M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

問題

【1】$2x+3y=17n$ (x，y，n は整数) とおくと，

$$9x+5y=9x+\frac{5(17n-2x)}{3}=\frac{17(5n+x)}{3}$$

ここで，左辺は整数であるから，$5n+x$ は 3 の倍数であり，よって $9x+5y$ は 17 の倍数である．

逆に，$9x+5y=17m$ (x，y，m は整数) とおくと，

$$2x+3y=2x+\frac{3(17m-9x)}{5}=\frac{17(3m-x)}{5}$$

であるから，$3m-x$ は 5 の倍数であり，整数 $2x+3y$ は 17 の倍数である．

よって，題意は証明された．　　〔証明終〕

＜別解＞

合同式を用いて，整数 A が 17 で割り切れることを

$$A\equiv 0 \pmod{17}$$

と表す．すると証明すべきことは，任意に固定された y に対して，

$$2x_1+3y\equiv 0,\quad 9x_2+5y\equiv 0 \pmod{17} \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす x_1 の集合と x_2 の集合とが一致することであるが，

$$\begin{aligned}
① \iff& 5(2x_1+3y)\equiv 0,\quad 3(9x_2+5y)\equiv 0 \pmod{17}\\
\iff& 10x_1+15y\equiv 0,\quad 17x_2+10x_2+15y\equiv 0 \pmod{17}\\
\iff& 10x_1+15y\equiv 0,\quad 10x_2+15y\equiv 0 \pmod{17}
\end{aligned}$$

であるから，証明すべきことは自明である．　　〔証明終〕

【2】p が 2 より大きい素数 (奇素数) であることに注意すると，

　　d を $2p$ で割った余りが 1

$\iff$ $d-1$ が $2p$ で割り切れる

$\iff$ $d-1$ が 2 で割り切れ，かつ，p でも割り切れる　　$\cdots\cdots$①

そこで，①が成り立つことを示せばよい．

題意より，

$$d=a^p-b^p=(a-b)(a^{p-1}+a^{p-2}b+\cdots\cdots+b^{p-1}) \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで，$a>b\geqq 1$，$p>2$ より，明らかに

$$a^{p-1}+a^{p-2}b+\cdots\cdots+b^{p-1}>1$$

が成り立ち，かつ，d は素数であるから，②より，

$$a-b=1 \qquad \therefore\quad a=b+1$$

これを②に代入して，

$$\begin{aligned}
d&=(b+1)^p-b^p\\
&=(b^p+{}_p\mathrm{C}_1b^{p-1}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}b+1)-b^p \qquad (\because\ \text{二項定理})\\
&={}_p\mathrm{C}_1b^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2b^{p-2}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}b+1 \qquad \cdots\cdots ③
\end{aligned}$$

この式より，明らかに d は 2 より大きい．このことと d が素数であることから，d は奇数なので，

「$d-1$ は 2 で割り切れる」　　$\cdots\cdots$④

一方，③より，

$$d-1={}_p\mathrm{C}_1b^{p-1}+{}_p\mathrm{C}_2b^{p-2}+\cdots\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-1}b \qquad \cdots\cdots⑤$$

ここで，$1\leqq k\leqq p-1$ をみたす任意の整数 k に対して，

$$ {}_p\mathrm{C}_k=\frac{p!}{(p-k)!k!} \iff {}_p\mathrm{C}_k\cdot(p-k)!k!=p!$$

が成り立つが，p は素数であり，$(p-k)!$，$k!$ は p で割り切れないから，

$$ {}_p\mathrm{C}_k \qquad (1\leqq k\leqq p-1)$$

は (k によらず) p で割り切れる．よって，⑤より，

「$d-1$ は p で割り切れる」　　$\cdots\cdots$⑥

したがって，④, ⑥より，①が成り立つ．よって，題意が示された．　　〔証明終〕

【3】 x，y が奇数のとき，$x=2m+1$，$y=2n+1$ (m，n は整数) とおけ，このとき，

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=4(m+n+1)(m-n) \qquad \cdots\cdots①$$

ここで，

m と n の偶奇が一致するときは，$m-n$ が偶数

m と n の偶奇が異なるときは，$m+n+1$ が偶数

であるから，いずれの場合も①は 8 の倍数である．

よって，$x^2-y^2=k$ をみたす奇数 x，y が存在するならば，k は 8 の倍数である．

これより，方程式 $x^2-y^2=k$ が奇数解をもつための必要条件は「k が 8 の倍数であること」である．これが十分条件でもあることを示す．

k が 8 の倍数であるとき，$k=8l$ (l は整数) とおくと，

$$x^2-y^2=k \iff (x+y)(x-y)=8l \qquad \cdots\cdots②$$

ここで，$x+y=4l$，$x-y=2$ とすれば②がみたされ，このとき，

$$x=2l+1,\quad y=2l-1$$

となるから，x，y は奇数となる．

したがって，任意の 8 の倍数 k に対して，$x^2-y^2=k$ をみたす奇数 x，y が存在することが分かり，求める必要十分条件は

k が 8 の倍数であること　　(答)

となる．

＜別解＞

次のように変形して必要条件を導くこともできる．

$$x^2-y^2=4(m^2-n^2+m-n)=4\{m(m+1)-n(n+1)\} \qquad \cdots\cdots①'$$

となり，$m(m+1)$，$n(n+1)$ はそれぞれ連続 2 整数の積であるから偶数である．

したがって，①′ は 8 の倍数である．

【4】(1) $p+q\sqrt{2}=-r\sqrt{3}$ より

$$(p+q\sqrt{2})^2=(-r\sqrt{3})^2$$

$$\iff \quad p^2+2q^2+2pq\sqrt{2}=3r^2$$

$$\iff \quad 2pq\sqrt{2}=3r^2-p^2-2q^2$$

ここで，$pq \neq 0$ と仮定すると，

$$\sqrt{2}=\frac{3r^2-p^2-2q^2}{2pq}$$

これは，左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾するので，

$pq=0 \quad \cdots\cdots ①$

$\therefore \quad 3r^2-p^2-2q^2=0 \quad \cdots\cdots ②$

また，① より $p=0$ または $q=0$ である．

▼ $p=0$ のとき

② より

$3r^2=2q^2 \qquad \therefore \quad \sqrt{3}r=\pm\sqrt{2}q$

両辺に $\sqrt{2}$ をかけて

$\sqrt{6}r=\pm 2q \quad \cdots\cdots ③$

同様に $r \neq 0$ とすると，矛盾するから $r=0$ であり ③ より $q=0$ となる．

▼ $q=0$ のとき

② より

$3r^2=p^2 \qquad \therefore \quad \sqrt{3}r=\pm p \quad \cdots\cdots ④$

同様に $r=0$ であり，④ より $p=0$ となる．

よって，$p=q=r=0$ である． 〔証明終〕

(2) $f(1)=\alpha,\ f(1+\sqrt{2})=\beta,\ f(\sqrt{3})=\gamma$ として

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ がすべて有理数である $\quad \cdots\cdots (*)$

と仮定する．ここで，

$f(1)=1+a+b=\alpha \quad \cdots\cdots ⑤$

$f(1+\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}+a(1+\sqrt{2})+b=\beta \quad \cdots\cdots ⑥$

$f(\sqrt{3})=3+a\sqrt{3}+b=\gamma \quad \cdots\cdots ⑦$

であり，⑥ − ⑤ より

$2+2\sqrt{2}+a\sqrt{2}=\beta-\alpha \quad \cdots\cdots ⑧$

⑦ − ⑤ より

$2+a(\sqrt{3}-1)=\gamma-\alpha \quad \cdots\cdots ⑨$

で，⑧ $\times (\sqrt{3}-1)$ − ⑨ $\times \sqrt{2}$ より，

$$(2+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)-2\sqrt{2}=(\beta-\alpha)(\sqrt{3}-1)-(\gamma-\alpha)\sqrt{2}$$

これより，

$$(\alpha-\beta+2)+(\alpha-\gamma+4)\sqrt{2}+(\beta-\alpha-2)\sqrt{3}-2\sqrt{6}=0$$

ここで，$s=\alpha-\beta+2,\ t=\alpha-\gamma+4,\ u=\beta-\alpha-2$ とすると

$s,\ t,\ u$ は有理数 $\quad \cdots\cdots (**)$

で

$$s+t\sqrt{2}+u\sqrt{3}-2\sqrt{6}=0 \quad \cdots\cdots ⑩$$

⑩ に $\sqrt{2}$ をかけて，

$$s\sqrt{2}+2t+u\sqrt{6}-4\sqrt{3}=0$$

$$\therefore \quad 2t+s\sqrt{2}-4\sqrt{3}+u\sqrt{6}=0 \quad \cdots\cdots ⑪$$

⑩ $\times u +$ ⑪ $\times 2$ より，

$$(su+4t)+(2s+tu)\sqrt{2}+(u^2-8)\sqrt{3}=0$$

(1) より，

$$\begin{cases} su+4t=0 \\ 2s+tu=0 \\ u^2-8=0 \end{cases}$$

これより

$$u=\pm 2\sqrt{2}$$

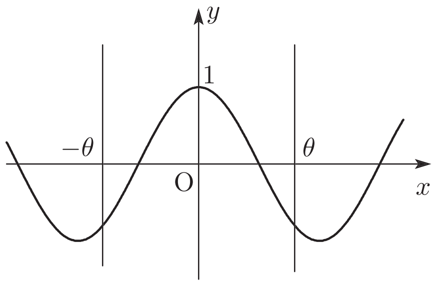
となり，(∗∗) すなわち (∗) に矛盾する．

よって，題意は示された．　　〔証明終〕

【5】明らかに円の中心は y 軸上にある．

$\mathrm{P}:(0,\ p)$ とおくと，半径は $1-p$

また，$(\theta,\ \cos k\theta)$ と $(0,\ p)$ との距離も半径に等しいので



$$(1-p)^2=\theta^2+(\cos k\theta-p)^2$$

$$1-2p=\theta^2+\cos^2 k\theta-2p\cos k\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad p=\frac{\theta^2+\cos^2 k\theta-1}{2(\cos k\theta-1)} &= \frac{\theta^2}{2(\cos k\theta-1)}+\frac{1}{2}(\cos k\theta+1) \\ &= \frac{\theta^2(\cos k\theta+1)}{2(\cos^2 k\theta-1)}+\frac{1}{2}(\cos k\theta+1) \\ &= \frac{1}{2}(\cos k\theta+1)\left(-\frac{\theta^2}{\sin^2 k\theta}+1\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cos k\theta+1)\left(-\frac{(k\theta)^2}{\sin^2 k\theta}\cdot\frac{1}{k^2}+1\right)\end{aligned}$$

$\theta\to 0$ のとき

$$p\to\frac{2\times\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)}{2}=1-\frac{1}{k^2}$$

$\therefore$ 　P は点 $\left(\mathbf{0},\ \ \mathbf{1-\dfrac{1}{k^2}}\right)$ に近づく．　　(答)

【6】

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ (n-1)^3 x_n = n^3 x_{n-1} - an^2(n-1)^2 \qquad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

(1)

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= \frac{x_n}{n^3} - \frac{x_{n-1}}{(n-1)^3} \\ &= \frac{(n-1)^3 x_n - n^3 x_{n-1}}{n^3(n-1)^3} \\ &= \frac{-an^2(n-1)^2}{n^3(n-1)^3} \qquad (\because\ ①) \\ &= -\boldsymbol{\frac{a}{n(n-1)}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) (1) より，$n \geqq 2$ に対して，

$$y_n - y_{n-1} = -\frac{a}{n(n-1)} = a\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

となるから，2〜n まで和をとると，

$$\sum_{k=2}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n} a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$$

$$\therefore\quad y_n - y_1 = a\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

これは $n=1$ でも成立する．ここで，$y_1 = \dfrac{x_1}{1^3} = \dfrac{1}{3}$ であるから，

$$\boldsymbol{y_n = a\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{3} \qquad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left\{a\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{3}\right\} = -a + \frac{1}{3} = 0$$

より，

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

また，このとき，

$$x_n = n^3 y_n = n^3\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1}{3}\right\} = \frac{n^2}{3}$$

となるので，

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}x_n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$$

よって，n の偶奇で場合分けして考えてみると，

$n = 2m (m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき，

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \sin m^2\pi = 0$$

$n = 2m+1 (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき，

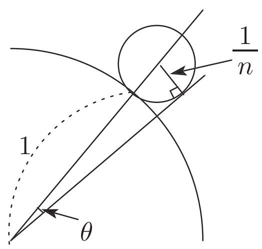
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \sin\left\{m(m+1) + \frac{1}{4}\right\}\pi = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{n^2}{4}\pi = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【7】 右のように θ をとると,



$$\sin\theta=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}$$

よって,

$$n=\frac{1-\sin\theta}{\sin\theta} \qquad \cdots\cdots①$$

であり,

$$2\theta a_n \leqq 2\pi < 2\theta(a_n+1)$$

だから,

$$\frac{\pi-\theta}{n\theta}<\frac{a_n}{n}\leqq\frac{\pi}{n\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{\pi-\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}<\frac{a_n}{n}\leqq\frac{\pi}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta} \qquad (\because\ ①)$$

$n\to\infty$ のとき, $\theta\to 0$ であり,

$$\lim_{\theta\to 0}(\pi-\theta)\cdot\frac{1}{1-\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=\pi$$

$$\lim_{\theta\to 0}\pi\cdot\frac{1}{1-\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}=\pi$$

だから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\boldsymbol{\pi} \qquad \text{(答)}$$

【8】 放物線は,

$$y=-\frac{m}{a^2}x(x-2a)$$

よって, 面積 S_m は,

$$S_m=\int_0^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}x(x-2a)\right\}dx=-\frac{m}{a^2}\left\{-\frac{1}{6}(2a)^3\right\}=\frac{4}{3}ma \qquad \cdots\cdots①$$

また, この領域を $x=k$(整数) で切ったとき, この直線上にある格子点の個数 l_k は,

$$l_k=\left[-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right]+1$$

ただし, $[x]$ は x を超えない最大の整数であり, $x-1<[x]\leqq x$ を満たす. つまり,

$$-\frac{m}{a^2}k(k-2a)<l_k\leqq-\frac{m}{a^2}k(k-2a)+1$$

$k=0$ から $2a$ までの和をとることにより,

$$\sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)\right\}<L_m\leqq\sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}k(k-2a)+1\right\}$$

ここで,

$$\sum_{k=0}^{2a}k(k-2a)=\sum_{k=1}^{2a}(k^2-2ak)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2a(2a+1)(4a+1)-2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a(2a+1)$$

$$= -\frac{1}{3}a(2a+1)(2a-1)$$

を用いて，

$$\frac{m}{3a}(2a+1)(2a-1) < L_m \leqq \frac{m}{3a}(2a+1)(2a-1) + (2a+1)$$

①を用いて，

$$\frac{1}{4a^2}(2a+1)(2a-1) < \frac{L_m}{S_m} \leqq \frac{1}{4a^2}(2a+1)(2a-1) + \frac{3}{4ma}(2a+1)$$

よって，$m \to \infty$ として，はさみうちの原理より，

$$\boldsymbol{\lim_{m\to\infty} \frac{L_m}{S_m} = \frac{1}{4a^2}(2a+1)(2a-1)} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 4 桁の数を“$abcd$”とする．

a の選び方は，1〜9 の 9 通り．

b の選び方は，0〜9 のうち，a と $9-a$ を除く 8 通り ($b \fallingdotseq 9-a$ に注意).

c の選び方は，0〜9 のうち，a，$9-a$，b，$9-b$ を除く 6 通り ($c \fallingdotseq 9-b$ に注意).

d の選び方は，0〜9 のうち，a，$9-a$，b，$9-b$，c，$9-c$ を除く 4 通り．

よって，S の要素で 4 桁のものは，
$9 \times 8 \times 6 \times 4 = \mathbf{1728}$(個)　　(答)

(2) S の要素で，

(i) 1 桁のものは，9（個）

(ii) 2 桁のものは，$9 \times 8 = 72$（個）

(iii) 3 桁のものは，$9 \times 8 \times 6 = 432$（個）

であるから，

3 桁以下のものは，9+72+432=513（個）

4 桁以下のものは，513+1728=2241（個）

よって，2000 番目の S の要素は，4 桁のもののうち，
$2000 - 513 = 1487$ (番目)

のものである．

4 桁の“$abcd$”において，a は 1 から 9 の 9 通りあり，そのうち 1 つを指定すると，
“$abcd$”という形のものは，
$8 \times 6 \times 4 = 192$ (個)

ある．したがって，$a = 1$，2，3，4，5，6，7 なるものは，
$192 \times 7 = 1344$ (個)

あり，求める数は“8bcd”という形のもののうち，
$1487 - 1344 = 143$ (番目)

である．

ここで，b は 1，8 以外の 8 通りあり，そのうち 1 つを指定すると，“8bcd”という形のものは，
$6 \times 4 = 24$ (個)

ある．したがって，$b = 0$，2，3，4，5 なるものは，
$24 \times 5 = 120$ (個)

あり，求める数は，“86cd”という形のもののうち，
$143 - 120 = 23$ (番目)

である．

そして，c は，1，3，6，8 以外の 6 通りあり，そのうちの 1 つを指定すると，“86cd”という形のものは，
4 個

である．したがって，$c=0$，2，4，5，7 なるものは，
$4\times 5=20$（個）
あり，求める数は，“$869d$” という形のもののうち，
$23-20=3$（番目）
すなわち，**8695** である．　　(答)

【2】(1) $m=2$ のとき成り立つ．
$m \geqq 3$ のとき，
${}_m\mathrm{C}_1=m$ であるから，$2\leqq k\leqq m-1$ で考える．ここで，
$k{}_m\mathrm{C}_k=m{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$
であり，左辺は m の倍数．
また，m が素数であることと $2\leqq k\leqq m-1$ より，m と k は互いに素．
よって ${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数．以上より示された．　　〔証明終〕

(2) (i) $k=1$ のとき，成り立つ．
(ii) ある自然数 k に対して成り立つとすると，
$$(k+1)^m-(k+1)=k^m-k+{}_m\mathrm{C}_1k^{m-1}+{}_m\mathrm{C}_2k^{m-2}+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}k$$
ここで，${}_m\mathrm{C}_1$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れて，k^m-k も d_m で割り切れるから，左辺は d_m で割り切れる．
よって，数学的帰納法により題意は示された．　　〔証明終〕

(3) $m=2n$ とおく．ここで，
$$(1+x)^{2n}=1+{}_{2n}\mathrm{C}_1x+{}_{2n}\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}x^{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}x^{2n-1}+x^{2n}$$
で，$x=-1$ とすると，
$$0=1-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+1$$
$$\therefore\ {}_{2n}\mathrm{C}_1-{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2$$
ここで，左辺は d_m で割り切れるので，右辺も d_m で割り切れる．
よって $d_m=1$ または $d_m=2$ となる．　　〔証明終〕

【3】(1) A から B に電流が流れてない確率を求める．
(i) CD 間に電流が流れない場合，A から B への経路は，
A → B，A → C → B，A → D → B
の 3 つがあり，これらすべてについて，A から B に電流が流れなければよい．
その確率は順に，
$1-p$，$1-p^2$，$1-p^2$
であるから，CD 間に電流が流れないので，A から B に電流が流れない確率は，
$$(1-p)\times(1-p)(1-p^2)(1-p^2)=(1-p)^2(1-p^2)^2$$
(ii) CD 間に電流が流れる場合，C と D は同一の点と考えてよく，そのとき A から B への経路は，
(ア)　A $\longrightarrow$ B
(イ)　A $\longleftarrow\!\!\longrightarrow$ C $\longleftarrow\!\!\longrightarrow$ B

の 2 通りがある．A から B に電流が流れない確率は，

(ア) では，

$$1-p$$

(イ) では，A から C，C から B に電流が流れる確率が，ともに

$$1-(1-p)^2=2p-p^2$$

であることから，

$$1-(2p-p^2)^2=-p^4+4p^3-4p^2+1$$

よって，CD 間に電流が流れて，A から B に電流が流れない確率は，

$$p\times(1-p)(-p^4+4p^3-4p^2+1)$$

以上 (i)(ii) より，A から B に電流が流れない確率は，

$$(1-p)^2(1-p^2)^2+p(1-p)(-p^4+4p^3-4p^2+1)$$
$$=2p^6-7p^5+7p^4-2p^2-p+1$$

となるから，求める確率は，

$$1-(2p^6-7p^5+7p^4-2p^2-p+1)$$
$$=\boldsymbol{-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p} \qquad \text{(答)}$$

(2) 「B から A」,「E から F」に電流が流れる確率は，それぞれ (1) で求めた確率に等しい．よって，B から F に電流が流れる確率は，

$$\boldsymbol{(-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p)^2} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $n-1$ 回目までに 4 枚とも同じ色になることなく，m 回目に $(1\leqq m\leqq n-1)$

「白 2 枚，黒 2 枚」となる確率を x_m，

「白 3 枚，黒 1 枚」または「白 1 枚，黒 3 枚」となる確率を y_m

とする．ここで

$$x_{m+1}=\frac{3}{4}y_m,\ y_{m+1}=x_m$$

だから

$$y_{m+2}=\frac{3}{4}y_m$$

ここで $y_1=1$，$y_2=0$ だから m が偶数のとき，$y_m=0$，m が奇数のとき，$y_m=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{m-1}{2}}$．求める確率を p_n とすると

$$\boldsymbol{n}\textbf{ が奇数のとき，}\boldsymbol{p_n=0,\ n}\textbf{ が偶数のとき，}\boldsymbol{p_n}=\frac{1}{4}y_{n-1}\boldsymbol{=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n-1$ 回目までに 6 枚とも同じ色になることなく，m 回目に $(1\leqq m\leqq n-1)$

「白 3 枚，黒 3 枚」となる確率を a_m，

「白 4 枚，黒 2 枚」または「白 2 枚，黒 4 枚」となる確率を b_m

「白 5 枚，黒 1 枚」または「白 1 枚，黒 5 枚」となる確率を c_m

とする．ここで

$$a_{m+1}=\frac{2}{3}b_m,\ b_{m+1}=a_m+\frac{5}{6}c_m,\ c_{m+1}=\frac{1}{3}b_m$$

$$c_m=\frac{1}{3}\left(a_{m-2}+\frac{5}{6}c_{m-2}\right)=\frac{17}{18}c_{m-2}$$

ここで，$c_1=0$，$c_2=\dfrac{1}{3}$ だから

m が奇数のとき，$c_m=0$

m が偶数のとき，$c_m=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{m}{2}-1}$

求める確率を q_n とすると

n が偶数のとき，$q_n=0$，

n が奇数のとき，$q_n=\dfrac{1}{6}c_{n-1}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}}$

これは $n\geqq 2$ のとき成り立つが，$n=1$ のときは $q_n=0$　　(答)

【5】(1) $\sin x$ は閉区間 $[0,\ \pi]$ において微分可能で，$(\sin x)'=\cos x$ より，

$0\leqq x_1<x_2<x_3\leqq\pi$ のとき，平均値の定理より，

$$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=\cos c_1,\qquad x_1<c_1<x_2$$

$$\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}=\cos c_2,\qquad x_2<c_2<x_3$$

を満たす c_1，c_2 が存在する．

一方，$[0,\ \pi]$ において，$\cos x$ は単調減少であるから，$0<c_1<c_2<\pi$ より，

$$\cos c_1>\cos c_2\qquad\therefore\quad\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin x_3-\sin x_2}{x_3-x_2}$$　〔証明終〕

(2) $\lambda x+\mu y$ は2点 x，y を結ぶ線分を $\mu:\lambda$ の比に内分する点であるから，

$0\leqq x<\lambda x+\mu y<y\leqq\pi$

したがって，(1) の結果より，$x_1=x$，$x_2=\lambda x+\mu y$，$x_3=y$ とおくと，

$$\frac{\sin(\lambda x+\mu y)-\sin x}{(\lambda x+\mu y)-x}>\frac{\sin y-\sin(\lambda x+\mu y)}{y-(\lambda x+\mu y)}$$

$\lambda-1=-\mu$，$1-\mu=\lambda$ であるから，

$$\frac{\sin(\lambda x+\mu y)-\sin x}{\mu(y-x)}>\frac{\sin y-\sin(\lambda x+\mu y)}{\lambda(y-x)}$$

両辺に正の数 $\lambda\mu(y-x)$ をかけて，

$\lambda\{\sin(\lambda x+\mu y)-\sin x\}>\mu\{\sin y-\sin(\lambda x+\mu y)\}$

$\lambda+\mu=1$ を用いて整理すると，

$\sin(\lambda x+\mu y)>\lambda\sin x+\mu\sin y$　〔証明終〕

【6】(1) $\angle\mathrm{POA}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$，$\angle\mathrm{QOB}=\gamma$

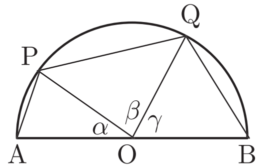
とおくと，

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$

$S=\triangle\mathrm{AOP}+\triangle\mathrm{POQ}+\triangle\mathrm{QOB}$

$=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sin\alpha+2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$



$$= \frac{1}{2}\left(\sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

α が一定のとき，これが最大となるのは　$\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} = 1$

$\therefore$　$\beta = \gamma$のとき，$S_{\max} = \sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} + \cos\dfrac{\alpha}{2}$

$$= \boldsymbol{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + 1\right)} \quad \text{(答)}$$

(2) $\dfrac{\alpha}{2} = x$ として，$f(x) = \cos x(\sin x + 1)$ とすると，

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin x(\sin x + 1) = (1 - 2\sin x)(1 + \sin x)$$

$1 + \sin x > 0$ であるから，$\sin x = \dfrac{1}{2}$ において正から負に変わり，このとき極大すなわち最大となる．

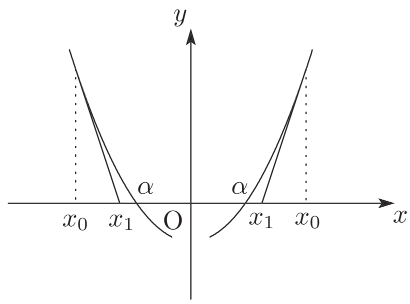
すなわち $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$ のときで，最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}$　(答)

【7】(1) $x = x_0$ での $y = f(x)$ の接線は

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$y = 0$ のときの x の値が x_1 である．

$$\therefore \quad \boldsymbol{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}} \quad \text{(答)}$$



(2) $f(x_0) > 0$ で，かつこの附近で $f''(x) > 0$ であるから，

曲線は $x = x_0$ で x 軸より上にあり，下に凸である．

したがって右図より

$x_0 < x_1 < \alpha$　または　$\alpha < x_1 < x_0$

よって，x_1 は x_0 にくらべてよりよい α の近似値である．　〔証明終〕

(3) $f(x) = x^3 + 3x - 6$ とおく．

$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$　（よって $f(x)$ は単調に増加）

$f''(x) = 6x$

$f(1) = -2 < 0$

$f(1.3) = 1.3^3 + 3 \times 1.3 - 6 = 0.097 > 0$

よって，解 α は 1 と 1.3 の間にある．

またこの間において，$f''(x) > 0$.

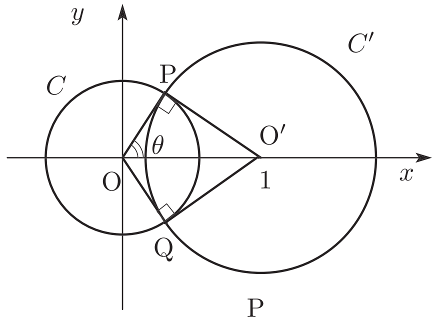
よって，$x_1 = 1.3 - \dfrac{f(1.3)}{f'(1.3)} = 1.3 - \dfrac{0.097}{8.07} = 1.287\cdots\cdots$ はよりよい近似値である．

$f(1.29) = 2.146689 + 3.87 - 6 = 0.016689 > 0$

$f(1.28) = 2.097152 + 3.84 - 6 = -0.062848 < 0$

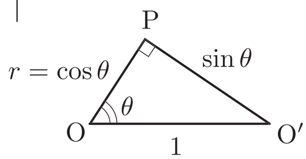
$\therefore$　$1.28 < \alpha < 1.29$　　$\therefore$　$\boldsymbol{\alpha = 1.28}$　(答)

【8】$\angle \mathrm{POO'} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく.
また, 扇形 OPQ と O$'$PQ の内部をそれぞれ $D_0, D_0{}'$ とする.



D'' から $D \cap D'$ を除いた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S(\theta) &= S_{D''} - S_{D\cap D'} \\ &= S_{D''} - (S_{D_0} + S_{D_0{}'} - S_{D''}) \\ &= 2S_{D''} - S_{D_0} - S_{D_0{}'} \\ &= 2\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot(2\theta) - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cdot(\pi - 2\theta) \\ &= \sin 2\theta - \theta\cos 2\theta - \frac{\pi}{2}\sin^2\theta \end{aligned}$$



ここで, $r = \cos\theta$ であり, $0 < r < 1$ を動くから, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ における $S(\theta)$ の最大値を求めればよい.

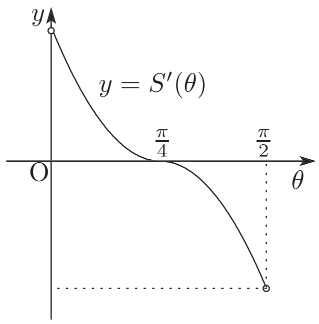
$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 2\cos 2\theta - \cos 2\theta + 2\theta\sin 2\theta - \pi\sin\theta\cos\theta \\ &= \cos 2\theta + 2\theta\sin 2\theta - \frac{\pi}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

であるが, $S'(\theta)$ の符号の変化が読みとれないので, さらに微分して,

$$\begin{aligned} S''(\theta) &= -2\sin 2\theta + 2\sin 2\theta + 4\theta\cos 2\theta - \pi\cos 2\theta \\ &= (4\theta - \pi)\cos 2\theta \end{aligned}$$

よって, $S'(\theta)$ の増減表は,

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
S''		$-$	0	$-$	
S'	1	↘	0	↘	-1

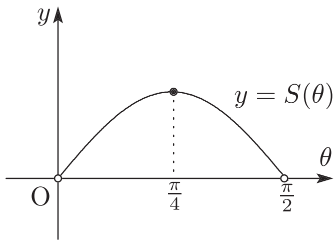


となるから, 右図のような概形となる.
よって,

$$\begin{cases} 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \text{のとき, } S'(\theta) > 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \text{のとき, } S'(\theta) < 0 \end{cases}$$

であるから, $S(\theta)$ の増減表は以下のようになる.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	



以上より, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき $S(\theta)$ は最大値をとり,

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \boldsymbol{1 - \frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $a_k = n$ とすると,

$$n - \frac{1}{2} < \sqrt{k} < n + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad n^2 - n + \frac{1}{4} < k < n^2 + n + \frac{1}{4}$$

n, k は自然数であるから,

$$n^2 - n + 1 \leqq k \leqq n^2 + n$$

よって，$a_k = n$ をみたす自然数 k は,

$$(n^2 + n) - (n^2 - n + 1) + 1 = 2n \text{ (個)}$$

存在する．したがって,

$$a_1 = a_2 = 1,$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2,$$

$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{i=1}^{3} i \cdot 2i = 2\sum_{i=1}^{3} i^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$

$$= \mathbf{28} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i \leqq 1998$ となる最大の n を求めると,

$$n(n+1) \leqq 1998$$

ここで,

$n = 44$ のとき,　$44 \times 45 = 1980 < 1998$

$n = 45$ のとき,　$45 \times 46 = 2070 > 1998$

となる．よって，数列 a_1, a_2, $\cdots\cdots$, a_{1998} は,

$$\overbrace{\overbrace{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 43,\ \underbrace{44,\ \cdots,\ 44}_{88\text{ 個}}}^{1980\text{ 個}},\ \underbrace{45,\ \cdots,\ 45}_{1998-1980\text{ 個}}}^{1998\text{ 個}}$$

である．したがって,

$$\sum_{k=1}^{1998} a_k = \sum_{i=1}^{44} i \cdot 2i + 45 \times (1998 - 1980)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 89 + 45 \cdot 18$$

$$= \mathbf{59550} \qquad \text{(答)}$$

【2】与式より，

$$x_k - x_{k-1} < x_{k+1} - x_k$$

であるから，

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \cdots\cdots < x_n - x_{n-1} \qquad \cdots\cdots①$$

ここで，次のようにして場合分けして考える．

(i) $0 \leqq x_2 - x_1$ のとき，①より，

$$0 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \cdots\cdots < x_n - x_{n-1}$$

となるので，

$$x_1 \leqq x_2 < x_3 < x_4 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n$$

よって，x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_n の最小値 x_l は

$$x_l = x_1 \quad \text{または} \quad x_l = x_1,\ x_2$$

となるので，l の個数は 1 または 2 である．

(ii) $x_n - x_{n-1} \leqq 0$ のとき，①より，

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \cdots\cdots < x_{n-1} - x_{n-2} < 0$$

となるので，

$$x_n \leqq x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots\cdots < x_3 < x_2 < x_1$$

よって，x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_n の最小値 x_l は

$$x_l = x_n \quad \text{または} \quad x_l = x_{n-1},\ x_n$$

となるので，l の個数は 1 または 2 である．

(iii) (i), (ii) 以外のとき，

$$x_k - x_{k-1} \leqq 0 < x_{k+1} - x_k$$

をみたす k $(2 \leqq k \leqq n-1)$ が存在し，①より，

$$\begin{cases} x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \cdots\cdots < x_k - x_{k-1} \leqq 0 \\ 0 < x_{k+1} - x_k < x_{k+2} - x_{k+1} < \cdots\cdots < x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

となる．これより，

$$\begin{cases} x_1 > x_2 > x_3 > \cdots\cdots > x_{k-1} \geqq x_k \\ x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n \end{cases}$$

よって，x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_n の最小値 x_l は

$$x_l = x_k \quad \text{または} \quad x_l = x_{k-1},\ x_k$$

となるので，l の個数は 1 または 2 である．

以上により，題意が示された．　〔証明終〕

【3】題意より，

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+p(y_{n+1}+y_n) \\ y_{n+1}=y_n-p(x_{n+1}+x_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x_{n+1}-py_{n+1}=x_n+py_n\cdots① \\ px_{n+1}+y_{n+1}=-px_n+y_n\cdots② \end{cases}$$

① + ② × p より

$$(1+p^2)x_{n+1}=(1-p^2)x_n+2py_n$$

したがって

$$x_{n+1}=\frac{1-p^2}{1+p^2}x_n+\frac{2p}{1+p^2}y_n \ \cdots③$$

同様に ① × p − ② より

$$y_{n+1}=-\frac{2p}{1+p^2}x_n+\frac{1-p^2}{1+p^2}y_n \ \cdots④$$

よって，x_n，y_n が有理数であれば，x_{n+1}，y_{n+1} も有理数となるので，x_1，y_1 が有理数であることから，帰納的にすべての x_n，y_n は有理数である．

また，③，④より，

$$\begin{aligned} {x_{n+1}}^2+{y_{n+1}}^2 &= \frac{1}{(1+p^2)^2}\left[\left\{(1-p^2)x_n+2py_n\right\}^2+\left\{-2px_n+(1-p^2)y_n\right\}^2\right] \\ &= \frac{(1-p^2)^2+4p^2}{(1+p^2)^2}({x_n}^2+{y_n}^2) \\ &= {x_n}^2+{y_n}^2 \end{aligned}$$

であるから，

$${x_n}^2+{y_n}^2={x_1}^2+{y_1}^2 \qquad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$(x_1,\ y_1)$ は原点でないから，点 P_n は原点を中心とする定円上にある．　〔証明終〕

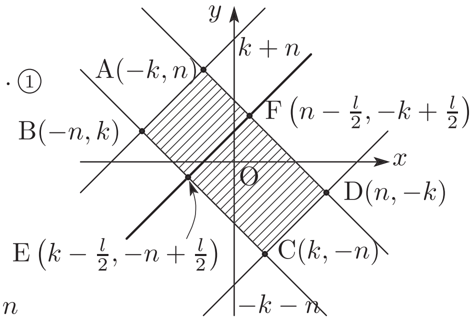
【4】与えられた連立不等式において

$$z=k \quad (k \text{ は整数})$$

とおくと

$$\begin{cases} -x+k-n \leqq y \leqq -x-k+n \\ x-k-n \leqq y \leqq x+k+n \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

これは，与えられた連立不等式の表す空間立体の平面 $z=k$ による断面を，xy 平面上に正射影したものである (右図)．



まず，この領域が存在するためには，①より

$$k-n \leqq -k+n \quad \text{かつ} \quad -k-n \leqq k+n$$

$$\therefore \quad -n \leqq k \leqq n \qquad \cdots\cdots②$$

さて，この領域を直線

$$y=x+l' \quad (l'=-(k+n),\ -(k+n)+1,\ \cdots\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k+n)$$

$$\iff \quad y=x-k-n+l \quad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2k+2n) \quad (l=l'+k+n)$$

で切った切り口は，2 点

$$\mathrm{E}\left(k-\frac{l}{2},\ -n+\frac{l}{2}\right),\quad \mathrm{F}\left(n-\frac{l}{2},\ -k+\frac{l}{2}\right)$$

を両端とした線分である．

(i) $l = 2i$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k+n)$ のとき,

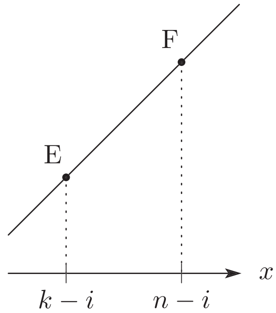
$\mathrm{E}(k-i,\ -n+i)$

$\mathrm{F}(n-i,\ -k+i)$

なので, E, F はともに格子点となり, 線分 EF 上の格子点は

$(n-i)-(k-i)+1 = n-k+1$ (個)

ある.



(ii) $l = 2i+1$ $(i = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k+n-1)$ のとき,

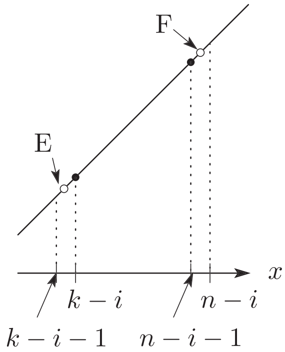
$\mathrm{E}\left(k-i-\dfrac{1}{2},\ -n+i+\dfrac{1}{2}\right)$

$\mathrm{F}\left(n-i-\dfrac{1}{2},\ -k+i+\dfrac{1}{2}\right)$

なので, E, F はともに格子点とはならず, 線分 EF 上の格子点は

$(n-i-1)-(k-i-1) = n-k$ (個)

ある.



以上 (i),(ii) より, ①の領域内に存在する格子点の総数 $g(k)$ は,

$$\begin{aligned} g(k) &= \sum_{i=0}^{k+n}(n-k+1) + \sum_{i=0}^{k+n-1}(n-k) \\ &= (n-k+1)(k+n+1)+(n-k)(k+n) \\ &= -2k^2+2n^2+2n+1 \end{aligned}$$

よって, ②とから, 与えられた空間立体内の格子点の総数 $f(n)$ は,

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=-n}^{n} g(k) \\ &= \sum_{k=-n}^{n}(-2k^2+2n^2+2n+1) \\ &= -4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n^2+2n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3) \end{aligned}$$

したがって, 求める極限は,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right) = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【5】$x=t$ における接線は，

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

$$\therefore\quad y=e^t(x-t+1)$$

であるから，この接線が $(a,\ b)$ を通るとき，

$$b=e^t(a-t+1)$$

となる．ここで，$f(t)=e^t(a-t+1)$ とおくと，$s=b$ と $s=f(t)$ の交点の個数は接線の個数に一致するから，$s=b$ と $s=f(t)$ のグラフの位置関係を考える．

$$\begin{aligned}f'(t)&=e^t(a-t+1)+e^t\cdot(-1)\\&=e^t(a-t)\end{aligned}$$

であり，$e^t>0$ より，増減表は以下のようになる．

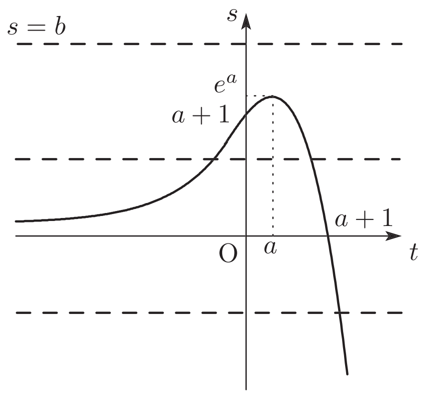
t		a	
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

また，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}f(t)&=\lim_{t\to-\infty}e^t(a-t+1)\\&=\lim_{u\to\infty}\frac{a+u+1}{e^u}=0\quad(\because\quad u=-t)\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}e^t(a-t+1)=-\infty$$

なので，グラフをかくと右図のようになる．



したがって，接線の個数は，

$$\begin{cases}\boldsymbol{b>e^a}\textbf{のとき,} & \textbf{0 個}\\ \boldsymbol{b=e^a}\textbf{のとき,} & \textbf{1 個}\\ \boldsymbol{0<b<e^a}\textbf{のとき,} & \textbf{2 個}\\ \boldsymbol{b\leqq 0}\textbf{ のとき,} & \textbf{1 個}\end{cases}\qquad\text{(答)}$$

となる．

【6】

$1+kx^2 \leqq \cos x \quad \cdots\cdots①$

とすると，$x=0$ のとき，等号が成り立つ．

ここで，①の両辺は偶関数であり，$0<x \leqq \pi$ の範囲で確かめれば十分である．

$0<x \leqq \pi$ において，①を変形して，

$k \leqq \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \quad \cdots\cdots②$

となる．右辺を $f(x)$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot x^2 - (\cos x - 1)\cdot 2x}{x^4}$$
$$= \frac{-x\sin x - 2\cos x + 2}{x^3}$$

であり，$0<x \leqq \pi$ における $f'(x)$ の正負は分子の正負に等しい．分子を $g(x)$ とおくと，

$$g'(x) = -\sin x - x\cos x + 2\sin x$$
$$= \sin x - x\cos x$$
$$g''(x) = \cos x - \cos x + x\sin x$$
$$= x\sin x \geqq 0$$

したがって，$g'(x)$ は単調増加関数であるから，

$g'(x) \geqq g'(0) = 0$

同様に，$g(x)$ は単調増加関数であるから，

$g(x) \geqq g(0) = 0$

$\Longleftrightarrow f'(x) \geqq 0$

これにより，$f(x)$ についても単調増加関数であることがいえるから，

$$f(x) \geqq \lim_{t\to +0} f(t) = \lim_{t\to +0}\left(-\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\right)\frac{1}{\cos t + 1} = -\frac{1}{2}$$

よって，②が常に成り立つ k の範囲は，

$\boldsymbol{k \leqq -\dfrac{1}{2}}$ 　　(答)

【7】(1)

$$f(x) = x - \log(1+x), \quad g(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$$

とおくと，$x>0$ より，

$$f'(x) = \frac{x}{1+x} > 0, \quad g'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

また，

$f(0)=0, \quad g(0)=0$

したがって，$x>0$ において，

$f(x)>0, \quad g(x)>0$

$\therefore \quad x > \log(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$ 　　〔証明終〕

(2)

$$\log a_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

である．(1) より，

$$\frac{k}{n^2} > \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right) > \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}$$

$k=1$ から n まで和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} > \log a_n > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{n^4}\right)$$

$$\iff \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) > \log a_n > \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2n^4}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\iff \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log a_n > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{12n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}=\frac{1}{2}$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n = \frac{1}{2}$$

となり，log の連続性から，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{e}} \qquad \text{(答)}$$

【8】 点 (x_0, y_0) を直線 C_t が通る範囲の点とすると，

$$y_0 = (x_0+t)e^t$$

を満たす $t>0$ である実数 t が存在する．すなわち，t の関数 $s=(t+x_0)e^t$ のグラフと直線 $s=y_0$ のグラフは $t>0$ の範囲で共有点をもつ．

$$f(t)=(t+x_0)e^t \qquad (t>0)$$

とおくと，

$$f'(t)=e^t+(t+x_0)e^t=(t+x_0+1)e^t$$

となる．$f'(t)=0$ となるとき，$t=-x_0-1$ であるから，$-x_0-1$ が 0 より大きい範囲にあるかどうかで場合分けして考える．

(i) $x_0 \geqq -1$ のとき，$x_0+1 \geqq 0$ であるから，

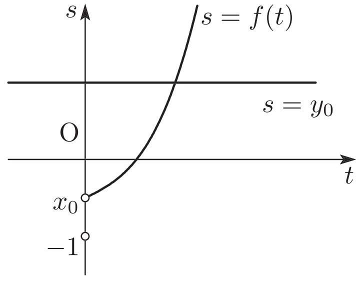
$$f'(t)>0 \quad (t>0)$$

となり，$f(t)$ は単調増加となる．さらに，

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$$

であるから，グラフは右図のようになり，共有点をもつための条件は

$$y_0 > x_0 \cdots\cdots ①$$

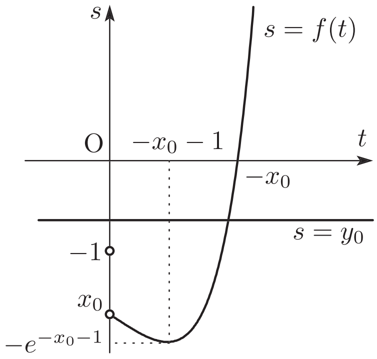


(ii) $x_0 < -1$ のとき，$-x_0-1>0$

であるから，$f(t)$ の

増減表は下表のようになる．

t	0		$-x_0-1$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	$-e^{-x_0-1}$	$\nearrow$



さらに

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$$

であるから，グラフは右図のようになる．

よって，共有点をもつための条件は，

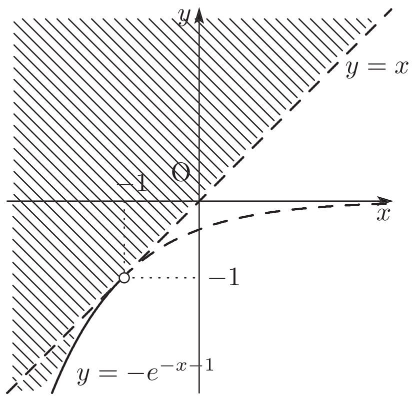
$y_0 \geqq -e^{-x_0-1}$ ……②

以上により，C_t が通る範囲は，①，②より，

$$\begin{cases} y > x & (x \geqq -1) \\ y \geqq -e^{-x-1} & (x < -1) \end{cases}$$

となるから，その概形を図示すると，

下図の斜線部分（ただし，境界は $\boldsymbol{x < -1}$ の部分のみ含む）　(答)



４章　不等式／積分①

問題

【1】 x に関する条件 (命題) として

$$P(x):\bigl|x-1\bigr|<b,\quad Q(x):\bigl|x^2-1\bigr|<a$$

と定めれば，集合 A, B

$$A=\bigl\{x\in\mathbb{R}\bigm|P(x)\bigr\},\quad B=\bigl\{x\in\mathbb{R}\bigm|Q(x)\bigr\}$$

が定まる．このとき，「$P(x)\Longrightarrow Q(x)$」は「$A\subseteq B$」と同値.

集合 A と B を数直線上に図示すると，次のようになる：

図 1: 集合 A

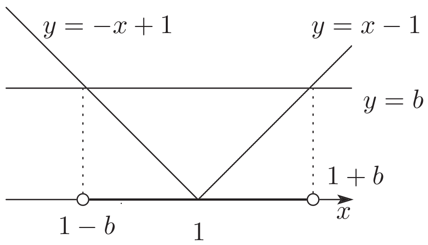
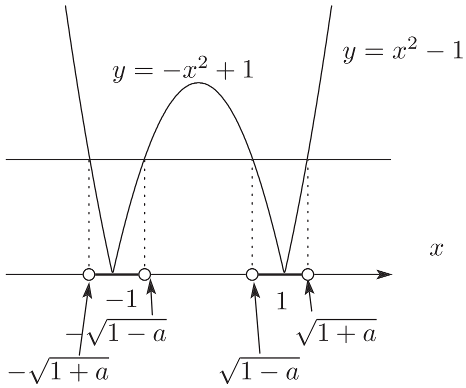


図 2: 集合 B



従って，次が言える：

$$P\left(x\right)\Longleftrightarrow 1-b<x<1+b,$$

$$Q\left(x\right)\Longleftrightarrow -\sqrt{1+a}<x<-\sqrt{1-a}\quad\text{または}\quad\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1+a}.$$

ただし，A は 1 を含んでいるから，A が $-\sqrt{1+a}<x<-\sqrt{1-a}$ に含まれることはない.

よって，結局

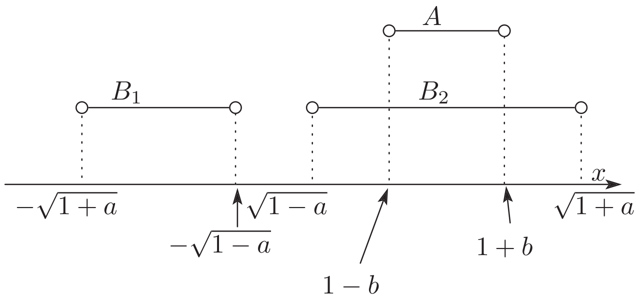
$$A=\bigl\{x\in\mathbb{R}\bigm|1-b<x<1+b\bigr\}$$

が

$$B_2=\bigl\{x\in\mathbb{R}\bigm|\sqrt{1-a}<x<\sqrt{1+a}\bigr\}$$

に含まれることが必要かつ十分である．これを図示すれば，図 3 のようになる：

図 3: $A \subseteq B$



以上より

$$\sqrt{1-a} \leqq 1-b \quad かつ \quad 1+b \leqq \sqrt{1+a}$$
$$\iff b \leqq 1-\sqrt{1-a} \quad かつ \quad b \leqq \sqrt{1+a}-1$$
$$\iff b \leqq \min\left\{1-\sqrt{1-a},\ \sqrt{1+a}-1\right\}. \quad \cdots ①$$

ここで，$1-\sqrt{1-a}$ と $\sqrt{1+a}-1$ の大小を比べると

$$\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)^2 = 2+2\sqrt{1-a^2} < 4,$$
$$\therefore \sqrt{1+a}+\sqrt{1-a} < 2 \quad より \quad -1+\sqrt{1+a} < 1-\sqrt{1-a}.$$

よって，

$$\min\left\{1-\sqrt{1-a},\ \sqrt{1+a}-1\right\} = -1+\sqrt{1+a}$$

となる．

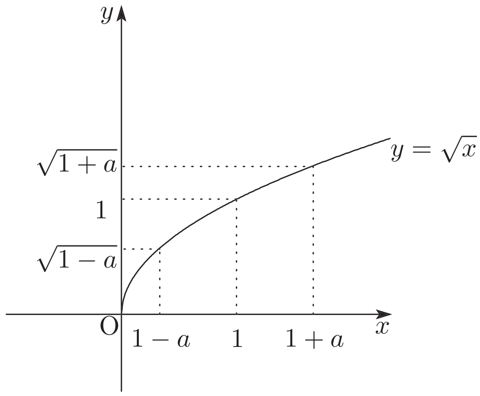
①より，以上をまとめて求める b の条件は

$\boldsymbol{0 < b \leqq -1+\sqrt{1+a}}$ 　　(答)

Cf.

$f(x)=\sqrt{x}$ のグラフは図 4 のようになる：

図 4: 関数 $y=\sqrt{x}$



グラフから，

$\sqrt{1+a}-1<1-\sqrt{1-a}$

が成り立つ．

【2】(1) a, b は正の数であるから，

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}\geqq 0$$

よって，

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2$$

となる．ただし，等号成立は，$a=b$ のときである．　〔証明終〕

＜別解＞

a, b が正であることから，相加相乗平均の関係を用いて，

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

ただし，等号成立は，

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\qquad \therefore\quad a=b\qquad (\because\quad a,\ b \text{ は正})$$

のときである．

(2) 等号条件まで含めた

$$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$$

(等号条件は $n=1$ または $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$)　$\cdots\cdots$①

を証明する．

(i) $n=1$ のとき，

$$a_1\cdot\frac{1}{a_1}=1$$

であるから，①は等号で成り立つ．

(ii) $n=2$ のとき，

$$(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=2+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\geqq 2+2=2^2 \qquad (\because \quad (1))$$

となり，さらに等号が成立するのは，(1) より $a_1=a_2$ のときであるから，①が成り立つ．

(iii) $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\
&=(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{a_{k+1}}{a_1}+\frac{a_1}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_2}+\frac{a_2}{a_{k+1}}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad+\cdots\cdots+\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)+1\\
&\geqq k^2+(\underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{k\text{ 個}})+1 \qquad (\because \quad (1))\\
&=k^2+2k+1=(k+1)^2
\end{aligned}$$

また，等号が成立するのは，

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_k \quad \text{かつ} \quad a_1=a_{k+1},\ a_2=a_{k+1},\ \cdots\cdots,\ a_k=a_{k+1}$$

$$\therefore \quad a_1=a_2=\cdots\cdots=a_k=a_{k+1}$$

となるので，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上により，すべての自然数 n に対して①が成り立つ．　〔証明終〕

(3) $s-a=\dfrac{a+b+c}{2}-a=\dfrac{b+c-a}{2}>0 \qquad (\because \quad \text{三角不等式})$

同様にして，

$s-b>0, \quad s-c>0$

が示されるから，(2) を用いて，

$$\begin{aligned}
&\{(s-a)+(s-b)+(s-c)\}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\geqq 3^2\\
\iff\ & s\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\geqq 9 \qquad (\because \quad a+b+c=2s)\\
\iff\ & \frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}\geqq 9\\
\iff\ & \left(1+\frac{a}{s-a}\right)+\left(1+\frac{b}{s-b}\right)+\left(1+\frac{c}{s-c}\right)\geqq 9
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 6$$

ただし，等号は

$s-a=s-b=s-c \qquad \therefore \quad a=b=c$

のとき成り立つ．　〔証明終〕

【3】(1) $f(x)=x-1-\log x \quad (x>0)$

とおく．このとき

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

よって，右の増減表より

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)\geqq 0$

したがって

$\log x \leqq x-1 \qquad$ (等号成立 は $x=1$) 〔証明終〕

(2) $p_i>0,\ q_i>0\ (1\leqq i\leqq n)$ により，$x=\dfrac{q_i}{p_i}$ とおいて (1) を用いると，

$$\log\left(\frac{q_i}{p_i}\right)\leqq\frac{q_i}{p_i}-1 \iff -\log\left(\frac{q_i}{p_i}\right)\geqq 1-\frac{q_i}{p_i}$$
$$\iff \log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)\geqq\frac{p_i-q_i}{p_i}$$
$$\iff p_i\log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)\geqq p_i-q_i$$

ここで両辺の $1\leqq i\leqq n$ の和をとって，

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)\geqq\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{n}q_i=1-1=0$$

したがって，

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)\geqq 0$$ 〔証明終〕

また，等号成立は (1) より，

$x=\dfrac{q_i}{p_i}=1 \qquad (1\leqq i\leqq n)$

よって，

$\boldsymbol{p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ \cdots\cdots,\ p_n=q_n}$ (答)

【4】$\log e^{\pi}=\pi\log e,\ \log\pi^{e}=e\log\pi.$

ここで $\pi\log e$ と $e\log\pi$ の大小を比較する．

このとき

$\dfrac{\log\pi}{\pi},\ \dfrac{\log e}{e}$

の大小関係が分かればよい．

ここで $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

より，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって

$$\frac{\log\pi}{\pi} < \frac{\log e}{e} \qquad \therefore \quad \pi\log e > e\log\pi \qquad \therefore \quad \log e^{\pi} > \log\pi^{e}$$

よって

$\boldsymbol{e^{\pi} > \pi^{e}}$ (答)

【5】(1)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n} \quad \cdots\cdots①$$

とおき，① がすべての正の整数 n について成り立つことを数学的帰納法により示す.

(I) $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \quad (\text{右辺})=\frac{1}{2}$$

となるから，① が成り立つ.

(II) $n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すれば,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k} \quad \cdots\cdots②$$

このとき,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}$$
$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)} \qquad (\because \ ②)$$
$$=\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2(k+1)}\right)$$
$$=\frac{1}{k+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

よって，$n=k+1$ のときにも ① が成り立つ.

したがって，正の整数 n に対して，① が成り立つ. 〔証明終〕

(2) (1) より,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|x+1|\Big]_0^1$$
$$=\boldsymbol{\log 2} \quad (\text{答})$$

【6】(1)

$$1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+R_n(x)$$
$$=\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}+R_n(x)$$
$$=\frac{1+(-1)^{n-1}x^{2n}}{1+x^2}+R_n(x)$$

よって,

$$R_n(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+(-1)^{n-1}x^{2n}}{1+x^2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\left|\int_0^1 R_n(x)dx\right| \leqq \int_0^1 |R_n(x)|dx=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$
$$\leqq \int_0^1 x^{2n}dx=\frac{1}{2n+1}$$
$$\therefore \quad \left|\int_0^1 R_n(x)dx\right| \leqq \frac{1}{2n+1} \qquad \text{〔証明終〕}$$

(3) 与式より,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1\{1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+R_n(x)\}dx$$

ここで,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad (\because \quad x=\tan\theta \text{と置換})$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

であるから,

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\int_0^1 R_n(x)dx$$

(2) の結果より，はさみうちの原理を用いて,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x)dx=0$$
$$\therefore \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots\cdots=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

【7】$h=\dfrac{1}{n}$ とし，$F(x)=\displaystyle\int_0^x t\cos^2(t-a)dt$ とすると，

$$I_n=F(a+h)-F(a)$$

ここで，$n\to\infty$ のとき $h\to 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} nI_n=\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a)$$

よって，

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t\cos^2(t-a)dt=x\cos^2(x-a)$$

であることから，

$$\lim_{n\to\infty} nI_n=F'(a)=a\cos^2(a-a)=\boldsymbol{a} \qquad (答)$$

＜別解＞

積分の平均値の定理から，

$$I_n=\int_a^{a+\frac{1}{n}} x\cos^2(x-a)dx=\left\{\left(a+\frac{1}{n}\right)-a\right\}\cdot c\cos^2(c-a)$$

を満たす c が,$a<c<a+\dfrac{1}{n}$ の範囲に存在するから，

$$nI_n=c\cos^2(c-a) \qquad \left(a<c<a+\frac{1}{n}\right)$$

ここで，$n\to\infty$ のとき $c\to a$ （はさみうちの原理）であるから，

$$\lim_{n\to\infty} nI_n=\lim_{c\to a} c\cos^2(c-a)=a\cos^2(a-a)=\boldsymbol{a} \qquad (答)$$

【8】$a_n=\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}+\dfrac{1}{2n+5}+\cdots+\dfrac{1}{2n+(2n-1)}$ とおくと

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+2k}\\&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} a_n&=\int_2^4\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{x}dx\\&=\Big[\log x\Big]_2^4-\frac{1}{2}\Big[\log x\Big]_1^2\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2} \qquad (答)\end{aligned}$$

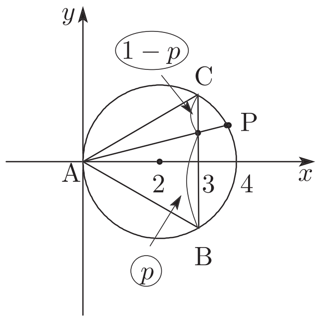
問題

【1】円の半径を 2 としても一般性は失わない．

そこで，右図のように座標を定めると，

$\mathrm{A}(0,\ 0)$,　$\mathrm{B}(3,\ -\sqrt{3})$,　$\mathrm{C}(3,\ \sqrt{3})$

である．よって，k を $k>1$ の実数として



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$= k\left\{(1-p)\begin{pmatrix}3\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= k\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}(2p-1)\end{pmatrix}$$

とおける．P は，円

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \iff x^2 + y^2 - 4x = 0$$

上にあるから，代入して

$$k^2\left\{9 + 3(2p-1)^2\right\} - 4\cdot k\cdot 3 = 0$$

$k>0$ なので

$$k(p^2-p+1) = 1$$

$$\therefore\quad k = \frac{1}{p^2-p+1}$$

したがって，①に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{\frac{1}{p^2-p+1}\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}} \qquad (答)$$

＜別解＞

外接円の中心を O とすると，△ ABC は正三角形より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0} \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

円の半径を 1 とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots(*)$$

である．

k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\} \qquad \cdots\cdots(**)$$

と表されるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\left\{(1-p)\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + p\left(-2\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right\}$$

整理すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \{1-(p+1)k\}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-2p)k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = 1$ であるから，$(*)$ を用いて

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 = \{1-(p+1)k\}^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + \{(1-2p)k\}^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$$
$$+ 2\{1-(p+1)k\}\cdot(1-2p)k\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$\therefore\quad 1 = \{1-(p+1)k\}^2 + \{(1-2p)k\}^2 - \{1-(p+1)k\}\cdot(1-2p)k$$

$\therefore \quad (3p^2-3p+3)k^2-3k=0$

$\therefore \quad k=\dfrac{1}{p^2-p+1} \qquad (\because \quad k>1)$

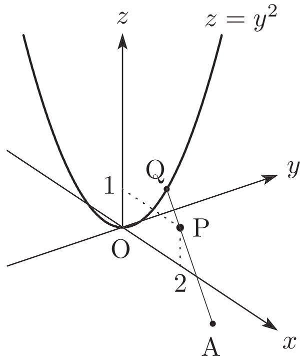
これを $(**)$ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{1}{p^2-p+1}\left\{(1-p)\overrightarrow{\mathbf{AB}}+p\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【2】 xy 平面上のある点 A について，$\mathrm{A}\in F$ となる条件は

直線 AP と放物線 $z=y^2$，$x=0$ が共有点をもつ　……①

ことである．さて，$\mathrm{A}(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，直線 AP 上の点 $(x,\ y,\ z)$ は，実数 t を用いて



$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X-2\\Y\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+t(X-2)\\tY\\1-t\end{pmatrix}$$

と表される．

よって

$$① \iff \begin{cases}1-t=(tY)^2\\2+t(X-2)=0\end{cases} \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\iff \begin{cases}1-t=t^2Y^2\\t=-\dfrac{2}{X-2}\end{cases} \text{ をみたす実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\iff 1+\frac{2}{X-2}=\left(\frac{2}{X-2}\right)^2Y^2$$

$$\iff \frac{X}{X-2}=\frac{4Y^2}{(X-2)^2}$$

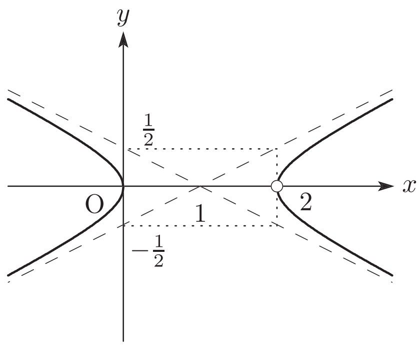
$$\iff X(X-2)=4Y^2 \quad \text{かつ} \quad X\fallingdotseq 2$$

$$\iff (X-1)^2-4Y^2=1 \quad \text{かつ} \quad X\fallingdotseq 2$$

したがって，F は

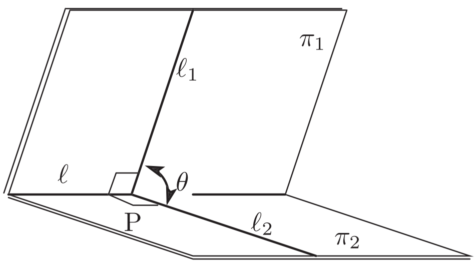
$$\begin{cases}(x-1)^2-4y^2=1\\x\fallingdotseq 2\\z=0\end{cases}$$

で表されるから，**図の太実線部**のようになる (ただし，**点 (2, 0)** は除く)．　(答)



【3】(1) いま，2 平面 π_1, π_2 が交わり，その交線を ℓ とする．交線 ℓ 上に 1 点 P をとり，P で平面 π_1, π_2 に含まれる垂線を立てる．それぞれ直線 ℓ_1, ℓ_2 としよう．

図 1: 2 平面のなす角



このとき，点 P で交わる 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 を含む平面 π が一意的に定まる．この平面上で測った，2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を，2 平面 π_1, π_2 のなす角と定義する．図 1 の θ である．

このように，2 平面 π_1, π_2 のなす角が θ であるとき，

$\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$

と書く．この場合，つまり平面同士のなす角も，直線の場合と同様に，

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

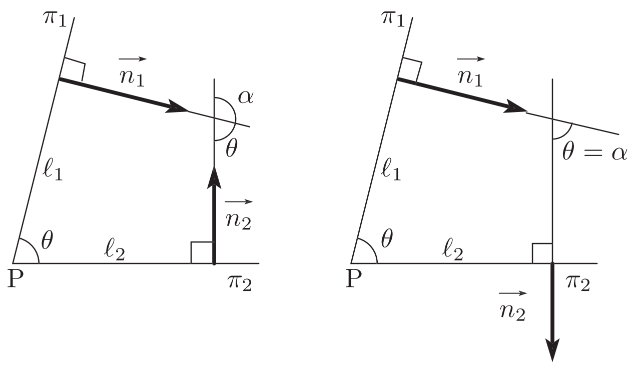
と定める．

π_1, π_2 それぞれの法線ベクトルを $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ とする．

このとき，π_1, π_2 のなす角 $\angle(\pi_1, \pi_2) = \theta$ と，2 つの法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ のなす角 $\angle\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \alpha$ の関係を考えよう．

図 1 での 2 直線 ℓ_1 と ℓ_2 を含む平面による断面を描いたのが，図 2 である．

図 2: 2 平面のなす角



この図から，次のように言える：

- ▼ 法線ベクトル同士のなす角 $\alpha = \angle\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) > \dfrac{\pi}{2}$ のとき (左側の図) には，平面同士のなす角 $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$ は $\theta = \pi - \alpha$ である．
- ▼ 法線ベクトル同士のなす角 $\alpha = \angle\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき (右側の図) には，平面

同士のなす角 $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$ は $\theta = \alpha$ である．

従って，

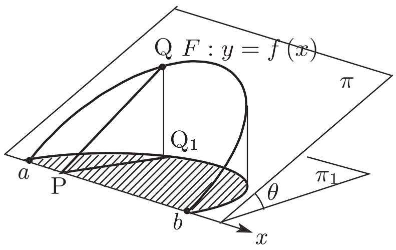
法線ベクトルのなす角が鋭角ならば，平面のなす角はそれに一致し，

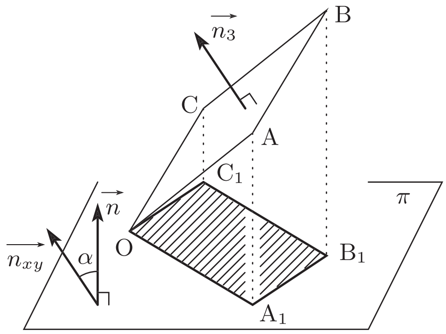
法線ベクトルのなす角が鈍角ならば，平面のなす角はその補角である． (答)

(2) まず，空間に含まれる平面上の図形の，別の平面への正射影の面積について考察する．図 3 を見られたい．

図 4: 正方形の正射影

図 3: 正射影の面積





平面 π 上の図形 F が π 上の適当な xy 座標系で $y = f(x)$ (ただし $f(x) \geqq 0$) で表されたとする．π と角 θ をなす平面 π_1 に F を正射影してできる図形 F_1 の面積を，元の図形 F の面積で表そう．

F 上の点 Q から交線に下した垂線の足を P とする．また，Q の正射影を Q_1 とすると，直角 3 角形 QPQ_1 で $PQ_1 = PQ\cos\theta$ である．

図形 F の面積を S とし，$PQ = f(x)$ であるとすれば，$S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ であり，また $PQ_1 = \cos\theta f(x)$ である．このとき，正射影 F_1 の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_a^b \cos\theta f(x)\,dx = \cos\theta \int_a^b f(x)\,dx = \cos\theta \cdot S$$

となる．

以上を用いて，(2) の解法に入ろう．まず，xy 平面に含まれる正方形の，平面 π への正射影の面積を求める．図 4 を見られたい．

求める面積は，与えられた立方体の，原点 O を頂点とする 3 個の正方形を，平面 π に正射影してできる平行 4 辺形の面積の和に等しい．そこで，xy 平面上の 4 点を O (0, 0, 0)，A (1, 0, 0), B (1, 1, 0)，C (0, 1, 0) として，正方形 OABC の平面 π への正射影を考える．

π の法線ベクトルは $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ であり，また xy 平面の法線ベクトルは $\overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

とできる．この 2 つの法線ベクトルのなす角を α とすると，$\left|\overrightarrow{n}\right| = \left|\overrightarrow{n_{xy}}\right| = 1$ であ

るから，$\cos\alpha$ はこれらの内積に等しく，

$$\cos\alpha = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3 > 0$$

である．従って，法線ベクトルどうしのなす角が鋭角であるから，2 平面 π と π_{xy} のなす角 θ は α に等しい．

従って，正方形 OABC の平面 π への正射影 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ の面積は

$$\mathrm{OA_1B_1C_1} = \mathrm{OABC} \cdot \cos\theta = \cos\theta$$

となる．ところが，$\theta = \alpha$ であるから，

$$\cos\theta = \cos\alpha = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n_{xy}} = a_3$$

より，

$$\mathrm{OA_1B_1C_1} = a_3$$

となる．

yz 平面，zx 平面に含まれる正方形についても，それらを平面 π に正射影してできる平行 4 辺形の面積がそれぞれ a_1，a_2 であることが，まったく同じ議論によって示されるから，求める面積は

$\boldsymbol{a_1 + a_2 + a_3}$　　(答)

【4】(1) 平面 $\pi : x + y + z = 0$ に垂直なベクトル $\vec{n}$ は $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，これに垂直な単位ベクトルの 1 つを $\vec{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．さらに，$\vec{n}$ と $\vec{a}$ に垂直な単位ベクトル $\vec{b}$ を求める．$\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{b} = \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{a} = \alpha - \beta = 0 \\ \left|\vec{b}\right|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \end{cases}$$

となるから，これを解いて，$\alpha > 0$ のものを考えれば，

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．これらのベクトルを用いると，π 上の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は実数 u，v を用いて，

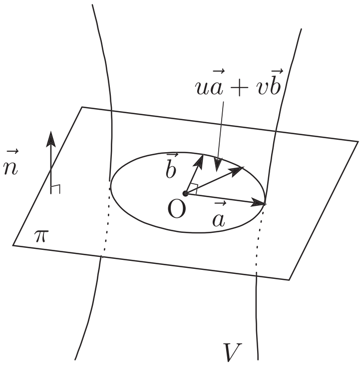
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\vec{a} + v\vec{b} = \frac{u}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

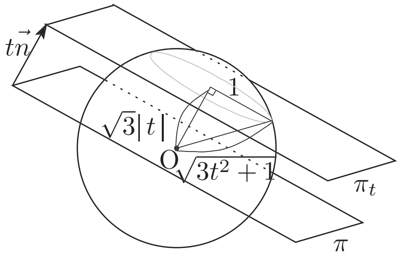
と表せる．これを V の式に代入すると，

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}u\right)^2+\left(\frac{-u}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{6}}v\right)^2+\left(\frac{-u}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{6}}v\right)^2=3$$

$\therefore\quad u^2+v^2=1$

よって，共通部分は**円**である．　　(答)





(2) 実数 t, u, v を用いて，π と平行な平面を

$$\pi_t:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\vec{n}+u\vec{a}+v\vec{b}$$

とすると，(1) と同様に V の式に代入して

$u^2+v^2=1$

を得る．よって，V と π_t の共通部分は半径 1 の円である．また，この円は原点を中心とする半径 $\sqrt{3t^2+1}$ の球と π_t との共通部分として得られ，任意の t に対してこの球は存在するので，V は有界ではない．　　〔証明終〕

(3) (2) の議論により，π に平行な平面での切り口は半径 1 の円で，中心は π に垂直な直線 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\vec{n}$ 上にあるので，V は**円柱**である．　　(答)

＜別解＞

ベクトルを用いずに，式を用いて解答すると次のようになる．

(1)　$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=3$　　$\cdots\cdots$①

$x+y+z=0$　　$\cdots\cdots$②

① + ②^2 より，

$3(x^2+y^2+z^2)=3$　　　　$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=1$　　$\cdots\cdots$③

よって, 求める共通部分は, 平面②と球③の共通部分であるから, **円**である．　　(答)

(2) 原点中心，半径 r の球は

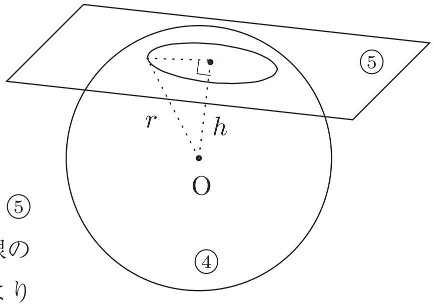
$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ④$$

と表される．④ $\times 3-$ ① より

$$(x+y+z)^2=3(r^2-1)$$

となるから，$r \geqq 1$ のとき

$$x+y+z=\pm\sqrt{3(r^2-1)} \qquad \cdots\cdots ⑤$$



ここで，原点から平面⑤に下ろした垂線の長さを h とおくと，点と平面との距離より

$$h=\frac{\sqrt{3(r^2-1)}}{\sqrt{3}}=\sqrt{r^2-1}<r$$

であるから，④と⑤の共通部分 (円) が存在し，それは，V と④の共通部分に一致する．

したがって，r がいくら大きくても V と④の共通部分があるから，V は有界ではない．

〔証明終〕

【5】(1) 求める曲線を C' とし， C' 上の点を (x', y')， C 上の点を (x, y) とすると，

$$y=y', \quad \frac{x+x'}{2}=\frac{\pi}{12} \qquad \therefore \quad x=\frac{\pi}{6}-x'$$

これらを $C: y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\tan x}$ に代入して，

$$y'=\frac{1}{\sqrt{3}+\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-x'\right)}$$

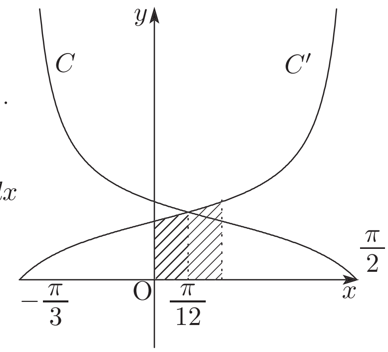
ここで，

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}-x'\right)=\frac{\tan\dfrac{\pi}{6}-\tan x'}{1+\tan\dfrac{\pi}{6}\tan x'}=\frac{1-\sqrt{3}\tan x'}{\sqrt{3}+\tan x'}$$

よって

$$C': y=\frac{\sqrt{3}+\tan x}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\tan x)+(1-\sqrt{3}\tan x)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+\tan x}{4}} \qquad (答)$$

(2) C' は $y=\tan x$ のグラフを平行移動し，
縮小したものなので，
C と C' のグラフの概形は右図のようになる．
この対称性に注意すると，



$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\sqrt{3}+\tan x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}+\tan x}{4}\ dx$$

だから，これを　I とすると

$$I = \frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\ dx\right)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\int \tan x\ dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\log|\cos x| + C\ (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{4}\Big[\sqrt{3}x - \log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\pi - \log\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\end{aligned}$$

(答)

【6】(1)

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1,\quad z=0$$

の交わりは，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \iff \sqrt{y}=1-\sqrt{x}$$

$$\therefore\quad y=(1-\sqrt{x})^2$$

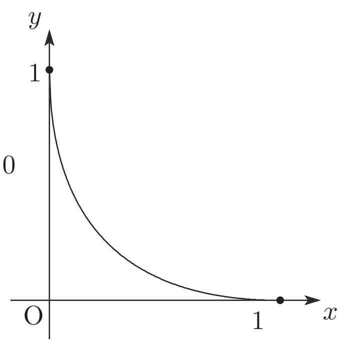
ここで，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ より，$0 \leqq x \leqq 1$ と
なる．

$$y' = 2(1-\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leqq 0$$

$y' = -x^{-\frac{1}{2}}+1$ から，

$$y'' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \geqq 0$$

となるので，概形は右図のようになる．　　(答)



(2) $z=t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ との交わりは,

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1-\sqrt{t}$$

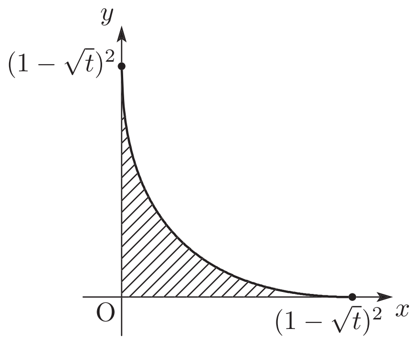
$\sqrt{y}=1-\sqrt{t}-\sqrt{x} \geqq 0$ より,

$$0 \leqq x \leqq (1-\sqrt{t})^2$$

であり,

$$y=(1-\sqrt{t}-\sqrt{x})^2$$

となり，概形は (1) と同様にして, 右図のようになる.



よって， $S(t)$ は斜線部分の面積であるから,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int_0^{(1-\sqrt{t})^2} y dx \\
&= \int_0^{(1-\sqrt{t})^2} \left\{(1-\sqrt{t})^2 - 2(1-\sqrt{t})x^{\frac{1}{2}} + x\right\} dx \\
&= \left[(1-\sqrt{t})^2 x - \frac{4}{3}(1-\sqrt{t})x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{(1-\sqrt{t})^2} \\
&= \left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)(1-\sqrt{t})^4 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}(1-\sqrt{t})^4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) $0 \leqq z \leqq 1$ と (2) より,

$$V=\int_0^1 S(z)dz = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-\sqrt{z})^4 dz$$

ここで， $\sqrt{z}=u$ とおくと,

$$z=u^2, \quad dz=2udu$$

$z; 0 \to 1$ のとき，$u; 0 \to 1$ だから,

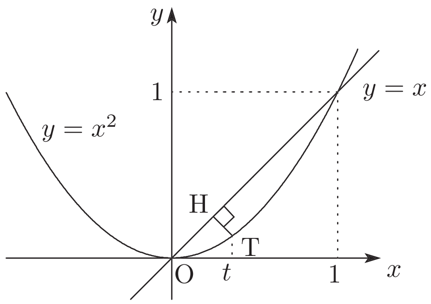
$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-u)^4 \cdot 2udu \\
&= \frac{1}{3}\left\{\left[-\frac{(1-u)^5}{5}u\right]_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 (1-u)^5 du\right\} \\
&= \frac{1}{15}\left[-\frac{1}{6}(1-u)^6\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{90}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【7】$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ から $l:y=x$ への距離は

$$\frac{t-t^2}{\sqrt{2}} \quad (0 \leqq t \leqq 1) \cdots\cdots ①$$

である．

ここで，T から l に下ろした垂線と l との交点を H とすると，



T を通り l に垂直な直線の方程式は

$$y=-(x-t)+t^2$$

だから，H の x 座標は

$$x=-(x-t)+t^2$$

より，

$$x=\frac{1}{2}t(t+1)$$

と表せる．

よって，原点から H までの距離を u とすると，

$$u=\sqrt{2}x=\frac{1}{\sqrt{2}}t(t+1)$$

$$\therefore u=\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+t)$$

であり，これより

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)$$

$$\therefore du=\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)dt$$

また，題意の回転体を H で，l に垂直な平面で切った切り口の半径を $f(u)$ とすると，① より

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}t(1-t)$$

だから，求める体積は

$$\pi\int_0^{\sqrt{2}}\{f(u)\}^2du$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(t-1)^2(2t+1)dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(2t^5-3t^4+t^2)dt$$

$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{30\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)}$$

【8】 $y' = \dfrac{(\log x)^2 - 3\log x + 1}{x^2}$ だから，$y' = 0$ となる x は $1 \leqq x \leqq e$ より

$$\log x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

をみたす x であり，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \alpha$ とおくと

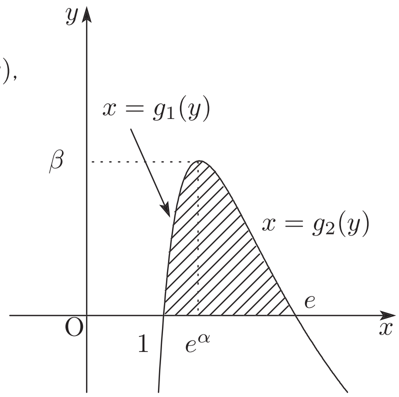
$$x = e^{\alpha}$$

だから，曲線の概形は右図のようになる．

ここで，この曲線の $x \leqq e^{\alpha}$ の部分を $x = g_1(y)$，

$x \geqq e^{\alpha}$ の部分を $x = g_2(y)$，$x = e^{\alpha}$ のときの

y の値を β とすると，求める体積は



$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\beta} \pi\{(g_2(y))^2 - (g_1(y))^2\}dy \\
&= \pi\left(\int_e^{e^{\alpha}} x^2 \cdot \frac{dy}{dx}dx - \int_1^{e^{\alpha}} x^2 \cdot \frac{dy}{dx}dx\right) \\
&= \pi\int_e^1 x^2 \cdot \frac{dy}{dx}dx \\
&= \pi\int_e^1 \{(\log x)^2 - 3\log x + 1\}dx \\
&= \pi\Big[x(\log x)^2 - 5x\log x + 6x\Big]_e^1 \\
&= \boldsymbol{2(3-e)\pi} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	