text{(答)}$$

(5) 積の微分と合成関数の微分から

$$y' = e^{2x} + xe^{2x} \cdot 2 = (2x+1)e^{2x} \qquad \text{(答)}$$

(6) 商の微分から

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \qquad \text{(答)}$$

(7) 積の微分と合成関数の微分から

$$y' = 1 \cdot \sin 3x + (x+1) \cdot 3\cos 3x = \sin 3x + 3(x+1)\cos 3x \qquad \text{(答)}$$

(8) 合成関数の微分から

$$y' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x \qquad \text{(答)}$$

(9) 合成関数の微分から

$$y' = \frac{1}{\cos^2(2x-1)} \cdot 2 = \frac{2}{\cos^2(2x-1)} \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

辺々の値は正なので，自然対数をとり

$$\log y = \frac{\log x}{x}$$

両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{\dfrac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= y \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x) \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

$\boxed{3}$

両辺を x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{2x}{4} - \frac{1}{9} \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{9x}{4y} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

演習問題 3 − 2

1　曲線 $y = e^{2x+1}$ 上の点 $(1,\, e^3)$ における接線の方程式を求めよ．

2　曲線 $y = x + e^x$ の接線のうち，原点を通るものの方程式を求めよ．

3　点 $(a,\, 0)$ を通り，曲線 $y = xe^x$ に接する直線を引くことができる a の範囲を求めよ．

解答・解説

1

$y' = 2e^{2x+1}$ より，$x = 1$ のとき $y' = 2e^3$．ゆえに，接線の方程式は

$$y - e^3 = 2e^3(x-1) \qquad \therefore \quad y = 2e^3x - e^3 \qquad (\text{答})$$

2

$y' = 1 + e^x$ より，曲線上の点 $(t,\, t+e^t)$ における接線の方程式は

$$y - (t+e^t) = (1+e^t)(x-t) \qquad \cdots①$$

すなわち，この接線が原点を通るとき

$$\begin{aligned} &0 - (t+e^t) = (1+e^t)(0-t) \\ &-t - e^t = -t - te^t \\ &(t-1)e^t = 0 \\ &t = 1 \qquad \cdots② \end{aligned}$$

すなわち，①, ② より，求める接線の方程式は

$$y - (1+e) = (1+e)(x-1) \qquad \therefore \quad y = (e+1)x \qquad (\text{答})$$

3

$y' = e^x + xe^x$ より，曲線上の点 $(t,\, te^t)$ における接線の方程式は

$$y - te^t = (e^t + te^t)(x-t)$$

この直線が点 $(a,\, 0)$ を通ることから

$$\begin{aligned} &0 - te^t = (e^t + te^t)(a-t) \\ &-te^t = e^t(1+t)(a-t) \end{aligned}$$

$e^t > 0$ より，辺々を e^t で割り

$$-t = (1+t)(a-t)$$
$$t^2 - at - a = 0 \qquad \cdots ①$$

① を t の 2 次方程式とし，その判別式を D とする．接点と接線は 1 対 1 に対応することから，求める条件は ① が実数解をもつことと同値．すなわち，$D \geqq 0$ から

$$a^2 - 4 \cdot (-a) \geqq 0$$
$$a^2 + 4a \geqq 0$$
$$a \leqq -4,\ 0 \leqq a \qquad (\text{答})$$

演習問題 3 − 3

$a,\, b$ を定数とする．$\sqrt{x^2+1}$ の導関数と $\sqrt{(x^2+1)^3}$ の第 2 次導関数を含んだ等式

$$ax\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}+b\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{(x^2+1)^3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

が x についての恒等式となるよう，$(a,\, b)$ を定めよ．

解答・解説

合成関数の微分から

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\frac{d}{dx}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

また

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{(x^2+1)^3}&=\frac{d}{dx}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\sqrt{x^2+1}\\ \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{(x^2+1)^3}&=3\frac{d}{dx}x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\\ &=3\left\{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}+x\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right\}\\ &=\frac{3(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

すなわち，与えられた等式は

$$\begin{aligned}\frac{ax^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{3b(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}&=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\\ (a+6b)x^2+(3b-1)=0&\qquad\cdots①\end{aligned}$$

① が任意の実数 x で成り立つ条件は

$$\Big(a+6b=0\quad\wedge\quad 3b-1=0\Big)\qquad\Longleftrightarrow\qquad(a,\, b)=\left(-2,\, \frac{1}{3}\right)\qquad(\text{答})$$

演習問題 3 − 4

関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ とする．$f(x) = e^x \cos x$ のとき

$$f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n}{4}\pi\right)$$

であることを，数学的帰納法により証明せよ．

解答・解説

I）$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x) \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= \sqrt{2} e^x \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

ゆえに，$n = 1$ で成立する．

II）$f^{(k)}(x) = 2^{\frac{k}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{k}{4}\pi\right)$ とする．このとき

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \\ &= (\sqrt{2})^k \left\{ e^x \cos\left(x + \frac{k}{4}\pi\right) - e^x \sin\left(x + \frac{k}{4}\pi\right) \right\} \\ &= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \left\{ \cos\left(x + \frac{k}{4}\pi\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\left(x + \frac{k}{4}\pi\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \cos\left(x + \frac{k+1}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

ゆえに，$n = k$ での成立を仮定すれば，$n = k + 1$ でも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n についての成立を示した．　〔証明終〕

演習問題 3 − 5

曲線 $y = x^2 - 2x$ と $y = \log x + a$ が共有点をもち，かつ，その点で接線を共有するときの a を求めよ．また，そのときの接線の方程式を求めよ．

解答・解説

真数についての条件から，$x > 0$ とする．また，$f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \log x + a$ とする．

$$f'(x) = 2x - 2, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ここで，2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が $x = t$（ただし，$t > 0$）で接線を共有するとすれば

$$f(t) = g(t), \quad f'(t) = g'(t)$$

すなわち

$$t^2 - 2t = \log t + a \quad \cdots ① \qquad 2t - 2 = \frac{1}{t} \quad \cdots ②$$

ここで，② より

$$2t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \qquad (t > 0)$$

ゆえに，① より

$$a = t^2 - 2t - \log t = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \log(\sqrt{3} - 1) \qquad \text{(答)}$$

また，このとき，接点の y 座標は

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，接線の傾きは

$$g'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$$

すなわち，接線の方程式は

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sqrt{3} - 1)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \therefore \quad y = (\sqrt{3} - 1)x - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 3 − 6

関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $y=f(x)$ の極値とそのグラフの変曲点を求めて，グラフの概形をかけ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}\,(a,\,f(a))$ における接線の方程式を求めよ．

(4) $a\neq 0$ のとき，点 $(a,\,0)$ を B とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\,f(a))$ における接線が x 軸と交わる点を C とする．$\mathrm{BC}=2\mathrm{OB}$ であるとき，a の値を求めよ．ただし，O は原点を表す．

解答・解説

(1) $f'(x)=-\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ 　　(答)

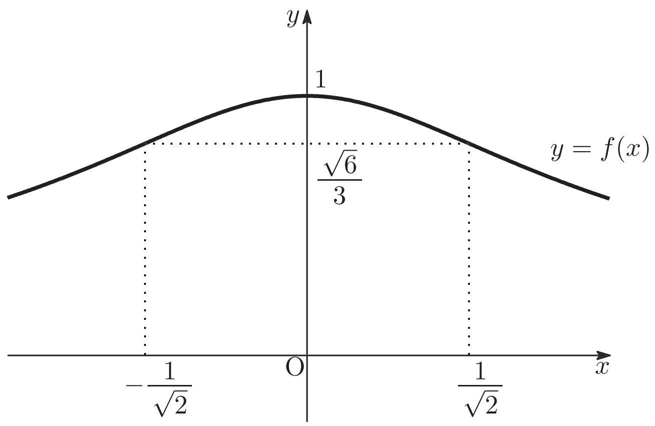
(2) $f''(x)=\dfrac{2x^2-1}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^2}}$ である．すなわち，$f(x)$ の増減，凹凸は次の通り．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	⤴	1	⤵	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	⤵

また

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

であることから，$y=0$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である．
以上より，曲線 $y=f(x)$ の概形は次の図の通り．



(答)

(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \qquad \therefore \quad y = -\frac{a}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}}x + \frac{2a^2+1}{(1+a^2)\sqrt{1+a^2}} \qquad \text{(答)}$$

(4) (3) で求めた接線の式について，$y=0$ として

$$-ax + 2a^2 + 1 = 0 \qquad \therefore ax = 2a^2+1$$

$a \neq 0$ より

$$x = 2a + \frac{1}{a}$$

すなわち，$\mathrm{C}\left(2a+\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ であることから

$$\mathrm{BC} = \left|2a + \frac{1}{a} - a\right| = \left|a + \frac{1}{a}\right|, \quad \mathrm{OB} = |a|$$

である．

$a>0$ のとき　　$a + \dfrac{1}{a} = 2a$ と $a>0$ から，$a=1$.

$a<0$ のとき　　$-a - \dfrac{1}{a} = -2a$ と $a<0$ から，$a=-1$.

以上より，$a = \pm 1$　　(答)

Lecture 4　微分法とその応用 (2)

演習問題 4 − 1

次の関数について，増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフの概形を描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は必要があれば証明なしに用いてよい．

(1) $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$　　　(2) $y=xe^x$

解答・解説

(1)　$y=f(x)$ とする．

$$f(x)=x+\frac{4}{x-1}$$

$$f'(x)=1-\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-2^2}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{8}{(x-1)^3}$$

ゆえに，$f(x)$ の増減，凹凸は次の表の通り．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	5	$\nearrow$

ここで

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

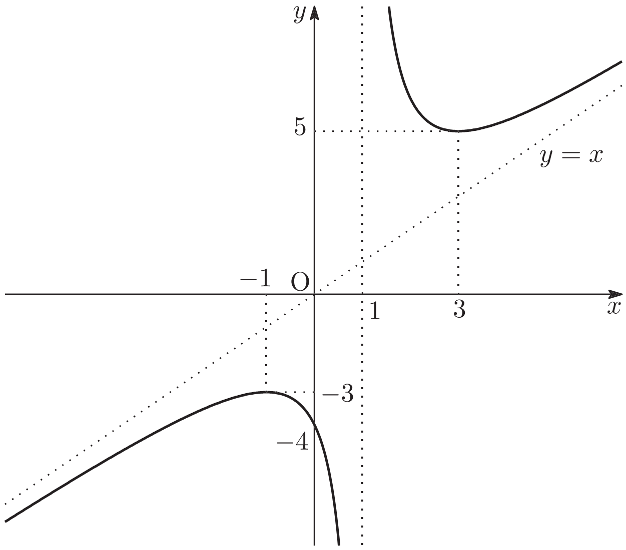
であり

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}f(x)=+\infty$$

より，$x=1$ はこの曲線の漸近線である．また

$$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=0$$

より，$y=x$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である．
以上より，グラフの概形は下図．



(答)

(2) $y = f(x)$ とする．定義域は実数全体．

$$y' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$y'' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

ゆえに，$f(x)$ の増減，凹凸は次の通り．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{2}{e^2}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$

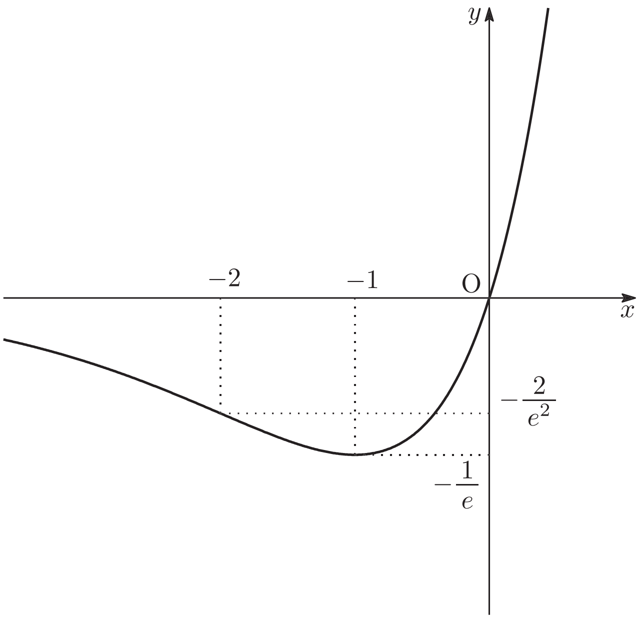
また，$x = -t$ とおくと

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to \infty} (-te^{-t}) = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{t}{e^t} \right) = 0$$

ゆえに，$y = 0$ はこの曲線の漸近線である，また

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

以上より，$y = f(x)$ のグラフは下図のようになる．



(答)

演習問題 4 − 2

a を 0 以上の実数定数とする．曲線 $y = e^{-2x}$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ e^{-2a})$ での接線 l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ B, C とおく．次の問いに答えよ．

(1) 原点を O とするとき，△ OBC の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ の最大値およびそのときの a の値を求めよ．

解答・解説

(1) $y' = -2e^{-2x}$ より

$$l : y = -2e^{-2a}(x-a) + e^{-2a} = -2e^{-2a}x + (1+2a)e^{-2a}$$

よって

$$\mathrm{B}\left(\frac{1+2a}{2},\ 0\right), \quad \mathrm{C}(0,\ (1+2a)e^{-2a})$$

$a \geqq 0$ より

$$S(a) = \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2a}{2}(1+2a)e^{-2a} = \frac{(1+2a)^2}{4e^{2a}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $S(a) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+2a}{e^a}\right)^2$ より，$f(a) = \dfrac{1+2a}{e^a}$ とする．

$$f'(a) = \frac{2e^a - (1+2a)e^a}{e^{2a}} = \frac{1+2a}{e^a}$$

より，増減は次の通り．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$+$	0	$-$
$f(a)$	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

すなわち，$f(a)$ は $a = \dfrac{1}{2}$ で最大値をとる．

よって，$S(a)$ は $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる． (答)

注意 4.1

$S(a)$ を a で微分しても，最小値は得られる．

$$\begin{aligned}
S'(a) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{\{(1+2a)^2\}'e^{2a}-(1+2a)^2(e^{2a})'}{(e^{2a})^2}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot 2(1+2a)e^{2a}-2(1+2a)^2e^{2a}}{e^{4a}}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{2(1+2a)e^{2a}\{2-(2a+1)\}}{e^{4a}}\\
&= \frac{(1+2a)(1-2a)}{2e^{2a}}
\end{aligned}$$

ゆえに，$S(a)$ の増減表は次の通り．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる．　　(答)

演習問題 4 − 3

関数 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \{f(x) - x\}$ を求めよ．

(2) 増減，凹凸，漸近線を調べたうえで，曲線 $y = f(x)$ の概形を xy 平面に図示せよ．

解答・解説

(1)

$$\lim_{x\to+\infty} \{f(x) - x\} = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

ここで，$x \to +\infty$ のとき $\dfrac{1}{x} \to 0$ なので

$$\lim_{x\to+\infty} \{f(x) - x\} = 1 \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$$

ゆえに，増減，凹凸は次の表の通り．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	$\times$	↘	e	↗

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

であり，(1) より

$$\lim_{x\to\infty} \{f(x) - (x+1)\} = 0$$

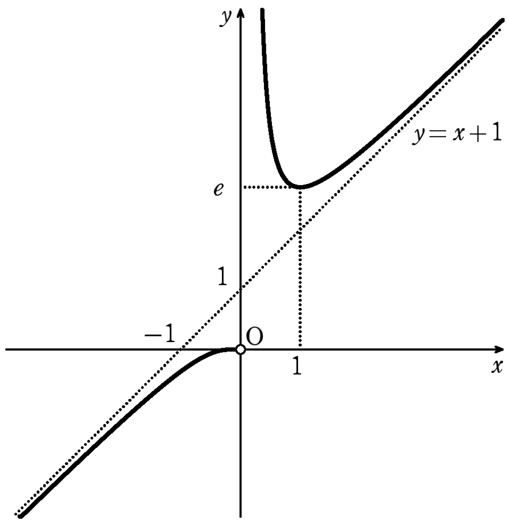
であり，$x \to -\infty$ でも同様に

$$\lim_{x\to-\infty} \{f(x) - (x+1)\} = 0$$

が導かれる．すなわち，$y = x + 1$ はこの曲線の漸近線である．
また，$x \to -0$ について，$x = -\dfrac{1}{t}$ とおくことで，$t \to \infty$ であり

$$\lim_{x \to -0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} \frac{-e^{-t}}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{-1}{te^t} = 0$$

である．以上より，$y = f(x)$ のグラフの概形は次の通り．

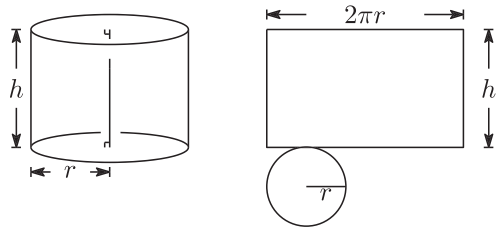


(答)

演習問題 4 − 4

ふたのない円筒形の容器を考える．その底面と側面の面積の和を一定にして，容積を最大にするには，底面の半径と高さの比をどのようにとればよいか．

解答・解説



底面の半径を r，高さを h，底面と側面の面積の和を S，容積を V とする．

$$S = \pi r^2 + 2\pi rh, \quad \cdots (*)$$
$$V = \pi r^2 h \quad \cdots (\#)$$

であり，S が一定であるときの，V の最大値を与える r と h の関係を求める．

まず，$r > 0$，$h > 0$ であるから，$(*)$ より

$$2\pi rh = S - \pi r^2 > 0. \qquad \therefore \quad 0 < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \quad \cdots ①$$

このもとで，再び $(*)$ より

$$\pi rh = -\frac{\pi}{2}r^2 + \frac{S}{2}.$$

これを $(\#)$ に代入すると

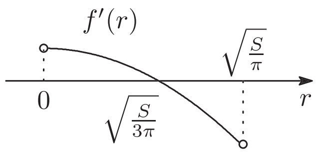
$$V = r\left(-\frac{\pi}{2}r^2 + \frac{S}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}r^3 + \frac{S}{2}r.$$

ここで

$$f(r) = -\frac{\pi}{2}r^3 + \frac{S}{2}r \quad \left(0 < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$$

とおくと，

$$f'(r) = -\frac{3}{2}\pi r^2 + \frac{S}{2}$$
$$= -\frac{3}{2}\pi\left(r - \sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right)\left(r + \sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right)$$



右図と

$$f(0) = f\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right) = 0$$

から，下表を得る．

r	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$	$\cdots$	$\left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$
f'		$+$	0	$-$	
f	(0)	$\nearrow$	max.	$\searrow$	(0)

すなわち $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ で $f(r)$ は最大値をとる．このとき $(*)$ に $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ を代入すると

$$\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right)^2+2\pi\left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right)h=S \qquad \therefore\quad h=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$

以上より，求める比は

$$r:h=1:1. \qquad \text{(答)}$$

演習問題 4 − 5

$\angle\mathrm{B} = 2\angle\mathrm{A}$，BC=1 であるような三角形 ABC のうち，面積が最大となるものの辺 AB の長さを求めよ．

解答・解説

$\angle\mathrm{A} = \theta$, $\angle\mathrm{B} = 2\theta$ とおくと，正弦定理より

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin 2\theta} \qquad \therefore \quad \mathrm{AC} = 2\cos\theta$$

また，$\angle\mathrm{C} = \pi - 3\theta$ なので，$\theta < \pi - 3\theta < \pi$ から $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ である．ここで，三角形 ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}\sin(\pi - 3\theta) = \cos\theta\sin 3\theta$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\frac{dS}{d\theta} &= -\sin\theta\sin 3\theta + 3\cos\theta\cos 3\theta \\ &= -\sin\theta(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) + 3\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= 16\cos^4\theta - 14\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

ここで，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ より，$\dfrac{dS}{d\theta} = 0$ となるのは

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{7+\sqrt{33}}}{4}$$

のときに限られる．この θ を α とすると，$\theta = \alpha$ のとき，S は極大かつ最大となる．このときの AB の長さは，正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\alpha} &= \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\pi - 3\alpha)} \\ \therefore \quad \mathrm{AB} &= \frac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} \\ &= 3 - 4\sin^2\alpha \\ &= 3 - 4(1 - \cos^2\alpha) \\ &= 4\cos^2\alpha - 1 \\ &= \frac{3+\sqrt{33}}{4} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

演習問題 4 − 6

数列 $\{a_n\}$ が $a_n = \sqrt[n]{n}$ で与えられる．このとき，a_n の最大値を求めよ．

解答・解説

連続関数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$ について，辺々の値は正である．ゆえに，これらを真数とする自然対数をとると

$$\log f(x) = \frac{1}{x}\log x$$

辺々，x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\\ \therefore \frac{df(x)}{dx} &= \frac{f(x)}{x^2}(1-\log x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)\end{aligned}$$

ゆえに，$x = e$ で極大値をとる．$x > 0$ での最大値は，$f(e) = e^{\frac{1}{e}}$．すなわち，定義域を自然数とすれば

$$f(1) < f(2), \quad f(3) > f(4) > f(5) > \cdots\cdots$$

が成り立つことから，a_n の最大値については $f(2)$，$f(3)$ を比較すれば十分である．

$$f(2) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},\ f(3) = 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3}$$

ここで

$$\left(\sqrt{2}\right)^6 = 2^3 = 8, \quad \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$$

ゆえに

$$f(2) < f(3) \qquad \therefore \quad a_2 < a_3$$

すなわち，求める最大値は

$$a_3 = \sqrt[3]{3} \qquad (\text{答})$$

Lecture 5　微分法とその応用 (3)

演習問題 $5-1$

k を実数定数とする．方程式 $e^x = k\sin x$ が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において実数解を持たないような定数 k の値の範囲を求めよ．

解答・解説

$x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ のとき，等号は成り立たない．以下，$x \neq 0,\ \pi,\ 2\pi$ とする．

$$k = \frac{e^x}{\sin x}$$

とする．右辺を $f(x)$ とする．与方程式の実数解と，直線 $y = k$，曲線 $y = f(x)$ の共有点の x 座標は一致する．

$$f'(x) = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

ゆえに，増減は次の通り．

r	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}$	$\searrow$	$\times$

また

$$\lim_{x \to +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2\pi-0} f(x) = -\infty$$

である．従って，求める範囲は

$$-\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi} < k < \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

演習問題 $5-2$

次の問にそれぞれ答えよ．

(1) $x>0$ で $\sqrt{x}>\log x$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\sin x+\cos x \geqq 1+x-x^2$ が任意の実数 x で成り立つことを示せ．

解答・解説

(1) $f(x)=\sqrt{x}-\log x \quad (x>0)$ とする．

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

ゆえに，$x=4$ で $f(x)$ は極小かつ最小である．

$$f(x) \geqq f(4)=2-2\log 2=2(1-\log 2)>0$$

ゆえに，$\sqrt{x}>\log x$ は成り立つ．　〔証明終〕

(2) $f(x)=\sin x+\cos x-(1+x-x^2)$ とする．

$$f'(x)=\cos x-\sin x-1+2x$$
$$f''(x)=-\sin x-\cos x+2=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2>0$$

ゆえに，実数全体で $f'(x)$ は単調に増加する．ここで

$$f'(0)=\cos 0-\sin 0-1+2\cdot 0=1-1=0$$

ゆえに，$f(x)$ の増減は次の通り．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

すなわち

$$f(x) \geqq f(0)=1-1=0$$

ゆえに，$\sin x+\cos x \geqq 1+x-x^2$ は成り立つ．　〔証明終〕

演習問題 5 − 3

方程式 $e^x = ax + b$ が実数解をもつような a, b の満たす条件を求め，点 (a, b) の存在範囲を ab 平面上に図示せよ．ただし，$\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ とする．

解答・解説

$f(x) = e^x - ax - b$ とする．

$$f'(x) = e^x - a$$

ゆえに

(a) $a < 0$ のとき
$f'(x) > 0$ より，$f(x)$ は実数全体で単調に増加する．また

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

より，任意の実数 b に対し，$f(x) = 0$ は実数解をただ 1 つ持つ．

(b) $a = 0$ のとき
$e^x > 0$ より，$e^x - b = 0$ すなわち $e^x = b$ は $b > 0$ のときただ 1 つの実数解をもち，$b \leqq 0$ のとき実数解を持たない．

(c) $a > 0$ のとき
$e^x = a$ すなわち $x = \log a$ で $f'(x)$ の符号が変化する．$f(x)$ の増減は次の通り．

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(\log a)$	$\nearrow$

また

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

ゆえに，実数解を持つ必要十分条件は

$$f(\log a) = a - a \log a - b \leqq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b \geqq a - a \log a$$

したがって，求める条件は

$$\begin{cases} b \geqq a - a \log a & (a > 0) \\ b > 0 & (a = 0) \\ b \text{ は任意} & (a < 0) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

である．ここで，$g(a) = a - a \log a$ とするとき

$$g'(a) = 1 - (\log a + 1) = -\log a$$

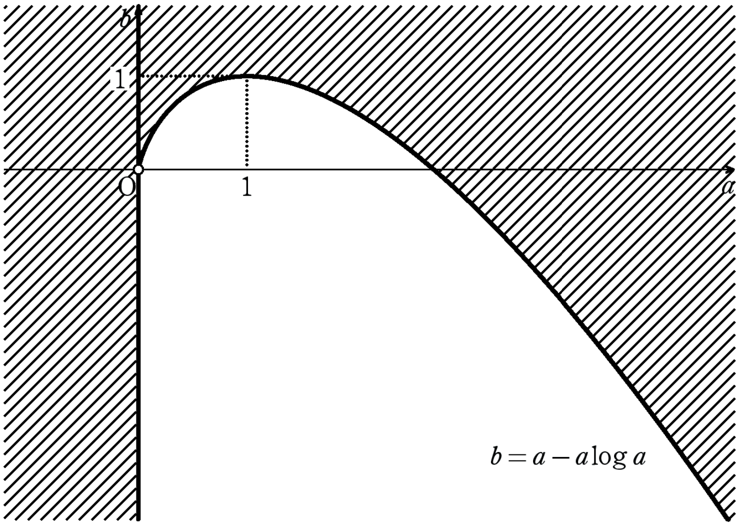
である．また，

$$\lim_{a\to+0} g(a)=0, \quad \lim_{a\to+\infty} g(a)=-\infty$$

以上より，$g(a)$ の $a>0$ における増減は次の通り．

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	$(-\infty)$

$(a,\,b)$ の存在範囲を ab 平面に図示すると，下図の通り．ただし，境界は $a=0$ かつ $b \leqq 0$ は含まず，他は含む．



(答)

演習問題 5 − 4

$0 < x < \pi$ で常に $p\sin x \leqq \dfrac{1}{1-\cos x}$ を満たす p の最大値を求めよ．

解答・解説

$0 < x < \pi$ で $\sin x > 0$ であることから，示す不等式と

$$p \leqq \frac{1}{\sin x(1-\cos x)} \qquad \cdots ①$$

は同値．

ここで，$f(x) = \sin x(1-\cos x)$ とおくと

$$f'(x) = \cos x(1-\cos x) + \sin x \cdot \sin x = (1-\cos x)(1+2\cos x)$$

$0 < x < \pi$ で $1-\cos x > 0$ であることから，$f'(x)$ の符号と $1+2\cos x$ の符号は一致する．
すなわち，$f(x)$ の増減は次の通り．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	(0)

ゆえに，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ であり，① の右辺を $g(x)$ とするとき $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ から，$g(x)$ の最小値は $\dfrac{4}{3\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ である．

従って，p の最大値は $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ (答)

演習問題 5 − 5

関数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ について，次の問に答えよ.

(1) 関数 $f(x)$ の増減，極値を調べて，曲線 $y=f(x)$ の概形を描け.

(2) 点 $(a,0)$ から，曲線 $y=f(x)$ への接線を 3 本引くことができるような a の値の範囲を求めよ.

解答・解説

(1) 定義域は実数全体.

$$f'(x)=-\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$$

ゆえに，$f(x)$ の増減は次の通り.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

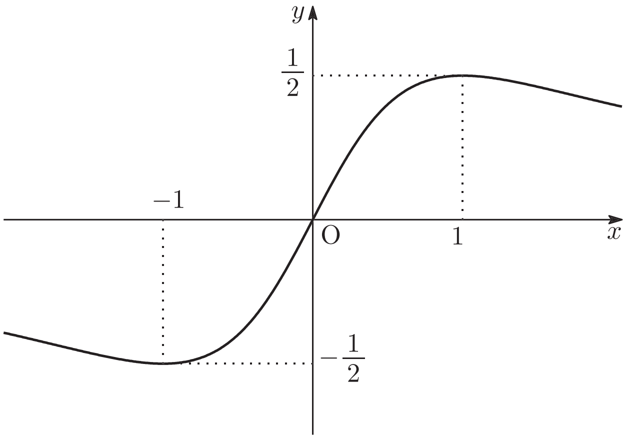
極大値は $f(1)=\dfrac{1}{2}$，極小値は $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$　　(答)

また

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

より，$y=0$ は曲線 $y=f(x)$ の漸近線である.

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図の通り.



(答)

(2) 点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{t}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}(x-t)$$

この直線が点 $(a,\ 0)$ を通ることから

$$0-\frac{t}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}(a-t)$$
$$t(1+t^2)+(1-t^2)(a-t)=0$$
$$(t^2-1)a=2t^3$$

接点と接線は 1 対 1 に対応することから，この t の方程式が異なる 3 つの実数解をもつ a の範囲が求めるものである．$t=\pm 1$ は解ではないことから，$t^2-1\neq 0$ より

$$a=\frac{2t^3}{t^2-1} \qquad \cdots ①$$

① の右辺を $g(t)$ とする．直線 $y=a$，曲線 $y=g(t)$ が異なる 3 つの共有点をもつ a の範囲が求めるものである．

$$g(-t)=\frac{2(-t)^3}{(-t)^2-1}=-\frac{2t^3}{t^2-1}=-g(t)$$

より，$y=g(t)$ は原点に関して対称である．ゆえに，$t\geqq 0$ についてのみ調べる．

$$g'(t)=2\cdot\frac{3t^2(t^2-1)-t^3\cdot 2t}{(t^2-1)^2}=\frac{2t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}$$

であることから，$g(t)$ の増減は次の通り．

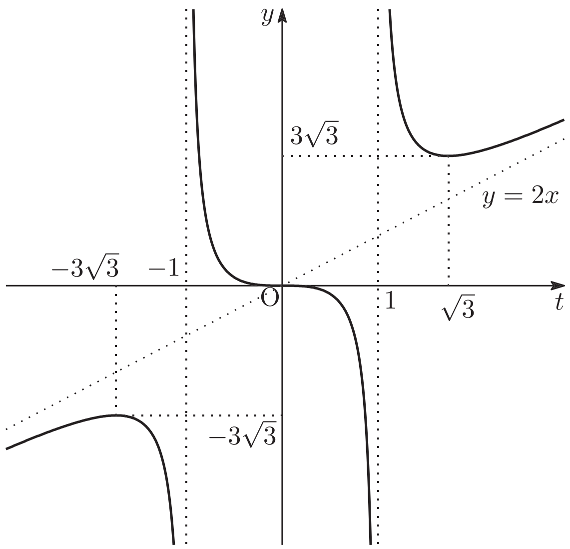
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$

また

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$$

である．

$y = g(t)$ の原点に対する対称性とあわせ，$y = g(t)$ のグラフは次の通り．



グラフより，求める範囲は　$a < -3\sqrt{3},\ 3\sqrt{3} < a$　　(答)

演習問題 5 − 6

次の各問いに答えよ．

(1) $x>0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)$ を求めよ．

解答・解説

(1) $f(x)=x-\log(1+x)\quad(x>0)$ とおく．

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{x+1}>0$$

ゆえに，$f(x)$ は $x>0$ で単調に増加する．したがって

$$f(x)>f(0)=0$$

よって，$x>\log(1+x)$ は成り立つ．
また，$x>0$ で $g(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ とおくと

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{x+1}>0$$

ゆえに，$g(x)$ は $x>0$ で単調に増加する．したがって

$$g(x)>g(0)=0$$

よって，$\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ は成り立つ．
以上より示した．　〔証明終〕

(2) $n\to\infty$ より $n\geqq 2$ としてよい．ここで

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

とおくと

$$\log a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

である．ここで，(1) の不等式について，$x=\dfrac{k}{n^2}\ (>0)$ と置き換えると

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}<\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2}$$

$k = 1, 2, 3, \cdots, n-1$ で，辺々和をとると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) < \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n^2}$$

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} - \frac{1}{2n^4}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} < \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12n}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(2 - \frac{1}{n}\right) < \sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) < \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12n}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

ゆえに，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$$

従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n = \frac{1}{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \qquad (\text{答})$$

添削課題 5 − 1

$x > 0$ で不等式 $ax + b \geqq \log x$ がつねに成り立つような実数 a, b の条件を求めよ．また，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ．

解答・解説

$f(x) = ax + b - \log x \quad (x > 0)$ とおく．

$$f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$$

(a) $a \leqq 0$ のとき

$f'(x) < 0$ より，$f(x)$ は $x > 0$ で単調に減少する．また

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

ゆえに，任意の正の実数 x で $f(x) \geqq 0$ が成り立つことはない．

(b) $a > 0$ のとき

$f(x)$ の増減は次の通り．

r	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$	$\nearrow$

ここで

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + b + \log a$$

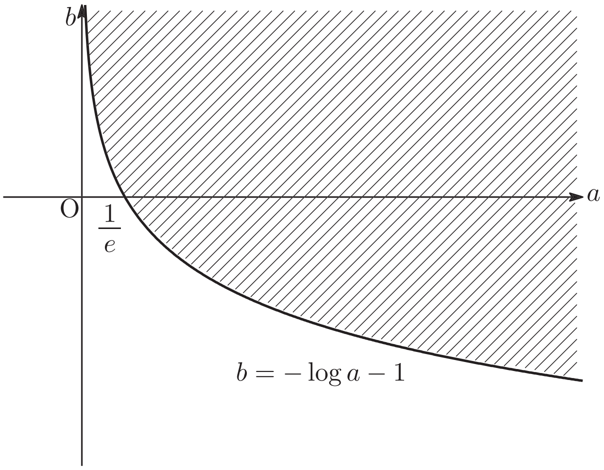
ゆえに，任意の正の実数 x で $f(x) \geqq 0$ が成り立つ条件は

$$1 + b + \log a \geqq 0 \qquad \therefore \quad b \geqq -\log a - 1$$

以上，(a), (b) より，求める条件は

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b \geqq -\log a - 1$$

であり，図示すると下図の斜線部．ただし，境界を含む．



(答)

M2JD

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	