M3JSB/M3JB/M3TB

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学Ｔ

1章　論理

問題

【1】整数でない正の有理数解を

$\dfrac{m}{n}$　(m, n は互いに素な正の整数で，$n \geqq 2$)

と置くと

$$4\left(\frac{m}{n}\right)^2-(a-2)\cdot\frac{m}{n}-(a+5)=0$$

より

$$\frac{4m^2}{n}=(a-2)m+(a+5)n. \quad \cdots ①$$

右辺は整数であるから，左辺も整数である．従って，$4m^2$ は n で割り切れなければならないが，m と n は互いに素であるから，4 が n で割り切れなければならない．よって，$n \geqq 2$ より

$n=2,\ 4.$

Case 1．$n=2$ のとき　①より

$$2m^2=(a-2)m+2(a+5)=a(m+2)-2m+10$$

であるから

$$a=\frac{2m^2+2m-10}{m+2}=2m-2-\frac{6}{m+2}$$

a は整数であるから，$m+2$ は 6 の約数である．$m+2>2$ より

$m+2=3,\ 6 \quad \therefore \quad m=1,\ 4$

であるが，m と n は互いに素であるから，$m=1$ となり，解は $x=\dfrac{1}{2}$．また，$a=-2$ である．

Case 2．$n=4$ のとき　①より

$$m^2=(a-2)m+4(a+5)=a(m+4)-2m+20$$

であるから

$$a=\frac{m^2+2m-20}{m+4}=m-2-\frac{12}{m+4}.$$

よって $m+4$ は 12 の約数である．$m+4>4$ より

$m+4=6,\ 12 \quad \therefore \quad m=2,\ 8.$

いずれの場合も，m と $n=2$ とが互いに素ではなくなり，仮定に反する．

以上より，求める解と a の値は

$x=\dfrac{1}{2},\ a=-2.$　　　(答)

【2】与えられた関数を $z=f(x,y)$ とすると，$f(x,y)$ は

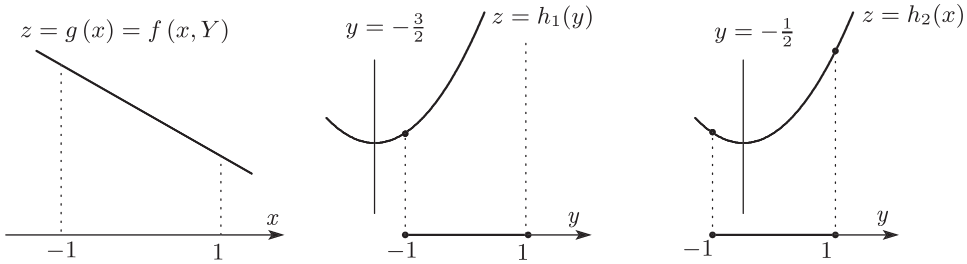
x については 1 次関数，y については 2 次関数

である．そこで，x についての関数と見なすために，y を $y=Y$(ただし$-1 \leqq Y \leqq 1$) に固定する．このとき，

$f(x,Y)=Y^2-xY+2Y-x+2=(-Y-1)x+Y^2+2Y+2$

となる．これを $g(x)$ とする：$g(x)=(-Y-1)x+Y^2+2Y+2$

図 1



$-1 \leqq Y \leqq 1$ より $-2 \leqq -Y-1 \leqq 0$ であるから，$g(x)$ は傾きが 0 以下の 1 次関数で，従って単調減少関数である．図 1 の左側を参照のこと．従って，

- $g(x)$ が最大となるのは x が最小のときで，

  $\max g(x)=g(-1)=(-Y-1)(-1)+Y^2+2Y+2=Y^2+3Y+3$

  Y の固定を解いて，y の関数 $h_1(y)=y^2+3y+3$ を $-1 \leqq y \leqq 1$ で考える．図 1 の中央の図を参照せよ．

  $$h_1(y)=\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

  で，$-1 \leqq y \leqq 1$ であるから，

  $\max h_1(y)=h_1(1)=1+3+3=7$

- $g(x)$ が最小になるのは x が最大のときで，

  $\min g(x)=g(1)=(-Y-1)\cdot 1+Y^2+2Y+2=Y^2+Y+1$

  最大値の場合と同様にして，Y の固定を解いて $h_2(y)=y^2+y+1$ とし，y を $-1 \leqq y \leqq 1$ で動かせば (図 1 の右側)，

  $$h_2(y)=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

  であるから，

  $$\min h_2(y)=h_2\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

以上より，

- 最大値 $\max f=f(-1,1)=7$
- 最小値 $\min f=f\left(1,-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

(答)

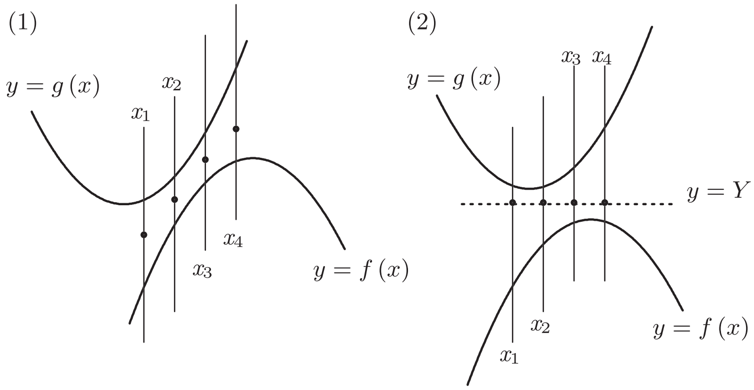
【3】2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = -x^2 + (a-2)x + a - 4$$

$$g(x) = x^2 - (a-4)x + 3$$

と定める.

図 2 ：任意と存在



(1) 題意は

任意の x について，**それぞれ** y が存在して $y > f(x)$ かつ $y < g(x)$

であるから，$y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフの位置関係は図 2 の左側のようになる.

従って，題意をみたす y がとれる条件は

$$-x^2 + (a-2)x + a - 4 < x^2 - (a-4)x + 3$$

$$\therefore\ 2x^2 - 2(a-3)x - a + 7 > 0 \ \cdots\cdots ①$$

①が，どんな x に対しても成り立つから，①の判別式を D_1 として

$$\frac{D_1}{4} = (a-3)^2 - 2(-a+7) = a^2 - 4a - 5 < 0$$

これより

$$(a-5)(a+1) < 0 \qquad \therefore\ -1 < a < 5 \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 題意は

ある y が存在して，**その** y **と**任意の x について $y > f(x)$ かつ $y < g(x)$ が成り立つ

であるから，$y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフの位置関係は図 2 の右側のようになる.

これが成り立つためには

$$\min g(x) > \max f(x)$$

であることが必要かつ十分である．そこで，$f(x)$ と $g(x)$ を平方完成してそれぞれ $\max f(x)$, $\min g(x)$ を求めると

$$f(x) = -\left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + a - 4$$

$$\therefore\quad \max f(x) = \frac{a^2}{4} - 3$$

$$g(x)=\left(x-\frac{a-4}{2}\right)^2-\left(\frac{a-4}{2}\right)^2+3$$

$$\therefore\quad \min g(x)=-\frac{a^2}{4}+2a-1$$

従って

$$-\frac{a^2}{4}+2a-1>\frac{a^2}{4}-3\quad\therefore\ a^2-4a-4<0$$

これを解いて，求める a の値の範囲は

$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$　　(答)

【4】まず

任意の整数 n について $f(n)$ が整数，また任意の偶数 m について $f(m)$ が偶数ならば，

特に $n=1$ のときの $f(1)$ は整数，$n=2$ のときの $f(2)$ は (整数かつ) 偶数である．

$f(1)=a+b$ は整数，$f(2)=8a+2b$ は偶数だから，$f(2)-2f(1)=6a$ は偶数．そして，$6a=2\cdot 3a$ だから，$3a$ は整数．ここで，$0<a\leqq 1$ であるから

$a=\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1

この中で，条件

$a\leqq b\leqq 1$ かつ $a+b$ が整数

をみたすものは

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, または $a=1$, $b=1$

に限られる．以上より，

題意が成立するならば $(a,\,b)=\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right)$，$(1,\,1)$　$\cdots(\#)$

が成り立つ．つまり，

$(\#)$: $(a,\,b)=\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right)$，$(1,\,1)$ は題意が成立するための必要条件．

以下，$(\#)$: $(a,\,b)=\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right)$，$(1,\,1)$ の十分性を確かめる．

(i) $(a,\,b)=(1,\,1)$ のときは，

$$f(n)=n^3+n$$

となり，n が整数ならば $f(n)$ は整数であることは明らか．また，n と n^3 の偶奇は一致するから，n が偶数ならば $f(n)$ も偶数となり，成立．

(ii) $(a,\,b)=\left(\frac{1}{3},\,\frac{2}{3}\right)$ のとき，

$$f(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{2}{3}n=\frac{1}{3}n\left(n^2+2\right)$$

である．

- n が 3 の倍数のとき，$f(n)$ が整数になるのは明らか．
- n が 3 の非倍数のとき，k を整数として $n=3k\pm 1$ だから，

  $$n^2+2=(3k\pm 1)^2+2=3\left(3k^2\pm 2k+1\right)$$

  より n^2+2 が 3 の倍数になり，$f(n)$ は整数．

更に，n が偶数ならば，

$$3f(n)=n\left(n^2+2\right)$$

は偶数になる．ところが 2 と 3 は互いに素であるから，2 が $f(n)$ を割り切る，つまり $f(n)$ が偶数になるから，成立．

以上より，

$$(a,\ b)=\ (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$ ならば題意が成立する

から，(#) の十分性が示された．

よって求める $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=\ (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \qquad \text{(答)}$$

【5】 (1) 微分して $f'(x)=2ax+b$ であるから，示すべきことは

$$\left|f'(1)\right|=\left|2a+b\right|\leqq 4$$

である．そこで，この $\left|2a+b\right|\leqq 4$ を示す．

$\left|x\right|\leqq 1$ をみたす任意の x について，$\left|f(x)\right|\leqq 1$ が成り立つから，特に $x=1,\ 0,\ -1$ でも成立する．つまり

- $x=1$ のとき，$\left|f(1)\right|=\left|a+b+c\right|\leqq 1 \quad \cdots①$
- $x=0$ のとき，$\left|f(0)\right|=\left|c\right|\leqq 1 \quad \cdots②$
- $x=-1$ のとき，$\left|f(-1)\right|=\left|a-b+c\right|\leqq 1 \quad \cdots③$

①と③の辺々を加えて，

$$\left|a+b+c\right|+\left|a-b+c\right|\leqq 2 \quad \cdots④$$

を得るが，この左辺に三角不等式 $\left|A\right|+\left|B\right|\geqq\left|A+B\right|$ を用いれば

$$\left|a+b+c\right|+\left|a-b+c\right|\geqq\left|2a+2c\right|$$

であるから，④ とまとめて

$$\left|2a+2c\right|=2\left|a+c\right|\leqq 2 \quad \therefore \left|a+c\right|\leqq 1$$

よって

$$-1\leqq a+c\leqq 1 \iff -c-1\leqq a\leqq -c+1$$

となる．②より，$-1\leqq c\leqq 1$ であるから，a の範囲を考えるために ca 座標平面に図示すると，図 3 の左側のようになる．

従って，a のとり得る値の範囲は $-2\leqq a\leqq 2$ である．

次に，① と②から a と b の関係を導く．再び三角不等式より

$$\left|a+b+c\right|+\left|-c\right|\geqq\left|a+b+c+(-c)\right|=\left|a+b\right|$$

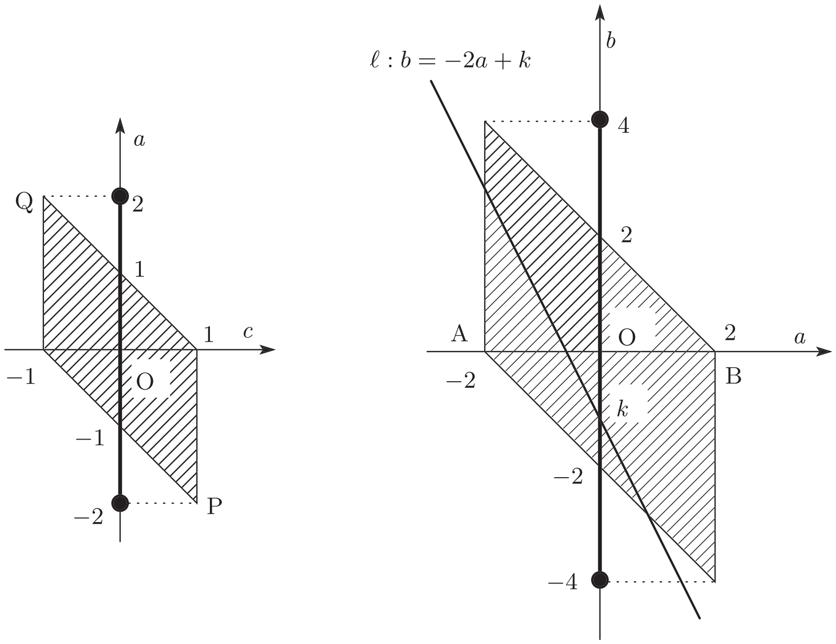
が成り立つから，

$$\left|a+b\right|\leqq 2 \iff -2\leqq a+b\leqq 2 \quad \therefore\ -a-2\leqq b\leqq -a+2$$

これを ab 座標平面に表せば，図 3 の右側の図になる．

$2a+b=k \iff b=-2a+k$ とすれば，これは ab 座標平面における，傾き -2，切片 k の直線 ℓ を表す．このように考えるとき，求めるものは，図 3 の右側の図の斜線部に点 $(a,\ b)$ が存在するという条件の下での，切片 k の範囲である．

図３：c と a，a と b の関係



- ℓ が点 A $(-2,\ 0)$ を通るとき，k は最小で，その値は -4．図 3 の左側の図で $a=-2$ となるのは P，つまり $c=1$ のときである．よって
  $f'(1) = 2a + b \geqq -4$
  が示された．
- ℓ が点 B $(2,\ 0)$ を通るとき，k は最大で，その値は 4．図 3 の左側の図で $a=2$ となるのは Q, つまり $c=-1$ のときである．よって
  $f'(1) = 2a + b \leqq 4$
  が示された．

以上をまとめて，
$-4 \leqq f'(1) \leqq 4 \quad \therefore\ \left|f'(1)\right| \leqq 4$　　［証明終］

(2) (1) より，$\left|f'(1)\right| = \left|2a+b\right| = 4$ であるから，
- $2a+b=-4$ となるのは $a=-2,\ b=0,\ c=1$ のときで，このとき
  $f(x) = -2x^2 + 1$ (図 3 の点 A，点 P に対応する．)
- $2a+b=4$ となるのは $a=2,\ b=0,\ c=-1$ のときで，このとき
  $f(x) = 2x^2 - 1$ (図 3 の点 B，点 Q に対応する．)

以上より求める $f(x)$ は
$f(x) = -2x^2 + 1,\ 2x^2 - 1$　　　　(答)

【6】$-1 \leqq x \leqq 1$ なる任意の x について

$\left|p(x)\right| \leqq 1 \Longleftrightarrow -1 \leqq p(x) \leqq 1$

が成り立つから，特に $x=1$ のとき成り立ち，

$\left|p(1)\right| \leqq 1 \Longleftrightarrow -1 \leqq a+b+c \leqq 1 \qquad \cdots(\#)$

である．

(I) まず，$q(x) \leqq 1$ を示す．

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$c \geqq 0$，$x^2 \leqq 1$，$x \leqq 1$ より，$cx^2 \leqq c$, $bx \leqq b$ が成り立つから

$q(x) = cx^2+bx+a \leqq c+b+a \leqq 1 \quad (\because\ (\#))$

(II) 次に $q(x) \geqq -1$ を示す．

$cx^2 \geqq 0$, $a \geqq 0$ であり，かつ $x \geqq -1$, $b \geqq 0$ であるから，

$q(x) = cx^2+bx+a \geqq bx \geqq -b$

$(\#)$ より，

$-b \geqq a+c-1 \geqq -1$

この 2 式を合わせて

$q(x) = cx^2+bx+a \geqq -1$

以上，(I)，(II) が $-1 \leqq x \leqq 1$ なる任意の x について成り立つから，

$-1 \leqq q(x) \leqq 1 \quad \therefore \quad \left|q(x)\right| \leqq 1$ 　　［証明終］

問題

【1】$f(x)=x^3+ax^2+b$ より

$$f'(x)=3x^2+2ax=3x\left(x+\frac{2}{3}a\right)$$

従って

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=0,\ -\frac{2}{3}a$$

まず，次に着目する：

区間 $I：0 \leqq x \leqq 1$ で常に $f(x)>0$ が成立するならば，

その区間 I における $f(x)$ の最小値 $\min f(x)>0$ が成り立つ．　(#)

$\min f(x)=m$ とする．

(i) $-\frac{2}{3}a \leqq 0$，つまり $a \geqq 0$ のとき，次の増減表を得る：

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	min	$\nearrow$	

$m=f(0)=b$ だから，(#) より $b>0$

(ii) $-\frac{2}{3}a \geqq 1$，つまり $a \leqq -\frac{3}{2}$ のとき，次の増減表を得る：

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min

$m=f(1)=a+b+1$ だから，(#) より $b>-a-1$

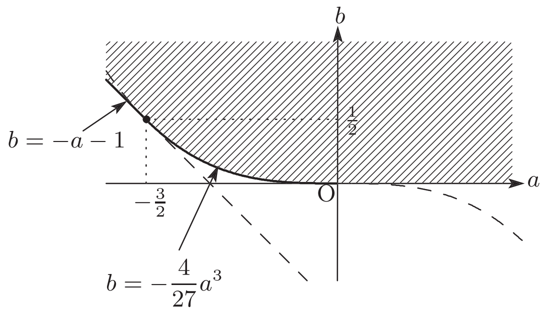
(iii) $0<-\frac{2}{3}a<1$，つまり $-\frac{3}{2}<a<0$ のとき，次の増減表を得る．

x	0	$\cdots$	$-\frac{2}{3}a$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$$m=f\left(-\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{27}a^3+b \text{ (極小かつ最小) だから，(\#) より } b>-\frac{4}{27}a^3$$

(i) から (iii) をまとめて，求める点 $(a,\ b)$ の存在範囲は次の図 1 の斜線部 (ただし，境界線上の点を含まない)．　**(答)**

図 1



【2】$y' = 4x^3 - 4x$ より $x = t$ における接線は

$$y = (4t^3 - 4t)(x - t) + t^4 - 2t^2 + 1$$

$$\therefore y = 4t(t^2 - 1)x - (t^2 - 1)(3t^2 + 1) \quad \cdots ①$$

これが x 軸を表すのは $t = \pm 1$ のときであるから，以下 $t \fallingdotseq 1$, $t \fallingdotseq -1$ の下で考える．

このとき① が $(a,\ 0)$ を通るとして

$$\begin{aligned} 0 = 4t(t^2 - 1)a - (t^2 - 1)(3t^2 + 1) &\iff 4ta - 3t^2 - 1 = 0 \\ &\iff 3t^2 - 4at + 1 = 0 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

題意は

(#)　② が $t = 1$, $t = -1$ のいずれとも異なる実数解を 1 個のみもつ

ことと同値であるから，この (#) が成立するための条件を求める．

② の左辺を $f(t)$ と置くと

$f(1) = -4a + 4,\ f(-1) = 4a + 4$

である．

(#) が成立するためには，次の (i), (ii), (iii) の内のいずれかが成り立つことが必要かつ十分である：

(i) $f(t) = 0$ が $t \fallingdotseq -1, t \fallingdotseq 1$ であるような重解をもつ．

(ii) $f(t) = 0$ の 1 解が -1 であり，他の解が 1, -1 のいずれでもない．

(iii) $f(t) = 0$ の 1 解が 1 であり，他の解が 1, -1 のいずれでもない．

- (i) のとき

  $f(t) = 0$ の判別式を D とすると

  $$\frac{D}{4} = 4a^2 - 3 = 0 \text{ かつ } \frac{2a}{3} \fallingdotseq 1 \text{ かつ } \frac{2a}{3} \fallingdotseq -1 \quad \therefore\ a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- (ii) のとき $f(-1) = 0$ より $a = -1$．このとき, 他の解は $-\dfrac{1}{3}$ であり，これは $t \fallingdotseq 1$, $t \fallingdotseq -1$ をみたす．

- (iii) のとき $f(1) = 0$ より $a = 1$．このとき, 他の解は $\dfrac{1}{3}$ であり，これは $t \fallingdotseq 1$, $t \fallingdotseq -1$ をみたす．

(i), (ii), (iii) より, 求める a の値は

$$a = \pm 1,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【3】任意の $f(x) \in Q$ について

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\;\mathrm{d}x = f'(0)$$

が成り立つから，特に

(i) $f(x) = x^2$,　(ii) $f(x) = x$,　(iii) $f(x) = 1$

が成り立つ．

$g(x)$ を $g(x) = ax^2 + bx + c$ と置く．以下，関数の偶奇性に着目して，定積分を計算する．

▼ $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ のとき，右辺は $f'(0) = 0$ である．

$$\int_{-1}^{1} x^2\left(ax^2 + bx + c\right)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{a}{5}x^5 + \frac{c}{3}x^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{a}{5} + \frac{c}{3}\right)$$

よって

$$\frac{a}{5} + \frac{c}{3} = 0 \quad \cdots ①$$

▼ $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ のとき，右辺は $f'(0) = 1$

$$\int_{-1}^{1} x\left(ax^2 + bx + c\right)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2b}{3}$$

よって

$$\frac{2b}{3} = 1 \quad \therefore\ b = \frac{3}{2} \quad \cdots ②$$

▼ $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$ のとき，右辺は $f'(0) = 0$．左辺は

$$\int_{-1}^{1} \left(ax^2 + bx + c\right)\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{a}{3}x^3 + cx\right]_0^1 = 2\left(\frac{a}{3} + c\right)$$

よって

$$\frac{a}{3} + c = 0 \quad \cdots ③$$

①と③より，$a = c = 0$ であるから，

$$g(x) = \frac{3}{2}x$$

が必要．

以下，$g(x) = \frac{3}{2}x$ が十分条件でもあること，つまり

$$g(x) = \frac{3}{2}x \text{ ならば } \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\;\mathrm{d}x = f'(0)$$

が，任意の $f(x) \in Q$ について成り立つことを示す．$f(x) = px^2 + qx + r$ と置けば

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x\left(px^2 + qx + r\right)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot 2\left[\frac{q}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{q}{3} = q$$

であり，また $f'(x) = 2px + q$ だから，$f'(0) = q$ である．よって

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\;\mathrm{d}x = f'(0)$$

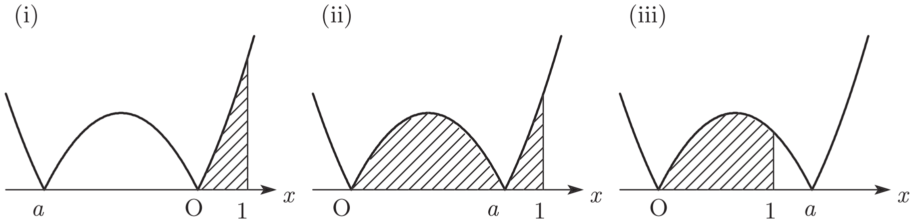
これが任意の $f(x) \in Q$ について成り立つから，$g(x) = \frac{3}{2}x$ で十分．

以上より，もとめる $g(x)$ は

$$g(x) = \frac{3}{2}x \qquad \text{(答)}$$

【4】右辺の定積分は，実数 a の値によって次の図 2 の斜線部の面積を表す．

図 2



まず定積分を計算する．

$$2\int_0^1 |t^2-at|dt = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^1 (t^2-at)\,dt & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 2\displaystyle\int_0^a (-t^2+at)\,dt + 2\displaystyle\int_a^1 (t^2-at)\,dt & (0<a\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 2\displaystyle\int_0^1 (-t^2+at)\,dt & (1<a \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a+\dfrac{2}{3} & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{2}{3}a^3-a+\dfrac{2}{3} & (0<a\leqq 1 \text{ のとき}) \\ a-\dfrac{2}{3} & (1<a \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで，$f(x)=x^2-ax-2\displaystyle\int_0^1 |t^2-at|dt$ と置く．

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$f(0)=-\left(-a+\frac{2}{3}\right)=a-\frac{2}{3}<0, \quad f(1)=1-a-\left(-a+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}>0$$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ における解は 1 個．

(ii) $0<a\leqq 1$ のとき

$$f(0)=-\left(\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}(2a^3-3a+2)=-\frac{1}{3}\{a^3+(a-1)^2(a+2)\}<0$$

$$f(1)=1-a-\left(\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}\left(a^3-\frac{1}{2}\right)$$

より，$f(1)$ の値が 0 以上なら 1 個，0 未満なら 0 個である．よって

$$0<a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ のとき 1 個，} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a\leqq 1 \text{ のとき 0 個．}$$

(iii) $1<a$ のとき

$$f(0)=-a+\frac{2}{3}<0, \quad f(1)=1-a-\left(a-\frac{2}{3}\right)=-2a+\frac{5}{3}<0$$

よって，$0 \leqq x \leqq 1$ における解は 0 個．

以上より，与方程式の $0 \leqq x \leqq 1$ における解は

$$a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ のとき 1 個，} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a \text{ のとき 0 個} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 条件をまとめれば

$$\begin{cases} p(x) \text{ は 1 次関数} \quad \cdots ① \\ \displaystyle\int_0^1 p(x)dx = 0 \quad \cdots ② \\ \displaystyle\int_0^1 \{p(x)\}^2 dx = 1 \quad \cdots ③ \\ p(0) > 0 \quad \cdots ④ \end{cases}$$

となる．

①, ④から $p(x) = Ax + B$ と置くと $A \fallingdotseq 0,\ p(0) = B > 0$ であり，②より

$$\int_0^1 (Ax+B)dx = \frac{1}{2}A + B = 0 \qquad \therefore \quad A = -2B \quad \cdots ②'$$

③より

$$\begin{aligned} \int_0^1 (Ax+B)^2 dx &= \int_0^1 (A^2x^2 + 2ABx + B^2)dx \\ &= \frac{1}{3}A^2 + AB + B^2 = 1 \quad \cdots ③' \end{aligned}$$

②′, ③′ より $4B^2 - 6B^2 + 3B^2 = 3,\ B > 0$ が成り立ち，よって

$B = \sqrt{3},\ A = -2\sqrt{3}$

であるから，求める 1 次関数 $p(x)$ は

$p(x) = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 　　(答)

(2) (1) の結果から，

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(-2\sqrt{3}x + \sqrt{3}\right) + b \\ &= -2\sqrt{3}ax + \left(b + \sqrt{3}a\right) \\ &= Cx + D \quad C \fallingdotseq 0 \end{aligned}$$

と置くことができる．これが恒等式ならば

$$C = -2\sqrt{3}a,\ D = b + \sqrt{3}a \quad \therefore \quad a = -\frac{C}{2\sqrt{3}},\ b = \frac{C}{2} + D \cdots ⑤$$

従って，任意の C ($\fallingdotseq 0$), D に対して, ⑤ により $a,\ b$ が定まるので, 任意の 1 次関数 $f(x)$ は

$f(x) = ap(x) + b$

と表される．　　　[証明終]

(3) ②, ③と条件より

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx = \int_0^1 \{ap(x)+b\}^2 dx$$
$$= a^2\int_0^1 \{p(x)\}^2 dx + 2ab\int_0^1 p(x)dx + b^2\int_0^1 dx$$
$$= a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots ⑥$$

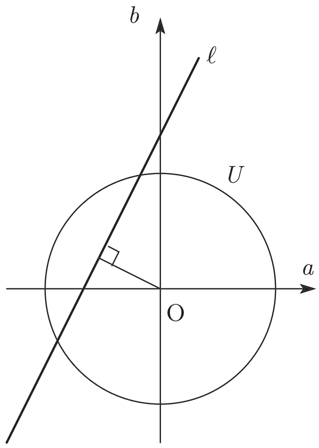
$f(x) = ap(x) + b$ から

$$f(1) = ap(1) + b = a\left(-2\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) + b$$

この値を k と置くと

$$\sqrt{3}a - b + k = 0 \quad \cdots ⑦$$

図 3



$(a,\ b)$ 平面上で⑥は単位円 U, ⑦は直線 ℓ を表すので，U と ℓ が共有点をもつ条件を考えて

$$\frac{|k|}{\sqrt{3+1}} \leqq 1 \quad \therefore\ |k| \leqq 2$$

以上より，求める範囲は

$$-2 \leqq f(1) \leqq 2 \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 与えられた 2 曲線を

$$\begin{cases} y = \dfrac{8}{27}x^3 & \cdots ① \\ y = (x+a)^2 & \cdots ② \end{cases}$$

とする．①を微分して,

$$y' = \frac{8}{9}x^2$$

①の $x = 3t$ における接線は,

$$y = 8t^2(x-3t) + 8t^3 \iff y = 8t^2x - 16t^3 \quad \cdots ③$$

②, ③より,

$$(x+a)^2 = 8t^2x - 16t^3$$

$$\iff x^2 + 2(a-4t^2)x + a^2 + 16t^3 = 0 \quad \cdots ④$$

条件より, ③は②とも接するので，判別式を考えて

$$(a-4t^2)^2 - a^2 - 16t^3 = 0$$

$$\iff t^2(2t^2 - 2t - a) = 0$$

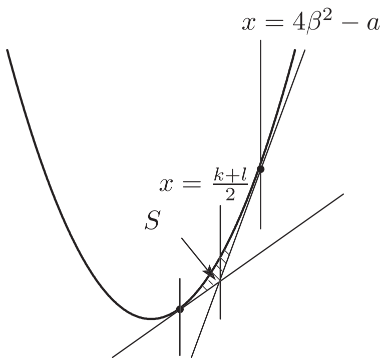
ここで, $t = 0$ のとき③は x 軸となるから，$2t^2 - 2t - a = 0$ が $t \fallingdotseq 0$ であるような異なる 2 実数解をもつことが必要かつ十分である.

従って,

$$a \fallingdotseq 0 \text{ かつ } 1 + 2a > 0 \iff -\frac{1}{2} < a < 0,\ 0 < a \qquad \text{(答)}$$

(2) $2t^2 - 2t - a = 0$ の 2 解を α, β とする．放物線との接点の x 座標は, ④の重解が $x = 4t^2 - a$ であることから，$4\alpha^2 - a$, $4\beta^2 - a$ と表される．これらをそれぞれ k, l (ただし $k < l$) と置く.

図 4



$y = (x+a)^2$ を微分して $y' = 2(x+a)$ であるから，$x = k$ における接線は,

$$y = 2(k+a)(x-k) + (k+a)^2$$

$$\therefore y = 2(k+a)x + a^2 - k^2$$

同様に, $x = l$ における接線は,

$$y = 2(l+a)x + a^2 - l^2$$

で, これらの交点の x 座標は $\dfrac{k+l}{2}$

よって,

$$\begin{aligned} S &= \int_k^{\frac{k+l}{2}} \left\{(x+a)^2-2(k+a)x-a^2+k^2\right\} dx \\ &\qquad + \int_{\frac{k+l}{2}}^{l} \left\{(x+a)^2-2(l+a)x-a^2+l^2\right\} dx \\ &= \int_k^{\frac{k+l}{2}} (x-k)^2\,dx + \int_{\frac{k+l}{2}}^{l} (x-l)^2\,dx \ = \ \left[\frac{(x-k)^3}{3}\right]_k^{\frac{k+l}{2}} + \left[\frac{(x-l)^3}{3}\right]_{\frac{k+l}{2}}^{l} \\ &= \frac{(l-k)^3}{12} \ = \ \frac{16\left|\beta^2-\alpha^2\right|^3}{3} \ = \ \frac{16\left|(\alpha+\beta)^3(\beta-\alpha)^3\right|}{3} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-\dfrac{a}{2} \\ |\beta-\alpha|=\sqrt{2a+1} \end{cases}$$

であるから,

$S=\dfrac{16}{3}(2a+1)^{\frac{3}{2}}$　　(答)

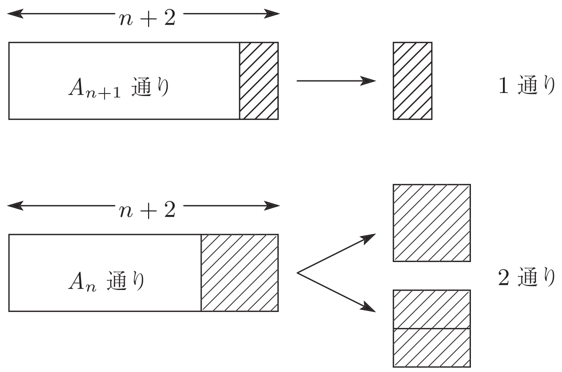
問題

【1】(1) 長さ $n+2$ の長方形を，

- 長さ $n+1$ の長方形から作る場合
- 長さ n の長方形から作る場合

に場合を分ける．次のような図で考える

図 1



(i) 長さ $n+1$ の長方形がある場合には，1×2 の長方形を縦にして最後につなげることによって，長さ $n+2$ の長方形を得る．

　このようにしてできる長さ $n+2$ の長方形の並べ方の総数は，長さ $n+1$ の長方形の並べ方の総数 A_{n+1} に等しい．

(ii) 長さ n の長方形がある場合には，2×2 の正方形を最後につなげることによって，長さ $n+2$ の長方形を得る．1×2 の長方形を横に並べてできる正方形は，(i) で考えてあるから，2 通りしかない．

　このようにしてできる長さ $n+2$ の長方形の並べ方の総数は，長さ n の長方形の並べ方の総数 A_n の 2 倍である．

従って，次の漸化式を得る

$A_{n+2}=A_{n+1}+2A_n$　　(答)

(2) 初期条件を求める．(1) で得た漸化式は 3 項間の漸化式であるから，A_1 と A_2 が必要である．

明らかに

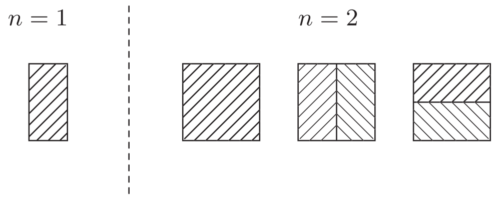
$$\begin{cases} A_1=1 \\ A_2=3 \end{cases}$$

であり, この初期条件の下に (1) の漸化式を解く.

$A_{n+2}=A_{n+1}+2A_n$ が，実数 α,β によって

$A_{n+2}-\alpha A_{n+1}=\beta\left(A_{n+1}-\alpha A_n\right)\Longleftrightarrow A_{n+2}-(\alpha+\beta)A_{n+1}+\alpha\beta A_n=0$

図 2 ：初期条件 A_1 と A_2



と変形されたとすれば，$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-2$ であるから，

$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 2)$，$(2,\ -1)$

である．

(i) $(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 2)$ のとき，

$$A_{n+2}+A_{n+1}=2\left(A_{n+1}+A_n\right)$$

であるから，数列 $\{A_{n+1}+A_n\}$ は公比 2 の等比数列であり，初項 $A_2+A_1=4$.

よって

$$A_{n+1}+A_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1} \quad \cdots ①$$

(ii) $(\alpha,\ \beta)=(2,\ -1)$ のとき，

$$A_{n+2}-2A_{n+1}=-\left(A_{n+1}-2A_n\right)$$

であるから，数列 $\{A_{n+1}-2A_n\}$ は公比 -1 の等比数列であり，初項 $A_2-2A_1=1$

よって

$$A_{n+1}-2A_n=1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1} \quad \cdots ②$$

①と②を連立して解けば，

$$A_n=\frac{2^{n+1}-(-1)^{n-1}}{3}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $a_k = n$ とすると，

$$n - \frac{1}{2} < \sqrt{k} < n + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad n^2 - n + \frac{1}{4} < k < n^2 + n + \frac{1}{4}$$

$n,\ k$ は自然数であるから，

$$n^2 - n + 1 \leqq k \leqq n^2 + n$$

よって，$a_k = n$ をみたす自然数 k は，

$$(n^2 + n) - (n^2 - n + 1) + 1 = 2n\ (\text{個})$$

存在する．したがって，

$$a_1 = a_2 = 1,$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2,$$

$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$$

すなわち

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12} a_k &= \sum_{i=1}^{3} i \cdot 2i = 2\sum_{i=1}^{3} i^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1) \\ &= \mathbf{28} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i \leqq 1998$ となる最大の n を求めると，

$$n(n+1) \leqq 1998$$

ここで，

$n = 44$ のとき，　$44 \times 45 = 1980 < 1998$

$n = 45$ のとき，　$45 \times 46 = 2070 > 1998$

となる．よって，数列 a_1，a_2，$\cdots\cdots$，a_{1998} は，

$$\overbrace{\overbrace{1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 43,\ \underbrace{44,\ \cdots,\ 44}_{88\ \text{個}}}^{1980\ \text{個}},\ \underbrace{45,\ \cdots,\ 45}_{1998-1980\ \text{個}}}^{1998\ \text{個}}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1998} a_k &= \sum_{i=1}^{44} i \cdot 2i + 45 \times (1998 - 1980) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 89 + 45 \cdot 18 \\ &= \mathbf{59550} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【3】この漸化式 $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$ で生成される数列を『フィボナッチ数列』(Fibonacci sequence) と呼ぶ.

以下，2 個の整数 a, b について，a が b を割り切ること，つまり b が a で割り切れることを $a \,\big|\, b$ で表す.

(1) 数学的帰納法 (MI) による.

I. $n = 1$ のとき，

$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$

であるから，確かに $2 \,\big|\, a_3$ が成り立つ.

II. k を正整数として，$n = k$ で成立を仮定する．つまり帰納法の仮定 (IH) は次である：

(IH)： $2 \,\big|\, a_{3k}$

示すべきことは，第 $3(k+1)$ 項について成り立つこと，つまり

$2 \,\big|\, a_{3(k+1)}$

である.

$n = k + 1$ のとき，

$$\begin{aligned} a_{3(k+1)} &= a_{3k+3} \\ &= a_{3k+2} + a_{3k+1} \\ &= (a_{3k+1} + a_{3k}) + a_{3k+1} \\ &= 2a_{3k+1} + a_{3k} \end{aligned}$$

(IH) より，これは 2 で割り切れるから，$2 \,\big|\, a_{3(k+1)}$ が成り立つ.

以上，I, II から，任意の n について $2 \,\big|\, a_{3n}$ が成り立つことが示された.

[証明終]

(2) k と n に関する条件から，n は $n \geqq 3$ である．そこで，任意に与えられた 3 以上の整数 n を固定する．この下で，k に関する数学的帰納法により，題意の式の成立を示す.

I. $k = 2$ のとき，$1 = a_2$, $1 = a_1$ であるから，

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} = a_2 a_{n-2+1} + a_{2-1} a_{n-2}$

より，このとき成立する.

II. j を $2 \leqq j < n - 1$ をみたす整数として，$k = j$ のとき成立を仮定する：

(IH) ： $a_n = a_j a_{n-j+1} + a_{j-1} a_{n-j}$

ここで，$n - j + 1 > 2$ であるから，(IH) の右辺について

$$\begin{aligned} a_j a_{n-j+1} + a_{j-1} a_{n-j} &= a_j \left(a_{n-j} + a_{n-j-1}\right) + a_{j-1} a_{n-j} \\ &= \left(a_j + a_{j-1}\right) a_{n-j} + a_j a_{n-j-1} \\ &= a_{j+1} a_{n-(j+1)+1} + a_{(j+1)-1} a_{n-(j+1)} \end{aligned}$$

よって，$k = j + 1$ のときも成り立つ.

I と II から，n が任意に固定されるとき，$2 \leqq k < n$ をみたす任意の整数 k について

$a_n = a_k a_{n-k+1} + a_{k-1} a_{n-k}$

が成り立つことが示された.

[証明終]

(3) n に関する数学的帰納法による．

I. $n=1$ のとき，$a_{nk}=a_k$ であるから，明らか．

II. $n=j$ で成立を仮定する：

(IH) ：$a_k \mid a_{jk}$

$n=j+1$ のとき，(2) で得た

$a_n = a_k a_{n-k+1} + a_{k-1}a_{n-k}$

で n を $(j+1)k$ と置くと

$$\begin{aligned} a_{(j+1)k} &= a_k a_{(j+1)k-k+1} + a_{k-1}a_{(j+1)k-k} \\ &= a_k a_{jk+1} + a_{k-1}a_{jk} \end{aligned}$$

第 1 項は a_k の倍数，また第 2 項も (IH) より a_k の倍数であるから，

$a_k \mid a_{(j+1)k}$

である．よって $n=j+1$ のときも成立する．

以上より，任意の n について題意が成り立つ． ［証明終］

【4】n に関する数学的帰納法による．そのために，次のように定義する：

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

I. $n=1$ のとき，左辺は $S_1 \cdot T_1 = a_1 \cdot \dfrac{1}{a_1} = 1$，右辺は 1^2 であるから，示すべき不等式は等号で成立する: $S_1 \cdot T_1 \geqq 1^2$

II. $n=k$ のとき，成立を仮定する：

(IH) ：$S_k \cdot T_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_k}\right) \geqq k^2$

$n=k+1$ のとき，$S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$，$T_{k+1} = T_k + \dfrac{1}{a_{k+1}}$ であるから，左辺は

$$\begin{aligned} S_{k+1}\cdot T_{k+1} &= (S_k + a_{k+1})\left(T_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) \\ &= S_k \cdot T_k + a_{k+1}\cdot T_k + \frac{1}{a_{k+1}}\cdot S_k + a_{k+1}\cdot\frac{1}{a_{k+1}} \\ &= S_k \cdot T_k + a_{k+1}\cdot T_k + \frac{1}{a_{k+1}}\cdot S_k + 1 \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

まず，(IH) より，①の第 1 項について

$S_k \cdot T_k \geqq k^2$

第 2 項と第 3 項について

$$a_{k+1}\cdot T_k + \frac{1}{a_{k+1}}\cdot S_k$$

$$= a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{a_{k+1}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$$

$$=\left(\frac{a_{k+1}}{a_1}+\frac{a_1}{a_{k+1}}\right)+\left(\frac{a_{k+1}}{a_2}+\frac{a_2}{a_{k+1}}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}+\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{a_{k+1}}{a_j}+\frac{a_j}{a_{k+1}}\right) \qquad \cdots ②$$

となるが，$j=1, 2, \cdots, k$ について相加平均と相乗平均の関係により

$$\frac{a_{k+1}}{a_j}+\frac{a_j}{a_{k+1}} \geqq 2\sqrt{\frac{a_{k+1}}{a_j}\cdot\frac{a_j}{a_{k+1}}}=2$$

であるから，

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{a_{k+1}}{a_j}+\frac{a_j}{a_{k+1}}\right) \geqq \underbrace{2+2+\cdots+2}_{k\text{ 個}}=2k \qquad \cdots ③$$

従って②，③ より

$$a_{k+1}\cdot T_k+\frac{1}{a_{k+1}}\cdot S_k \geqq 2k \qquad \cdots ④$$

が成り立つ.

(IH), ① と④とから，

$$S_{k+1}T_{k+1} \geqq k^2+2k+1=(k+1)^2$$

が成立し，従って $n=k+1$ のときも与えられた不等式が成り立つ.

以上 I. と II. により，任意の正整数 n について，題意の不等式が成り立つ.

［証明終］

【5】与えられた第 2 式について

$$f_{n+1}(x)=6x\int_0^1 f_n(t)dt-2\int_0^1 tf_n(t)dt$$

ここで

$$\int_0^1 f_n(t)dt=a_n,\ \int_0^1 tf_n(t)dt=b_n$$

とすると

$$f_{n+1}(x)=6a_nx-2b_n$$

従って

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\int_0^1 f_{n+1}(t)dt & b_{n+1}&=\int_0^1 tf_{n+1}(t)dt\\ &=\int_0^1 (6a_nt-2b_n)\,dt & &=\int_0^1 \left(6a_nt^2-2b_nt\right)dt\\ &=\left[3a_nt^2-2b_nt\right]_0^1 & &=\left[2a_nt^3-b_nt^2\right]_0^1\\ &=3a_n-2b_n & &=2a_n-b_n \end{aligned}$$

また，$f_1(x)=2$ であるから，

$$a_1=\int_0^1 2dt=2,\quad b_1=\int_0^1 2tdt=\left[t^2\right]_0^1=1$$

であるから，結局次の連立漸化式が得られた：

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 2a_n - b_n \end{cases}$$

以下，この漸化式を解く．

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} - 2b_{n+1} = 3a_{n+1} - 2\,(2a_n - b_n) \\ &= 3a_{n+1} - 4a_n + 2b_n \\ &= 3a_{n+1} - 4a_n + (3a_n - a_{n+1}) = 2a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n = \cdots = a_2 - a_1$$

であり，また

$$a_2 = 3a_1 - 2b_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 \quad \therefore\ a_2 - a_1 = 2$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は公差 2，初項 2 の等差数列となり，

$$a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$$

また，$a_{n+1} = 3a_n - 2b_n$ であるから

$$2b_n = 3a_n - a_{n+1} = 3 \cdot 2n - 2(n+1) = 4n - 2 \quad \therefore\ b_n = 2n - 1$$

以上より，$n \geqq 1$ の下で

$$f_{n+1}(x) = 6a_n x - 2b_n = 6(2n)x - 2(2n-1) = 12nx - 4n + 2$$

を得たから，$n \geqq 2$ の下で

$$f_n(x) = 12(n-1)x - 4(n-1) + 2 = 12(n-1)x - 4n + 6 \qquad \cdots (\#)$$

この式で，$n = 1$ とすると，右辺は 2 となり $f_1(x) = 2$ に一致する．よって $(\#)$ は $n = 1$ でも正しい．

以上より，任意の正整数について求める $f_n(x)$ は，

$$f_n(x) = 12(n-1)x - 4n + 6 \qquad \text{(答)}$$

【6】与式より,

$$x_k - x_{k-1} < x_{k+1} - x_k$$

であるから,

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \cdots\cdots < x_n - x_{n-1} \qquad \cdots\cdots①$$

ここで, 次のようにして場合分けして考える.

(i) $0 \leqq x_2 - x_1$ のとき, ①より,

$$0 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \cdots\cdots < x_n - x_{n-1}$$

となるので,

$$x_1 \leqq x_2 < x_3 < x_4 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n$$

よって, x_1, x_2, $\cdots\cdots$, x_n の最小値 x_l は

$$x_l = x_1 \quad \text{または} \quad x_l = x_1,\ x_2$$

となるので, l の個数は 1 または 2 である.

(ii) $x_n - x_{n-1} \leqq 0$ のとき, ①より,

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \cdots\cdots < x_{n-1} - x_{n-2} < 0$$

となるので,

$$x_n \leqq x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots\cdots < x_3 < x_2 < x_1$$

よって, x_1, x_2, $\cdots\cdots$, x_n の最小値 x_l は

$$x_l = x_n \quad \text{または} \quad x_l = x_{n-1},\ x_n$$

となるので, l の個数は 1 または 2 である.

(iii) (i), (ii) 以外のとき,

$$x_k - x_{k-1} \leqq 0 < x_{k+1} - x_k$$

をみたす k $(2 \leqq k \leqq n-1)$ が存在し, ①より,

$$\begin{cases} x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \cdots\cdots < x_k - x_{k-1} \leqq 0 \\ 0 < x_{k+1} - x_k < x_{k+2} - x_{k+1} < \cdots\cdots < x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

となる. これより,

$$\begin{cases} x_1 > x_2 > x_3 > \cdots\cdots > x_{k-1} \geqq x_k \\ x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n \end{cases}$$

よって, x_1, x_2, $\cdots\cdots$, x_n の最小値 x_l は

$$x_l = x_k \quad \text{または} \quad x_l = x_{k-1},\ x_k$$

となるので, l の個数は 1 または 2 である.

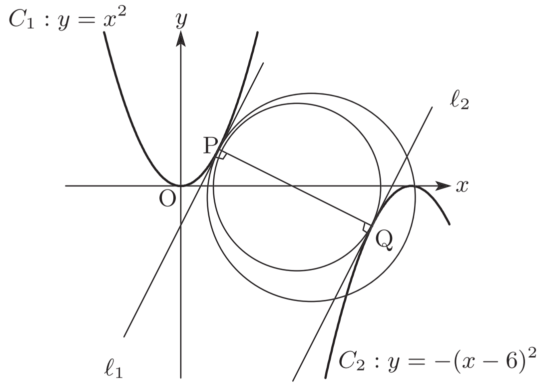
以上により, 題意が示された. 〔証明終〕

4章　図形（1）

問題

【1】図 1 のように，それぞれ 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-(x-6)^2$ に接する互いに平行な 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 を引く．このときの 2 つの接線の接点を P，Q とする．

図 1



2 接線 ℓ_1, ℓ_2 の平行性を保ちながら，接点 P, Q を動かし，線分 PQ をこれらの接線 ℓ_1，ℓ_2 に直交させる．このときの接点 P, Q をそれぞれ $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ とする．

まず，題意の動く円 C と放物線 C_1 が点 $\mathrm{P_0}$ で接するとき，円 C は直線 ℓ_1 と点 $\mathrm{P_0}$ で接することに着目する．

- 円 C の直径が 2 点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ の距離 $\mathrm{P_0Q_0}$ より小さければ，明らかに，連立不等式の表す平面上の領域の中を円 C は自由に動くことができる．
- 逆に大きければ，円 C と放物線 C_1 が点 $\mathrm{P_0}$ で接するとき，C は直線 ℓ_1 に接するから，円 C の点 $\mathrm{P_0}$ を一方の端点とする直径は線分 $\mathrm{P_0Q_0}$ に重なり，かつそれより大きいので，円 C の一部は $y \geqq -(x-6)^2$ で定まる領域の境界の外に出る．(図 1 の大きい方の円を参照のこと).

したがって，求める半径 r の最大値は

$$\frac{\mathrm{P_0Q_0}}{2}$$

である．

次に，$\mathrm{P_0}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q_0}(t,\ -(t-6)^2)$ とする．2 接線 ℓ_1, ℓ_2 が平行であることから

$$2s=-2(t-6) \quad \therefore \quad s+t=6 \quad \cdots ①$$

接線 ℓ_1 と $\mathrm{P_0Q_0}$ が直交していることから

$$2s \cdot \frac{s^2+(t-6)^2}{s-t} = -1 \quad \cdots ②$$

①，②より

$$2s \cdot \frac{s^2+(-s)^2}{2s-6} = -1 \quad \therefore \quad 2s^3+s-3=(s-1)(2s^2+2s+3)=0$$

第 2 因子からは実数解が得られないので

$$s=1,\ t=5$$

従って

$P_0(1,\ 1)$, $Q_0(5,\ -1)$

となり，動円 C の半径 r の最大値は

$$\max r = \frac{\sqrt{(1-5)^2+(1+1)^2}}{2} = \sqrt{5} \qquad \text{(答)}$$

【2】 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = -2x^2+3ax+6a^2$ として，C_1 と C_2 の共有点を考える．連立して

$x^2 = -2x^2+3ax+6a^2$

より

$$\begin{aligned} & x^2-ax-2a^2=0 \\ \iff\ & (x-2a)(x+a)=0 \end{aligned}$$

よって，$a>0$ より $y=x^2$ と $y=-2x^2+3ax+6a^2$ は常に交点をもち，その x 座標は

$x=-a,\ 2a$

である．

(I) まず，最大値について考える．領域 D 内では常に

$x^2 \leqq -2x^2+3ax+6a^2$

が成り立つ．また，x をある値に固定する (ただし $-a \leqq x \leqq 2a$) と，$x+y$ が最大となるのは，y をできるだけ大きくした場合だから

$y=-2x^2+3ax+6a^2$

上の点を考えれば十分である．

$x+y=k$ とすると，

$$\begin{aligned} k &= x+y \\ &= x+(-2x^2+3ax+6a^2) \\ &= -2x^2+(3a+1)x+6a^2 \\ &= -2\left(x-\frac{3a+1}{4}\right)^2+\frac{(3a+1)^2}{8}+6a^2 \\ &= -2\left(x-\frac{3a+1}{4}\right)^2+\frac{57a^2+6a+1}{8} \end{aligned}$$

これより，

- $\dfrac{3a+1}{4} \leqq 2a \iff a \geqq \dfrac{1}{5}$ のとき

  $x=\dfrac{3a+1}{4}$ で最大値をとり，その値は $\max k = \dfrac{57a^2+6a+1}{8}$

- $\dfrac{3a+1}{4} > 2a \iff a < \dfrac{1}{5}$ のとき

  $x=2a$ で最大値をとり，その値は $\max k = 4a^2+2a$

(II) 次に最小値について考える．x を固定すると $x+y$ が最小となるのは，y をできるだけ小さくした場合だから

$y=x^2$

上の点を考えれば十分．ここで

$$\begin{aligned} k &= x+y = x+x^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

これより，

- $-a \leqq -\dfrac{1}{2} \iff a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

  $x = -\dfrac{1}{2}$ で最小値をとり，その値は $\min k = -\dfrac{1}{4}$

- $-a \geqq -\dfrac{1}{2} \iff a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

  $x = -a$ で最小値をとり，その値は $\min k = a^2 - a$

以上をまとめて，次を得る：

$$\max(x+y) = \begin{cases} \dfrac{57}{8}a^2 + \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{8} & \left(a \geqq \dfrac{1}{5}\right) \\ 4a^2 + 2a & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{5}\right) \end{cases} \qquad (答)$$

$$\min(x+y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4} & \left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right) \\ a^2 - a & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \qquad (答)$$

【3】 $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$ の $x = t$ での接線は，$y' = x$ より，$y = tx - \dfrac{1}{2}t^2 + 1$ である．この接線が円と接するので

$$\frac{\left|-\dfrac{1}{2}t^2 + 1\right|}{\sqrt{t^2+1}} = r \quad \therefore \ \frac{1}{4}t^4 - (1+r^2)t^2 + 1 - r^2 = 0$$

$t^2 = X \ (\geqq 0)$ とおき，

$$\frac{1}{4}X^2 - (1+r^2)X + 1 - r^2 = 0 \qquad \cdots (\#)$$

の解を α, β とする．$(\#)$ の判別式を D とすると

$$D = (1+r^2)^2 - (1-r^2) = r^4 + 3r^2 > 0$$

よって α, β は実数である．ここで, $\beta < \alpha$ とする．

(I) $\alpha \cdot \beta = 4(1-r^2) \leqq 0$ のとき，正の解 $X = \alpha$ の 2 つの平方根 $t = \pm\sqrt{\alpha}$ が 2 つの接点の x 座標である．

この 2 つの接線が直交するので

$$(\sqrt{\alpha}) \cdot (-\sqrt{\alpha}) = -1 \quad \therefore \ \alpha = 1$$

よってこのとき $X = \alpha^2 = 1$ が $(\#)$ の解となるから,

$$r^2 = \frac{1}{8}$$

これは, $1 - r^2 \leqq 0$ に反するので, 不適.

(II) $\alpha \cdot \beta = 4(1-r^2) > 0$ のとき, $t = \pm\sqrt{\alpha}$, $\pm\sqrt{\beta}$ である．したがって, 次の 2 つの場合が考えられる．

(i) $(\sqrt{\alpha}) \cdot (-\sqrt{\alpha}) = -1$ のとき，$\alpha = 1$ である．

$X = 1$ が $(\#)$ の解であるから

$$r^2 = \frac{1}{8} \quad \therefore \ r = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

これは条件 $1 - r^2 > 0$ をみたす.

図２：接点が y 軸対称のとき

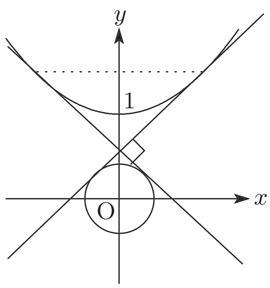
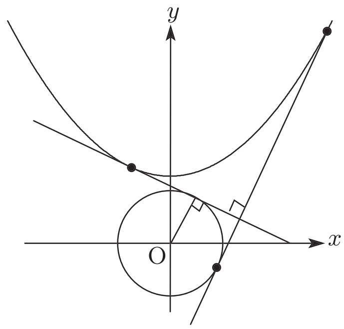


図３：y 軸対称でないとき



(ii) $(\sqrt{\alpha})\cdot(-\sqrt{\beta})=-1$ のとき，$\alpha\cdot\beta=1$

これより, $4(1-r^2)=1$ となり

$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より，求める半径は

$$r=\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【4】円 $x^2+y^2=\cos^2 a$ を C，直線 $x\sin b+y\cos b=\cos b$ を ℓ とする．

(1) 円 C の中心 $\mathrm{O}\,(0,\,0)$ と直線 ℓ との距離 $\mathrm{dist}\,(\mathrm{O},\ \ell)$ が円の半径 $|\cos a|$ より小さい場合であるから

$$\frac{|-\cos b|}{\sqrt{\sin^2 b+\cos^2 b}}<|\cos a|$$

が成り立つ.

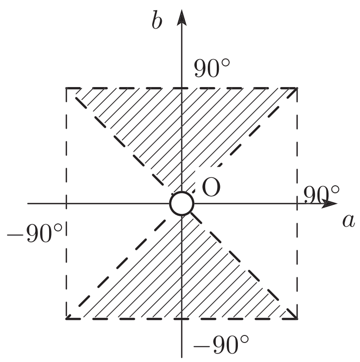
$-90^\circ<a<90^\circ$，$-90^\circ<b<90^\circ$ であるから

$\cos b<\cos a$

再び $-90^\circ<a<90^\circ$，$-90^\circ<b<90^\circ$ より

$|b|>|a|$

図４



従って (a, b) の存在領域は図 4 の斜線部となる．ただし，境界を含まず，また原点 O を含まない．　　　　(答)

(2) 円 C と直線 ℓ が接するとき，接点は，2 直線

$$x\sin b + y\cos b = \cos b,\ x\cos b - y\sin b = 0$$

の交点である．連立して解くと

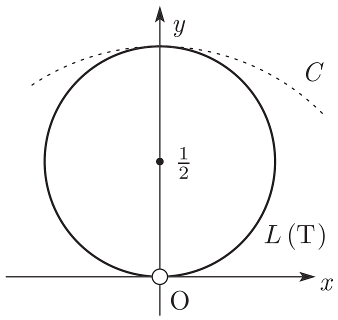
$$\begin{cases} x = \sin b\cos b = \dfrac{1}{2}\sin 2b, \\ y = \cos^2 b = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2b) \end{cases}$$

$-90^\circ < b < 90^\circ$ より，$-180^\circ < 2b < 180^\circ$ であるから，求める軌跡は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となり，円になる．ただし，$(x,\ y) \fallingdotseq (0,\ 0)$ より原点を除く．

図 5



これを図示して図 5 の $L\,(\mathrm{T})$ を得る．　　　　(答)

【5】正 3 角形の 1 辺の長さを 1 とし，頂点 A を原点 O に，また頂点 B を点 $(1, 0)$ に重ねる．1 辺が 1 の正 3 角形の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすることができる．
頂点 A からでた光が直進して，辺 BC で入射角と反射角が等しく反射するならば，
$\triangle$ABC を BC を軸として折り返すとき，反射した光線も対称に移動することによって，
光は直進すると考えることができる．図 6 を参照せよ．

図 6 ：反射と折り返し

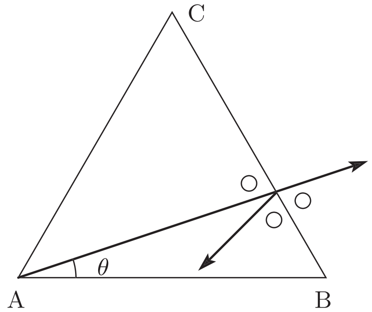
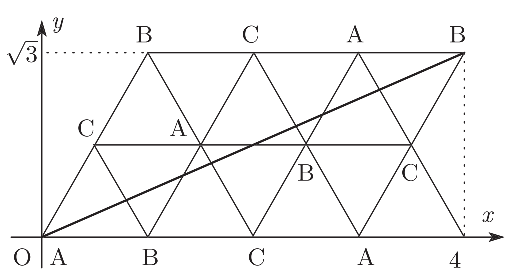


図 7



(1) $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから，頂点 A から出た光の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ である．x 成分は AB の 4 倍であり，y 成分は △ABC の高さの 2 倍であるから，図 7 の太線で描かれた線分を考えることができる．

正 3 角形のマス目に順に頂点を書き込んでいけば，点 $\left(4,\ \sqrt{3}\right)$ には，頂点 B が対応することが解る．従って，光線が反射して達する頂点は B である．　　(答)

(2) (1) と同様に，△ABC を折り返して光線を直進させることによって，光線が点 P に達してとまったとする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$はある正整数 m と n によって

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と表されて，さらに m と n は互いに素である．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + \frac{n}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}n \end{pmatrix}$

となる．

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \begin{pmatrix} 6k+2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \sqrt{3}\left(m + \dfrac{n}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}n\,(6k+2)$

となり，整理して

$2m + n = n(6k+2) \quad \therefore\ 2m = (6k+1)n$

m と n が互いに素であるから，n は 2 を割り切る．従って $n = 1$ または $n = 2$ のいずれかであるが，$n = 1$ のときは $2m = 6k+1$ となる．これは，左辺が偶数，右辺が奇数になるから不適．よって $n = 2$ となり，$m = 6k+1$ と定まる．以上より

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (6k+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

△ABC を順に折り返して並べたとき，x 軸上には，原点から順に

A, B, C, A, B, C, $\cdots$

と並ぶ．もう 1 度，図 7 を見られたい．これは，N, j を非負整数として点 Q_N を $\mathrm{Q}_N(N,\ 0)$ とするとき，

$$\begin{cases} \mathrm{Q}_N = \mathrm{A} \Longleftrightarrow N = 3j \\ \mathrm{Q}_N = \mathrm{B} \Longleftrightarrow N = 3j+1 \\ \mathrm{Q}_N = \mathrm{C} \Longleftrightarrow N = 3j+2 \end{cases}$$

であることを意味する．

$6k+1 = 3\cdot 2k + 1$ であるから，$(6k+1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}_{6k+1}}$ とすれば，

$\mathrm{Q}_{6k+1}\,(6k+1,\ 0) = \mathrm{B}$

である．

求める点 P について，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}_{6k+1}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

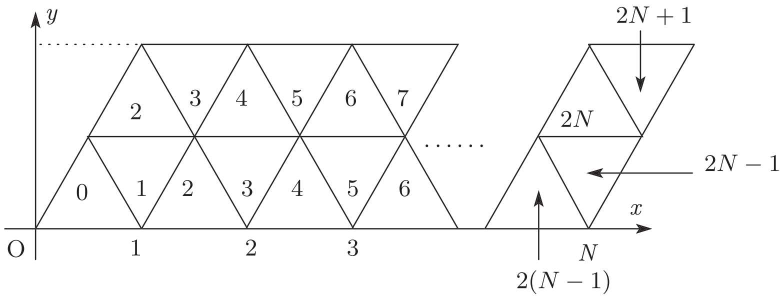
であるが，点 B に対応する点から$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$方向には

B, A, C, B, A, C, $\cdots$

のように頂点が並ぶから，求める点は C と解る．

次に題意の光線が反射する回数を求める．一般に，ある頂点に達するまでに反射する回数は，光線を直進させたときにできる正 3 角形の折り返しの回数に等しい．

図 8



そこで，折り返してできた正 3 角形に，折り返しの回数を書き込んでみると，図 8 のようになる．厳密には数学的帰納法によるが，図からも明らかであろう．

点 $\mathrm{Q}_N\,(N, 0)$ から $2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だけ進んだ点を頂点にもつ正 3 角形の折り返しの回数は $2N+1$ であるから，$N=6k+1$ を代入して

$$2N+1=2(6k+1)+1=12k+3$$

となる．

以上より

到達する頂点は C であり，反射の回数は $12k+3$　　(答)

【6】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ と置くと, 条件 (i) より

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0 \quad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a} \quad \cdots①$$

よって

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0 \quad \therefore\ \mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$$　　[証明終]

(2) (ii) より

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\triangle\,\mathrm{OBC}=\triangle\,\mathrm{OCA}$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{a}\right|^2-\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)^2}$$

が成り立つ．①より

$$\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{a}\right|^2 \quad \therefore\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$$

すなわち

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$$

同様に考えると, (i)，および (ii) の

$$\triangle\,\mathrm{ABC}=\triangle\,\mathrm{ACO}=\triangle\,\mathrm{AOB}$$

から

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AO}$$

を得る．また, (i)，および (ii) の

$$\triangle\,\mathrm{BCO}=\triangle\,\mathrm{BOA}=\triangle\,\mathrm{BAC}$$

から

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BO} = \mathrm{BA}$$

を得るので, まとめると

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$$

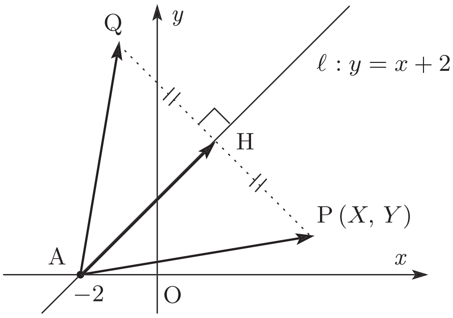
したがって, 4 面体 OABC は正 4 面体である.　　　[証明終]

5章　図形（2）

問題

【1】$C: y=x^2$，$\ell: y=x+2$ とし，ℓ と x 軸との交点を $\mathrm{A}\,(-2,\,0)$ とする．

図 1



C 上の点 $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$ が ℓ に関する対称移動によって Q に移り，かつ Q がやはり C 上にあるとする．このとき，ℓ は線分 PQ の垂直 2 等分線であり，ℓ と PQ の交点を H とすれば，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$の ℓ への正射影ベクトルである．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=2\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

が成り立つ．

ℓ の方向ベクトル$\overrightarrow{d}$は $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$の ℓ への正射影 $\overline{\mathrm{AH}}$ は

$$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{d}\right|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X+2\\Y\end{pmatrix}=\frac{X+Y+2}{\sqrt{2}}$$

よって，正射影ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$は

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AH}}\frac{\overrightarrow{d}}{\left|\overrightarrow{d}\right|}=\frac{X+Y+2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{X+Y+2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

これを用いて，対称に移したベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を求めれば

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(X+Y+2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X+2\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y\\X+2\end{pmatrix}$$

となるから，点 Q の位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$は

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}Y\\X+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y-2\\X+2\end{pmatrix}$$

である．

点 $\mathrm{P}\,(X,\,Y)$，$\mathrm{Q}\,(Y-2,\,X+2)$ がいずれも $C: y=x^2$ 上にあるから，次が成り立つ：

$$\begin{cases}Y=X^2,\\X+2=(Y-2)^2\end{cases}\iff X+2=\left(X^2-2\right)^2\iff X^4-4X^2-X+2=0\cdots(\#)$$

この 4 次方程式を解けば P の x 座標を求めることができる．

C と ℓ との交点 $\mathrm{B}\,(2,\,4)$，$\mathrm{C}\,(-1,\,1)$ は ℓ に関する対称移動によって自分自身に移るから，この 4 次方程式は $X=2,\,-1$ を解にもつ．従って $(\#)$ は $(X-2)(X+1)$ を因数

にもち，

$$(X-2)(X+1)\left(X^2+X-1\right)=0$$

と分解される．よって $X=2,\ -1$ 以外の解は 2 次方程式 $X^2+X-1=0$ の解である．

これを解いて

$$X=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad \therefore\ Y=X^2=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}$$

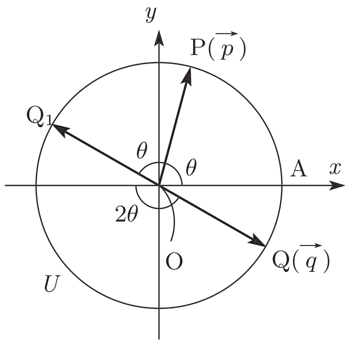
以上より求める点は，複号を同順に読んで，次の 4 点である：

$$(2,\,4),\ (-1,\,1),\ \left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\,\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \text{(答)}$$

【2】O を xy 座標平面の原点とし，U をその単位円 $x^2+y^2=1$ とする．U は任意角の回転対称性をもつから，一般性を失うことなく A$(1,0)$ とすることができる．

P$(\overrightarrow{p})$，Q$(\overrightarrow{q})$ とし，さらに $\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とする．ここで $0\leqq\theta<2\pi$.

図 2



(1) いま，$\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ とすると，与えられた条件式より

$$\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-2\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}-2\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\cos^2\theta\\ -2\sin\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-\cos2\theta\\ -\sin2\theta\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\cos2\theta\\ \sin2\theta\end{pmatrix}$$

従って，

$|\overrightarrow{q}|=1$，$\therefore$ OQ $=1$　　(答)

(2) (1) より点 Q$(-1,0)$ となるから，

$$-\begin{pmatrix}\cos2\theta\\ \sin2\theta\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\quad\therefore\begin{cases}\cos2\theta=1\\ \sin2\theta=0\end{cases}$$

となる．A$(\overrightarrow{a})$ とする：$\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$0\leqq2\theta<4\pi$ より $2\theta=0,\ 2\pi$ だから，$\theta=0,\ \pi$

(i) $\theta=0$ のとき，$\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\overrightarrow{a}$ となり，点 P は点 A と一致する．

このとき，$\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ であるから，Q$(-1,0)$ となり，確かに 3 点 (A，O，Q) はこの順に共線になる．

(ii) $\theta=\pi$ のとき，$\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=-\overrightarrow{a}$ となる．

このとき，$\overrightarrow{q}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$ より，Q$(-1,0)$ で，Q は A の対心点となり，題意をみたす．

以上より，題意をみたす P の位置は，P が点 A に一致するか，または A の対心点となる場合に限る．　　(答)

(3) 点 P が U を 1 周するから，$\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ について，θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で動くと考えられる．

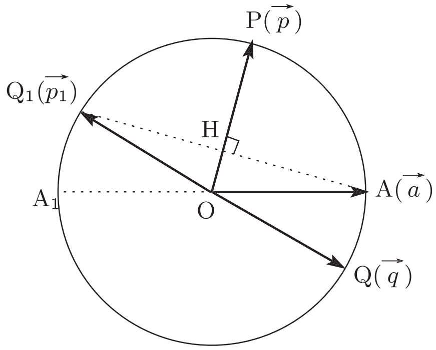
点 $\mathrm{Q_1}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix}$ と定めれば，Q は $\mathrm{Q_1}$ の対心点である．$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$ の偏角 (x 軸正方向となす，反時計回りに計った角) は 2θ であり，また $\overrightarrow{p}$ の偏角は θ であるから，P が A を出発して U を 1 周する間に，$\mathrm{Q_1}$ も A を同時に出発して 2 周する．従って，$\mathrm{Q_1}$ の対心点 Q は，A の対心点 $\mathrm{A_1}\,(-1,\,0)$ を出発して，反時計回りに 2 周する．

以上より，

点 Q は A の対心点を出発して，P と同じ向きに 2 周する．　　(答)

cf.　$\mathrm{A}(\overrightarrow{a})$ とする．

図 3 ：正射影と鏡映ベクトル



$\overrightarrow{q}=\overrightarrow{a}-2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{p}$ について，

$\overrightarrow{q_1}=-\overrightarrow{q}=2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}$

である．実は，$\mathrm{Q_1}(\overrightarrow{q_1})$ は，直線 OP に関して $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を対称移動したベクトルである (これを「OP に関する $\overrightarrow{a}$ の鏡映ベクトル」と言う)．

実際，$\overrightarrow{p}$ への $\overrightarrow{a}$ の正射影を $\overline{\mathrm{OH}}$ とすれば，

$$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{a}$$

であるから，$\overrightarrow{p}$ への $\overrightarrow{a}$ への正射影ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OH}}\frac{\overrightarrow{p}}{|\overrightarrow{p}|}=(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{p}$$

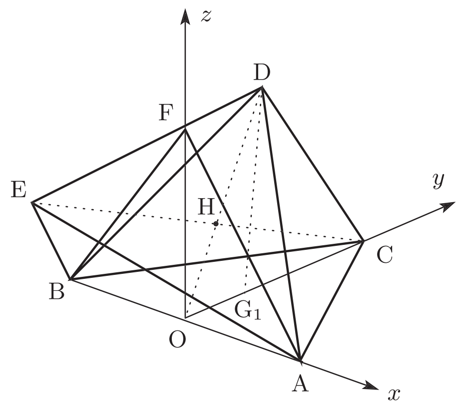
従って，鏡映ベクトル $\overrightarrow{q_1}=\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$ は

$\overrightarrow{q_1}=\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{a}+2(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{a})=2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}$

つまり，本問のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の直線 OP に関する鏡映ベクトルの逆ベクトルであった．

【3】原点を O として，題意の正 4 面体を描くと，図 4 のようになる．

図 4



(1) D(x, y, z) ($z \geqq 0$) とする．D から平面 ABC に下ろした垂線の足 G_1 は △ABC の重心であるから，線分 CO を 2 : 1 に内分する点である．OD = OC = $\sqrt{3}$ であるから，$G_1(x, y, 0)$ について

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2+y^2+z^2=3, \quad z \geqq 0$$

よって，$\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ である．

また点 E，C から平面 ABD に下ろした垂線の足は，いずれも △DBA の重心であるから，線分 DO を 2 : 1 に内分する．この点を H とすれば，垂線の長さは等しいから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ -7\sqrt{3} \\ 4\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

以上より，E の座標は

$$\mathrm{E}\left(0,\ -\frac{7\sqrt{3}}{9},\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) 辺 DE と平面 $y=0$ との交点を F とおくと，4 面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分は 4 面体 ABFE である．D，E の y 座標に注目すると

$$\mathrm{EF} : \mathrm{FD} = \left|-\frac{7\sqrt{3}}{9}\right| : \frac{\sqrt{3}}{3} = 7 : 3$$

であるから，

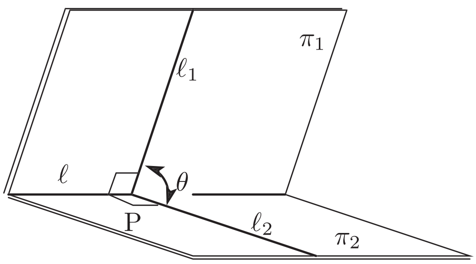
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ -7\sqrt{3} \\ 4\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

である．また，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABF}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{9} = \frac{7\sqrt{2}}{15} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) いま，2 平面 π_1, π_2 が交わり，その交線を ℓ とする．交線 ℓ 上に 1 点 P をとり，P で平面 π_1, π_2 に含まれる垂線を立てる．それぞれ直線 ℓ_1, ℓ_2 としよう．

図 5 ：2 平面のなす角



このとき，点 P で交わる 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 を含む平面 π が一意的に定まる．この平面上で測った，2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を，2 平面 π_1, π_2 のなす角と定義する．図 5 の θ である．

このように，2 平面 π_1, π_2 のなす角が θ であるとき，

$\angle(\pi_1,\, \pi_2) = \theta$

と書く．この場合，つまり平面同士のなす角も，直線の場合と同様に，

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

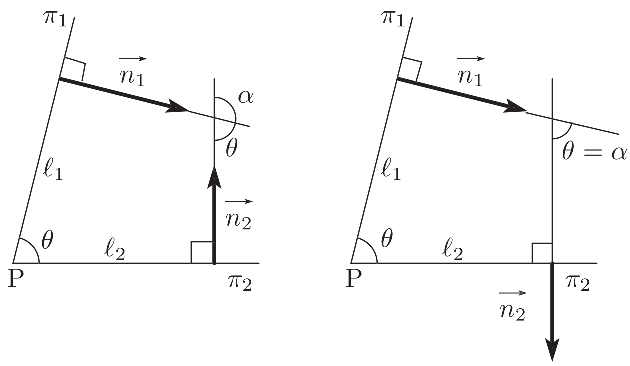
と定める．

π_1，π_2 それぞれの法線ベクトルを $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ とする．

このとき，π_1, π_2 のなす角 $\angle(\pi_1,\, \pi_2) = \theta$ と，2 つの法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ のなす角 $\angle\left(\overrightarrow{n_1},\, \overrightarrow{n_2}\right) = \alpha$ の関係を考えよう．

図 5 での 2 直線 ℓ_1 と ℓ_2 を含む平面による断面を描いたのが，図 6 である．

図 6 ：2 平面のなす角



この図から，次のように言える：

- 法線ベクトル同士のなす角 $\alpha = \angle\left(\overrightarrow{n_1},\, \overrightarrow{n_2}\right) > \dfrac{\pi}{2}$ のとき (左側の図) には，平面同士のなす角 $\theta = \angle(\pi_1,\, \pi_2)$ は $\theta = \pi - \alpha$ である．
- 法線ベクトル同士のなす角 $\alpha = \angle\left(\overrightarrow{n_1},\, \overrightarrow{n_2}\right) \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき (右側の図) には，平面

同士のなす角 $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$ は $\theta = \alpha$ である．

従って，

法線ベクトルのなす角が鋭角ならば，平面のなす角はそれに一致し，

法線ベクトルのなす角が鈍角ならば，平面のなす角はその補角である．　　　(答)

(2) まず，空間に含まれる平面上の図形の，別の平面への正射影の面積について考察する．図 7 を見られたい．

図 7 ：正射影の面積

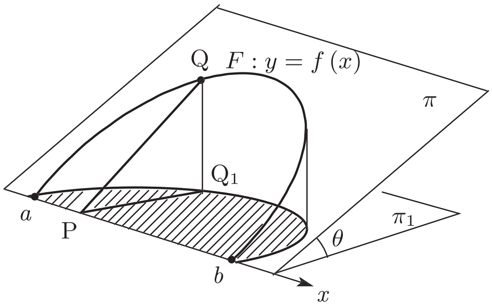
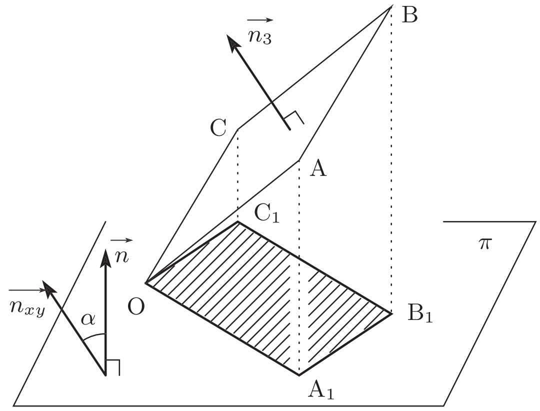


図 8 ：正方形の正射影



平面 π 上の図形 F が π 上の適当な xy 座標系で $y = f(x)$ (ただし $f(x) \geqq 0$) で表されたとする．π と角 θ をなす平面 π_1 に F を正射影してできる図形 F_1 の面積を，元の図形 F の面積で表そう．

F 上の点 Q から交線に下ろした垂線の足を P とする．また，Q の正射影を Q_1 とすると，直角 3 角形 QPQ_1 で $PQ_1 = PQ\cos\theta$ である．

図形 F の面積を S とし，$PQ = f(x)$ であるとすれば，$S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ であり，また $PQ_1 = \cos\theta f(x)$ である．このとき，正射影 F_1 の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_a^b \cos\theta f(x)\,dx = \cos\theta \int_a^b f(x)\,dx = \cos\theta \cdot S$$

となる．

以上を用いて，(2) の解法に入ろう．まず，xy 平面に含まれる正方形の，平面 π への正射影の面積を求める．図 8 を見られたい．

求める面積は，与えられた立方体の，原点 O を頂点とする 3 個の正方形を，平面 π に正射影してできる平行 4 辺形の面積の和に等しい．そこで，xy 平面上の 4 点を $O(0, 0, 0)$，$A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$，$C(0, 1, 0)$ として，正方形 OABC の平面 π への正射影を考える．

π の法線ベクトルは，$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ であり，また xy 平面の法線ベクトルは，

$\overrightarrow{n_{xy}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とできる．この 2 つの法線ベクトルのなす角を α とすると，

$\left|\overrightarrow{n}\right|=\left|\overrightarrow{n_{xy}}\right|=1$ であるから，$\cos\alpha$ はこれらの内積に等しく，

$$\cos\alpha=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_{xy}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=a_3>0$$

である．従って，法線ベクトルどうしのなす角が鋭角であるから，(1) より 2 平面 π と π_{xy} のなす角 θ は α に等しい．

従って，正方形 OABC の平面 π への正射影 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ の面積は

（正方形 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$）$=$（正方形 OABC）$\cdot\cos\theta=\cos\theta$

となる．ところが，$\theta=\alpha$ であるから，

$$\cos\theta=\cos\alpha=\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_{xy}}=a_3$$

より，

（正方形 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$）$=a_3$

となる．

yz 平面，zx 平面に含まれる正方形についても，それらを平面 π に正射影してできる平行 4 辺形の面積がそれぞれ a_1，a_2 であることが，まったく同じ議論によって示されるから，求める面積は

$a_1+a_2+a_3$　　(答)

【5】2 直線 ℓ, m の交点を原点 O とし，ℓ を x 軸に重ねて xy 座標平面で考える．以下，$\overrightarrow{o}$ と異なるベクトル $\overrightarrow{a}$ が x 軸正方向となす角を『$\overrightarrow{a}$ の偏角』と呼び，それを $\arg\left(\overrightarrow{a}\right)$ と表す．また，原点からの距離が定まっていれば，点の位置は偏角だけで決定するから，$\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\theta$ であるとき $\mathrm{A}\,(\theta)$ として点 A の座標と見なすことができる．そこで，点についても偏角という概念を拡張し，『A の偏角』とも言うことにする．

図 9

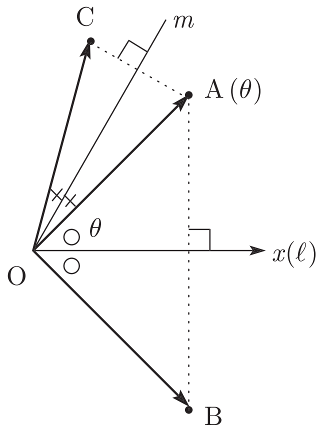


図 9 のように，点 $\mathrm{A}\,(\theta)$ が定まったとする．このとき，A の ℓ に関する対称点 B，m に関する対称点 C について，

$$\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=-\theta,\quad \arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\theta+2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{2\pi}{3}-\theta$$

である．

よって一般に次が言える：偏角 θ をもつ点 A の，

- ℓ に関する対称点 B の偏角は $-\theta$ であり，
- m に関する対称点 C の偏角は $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$ である．

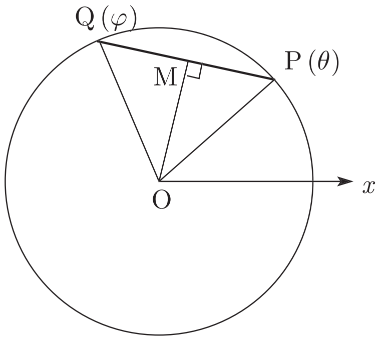
(1) 題意より $\arg\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\right)=\theta$ であるから，ℓ と m に関する逐次的な対称移動により，点 Q_1, P_2, $\cdots$ の偏角は次のようになる：

P_1	θ
Q_1	$-\theta$
P_2	$\dfrac{2\pi}{3}-(-\theta)=\theta+\dfrac{2\pi}{3}$
Q_2	$-\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\theta-\dfrac{2\pi}{3}$
P_3	$\dfrac{2\pi}{3}-\left(-\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)=\theta+\dfrac{4\pi}{3}$
Q_3	$-\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\theta-\dfrac{4\pi}{3}$
P_4	$\dfrac{2\pi}{3}-\left(-\theta-\dfrac{4\pi}{3}\right)=\theta+2\pi$

従って，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP_4}}$の偏角は一致する．これは，2 点 $\mathrm{P_1}$ と $\mathrm{P_4}$ が一致することを表す．　［証明終］

(2) 単位円 U 上に，偏角が θ，φ である 2 点 $\mathrm{P}(\theta)$，$\mathrm{Q}(\varphi)$ をとる．図 10 を参照せよ．

図 10



弦 PQ の中点を M とすれば

$$\mathrm{PQ} = 2\mathrm{PM} = 2\left|\sin\frac{\theta-\varphi}{2}\right|$$

が成り立つ．つまり，弦の長さは，その端点の偏角の差で表される．そこで，点列 $\mathrm{P_1}, \mathrm{Q_1}, \mathrm{P_2}, \cdots, \mathrm{P_4}$ の隣り合う 2 点の偏角の差を求めると，表 1 のようになる．

表 1 偏角の差

$\mathrm{P_1Q_1}$	$\mathrm{Q_1P_2}$	$\mathrm{P_2Q_2}$	$\mathrm{Q_2P_3}$	$\mathrm{P_3Q_3}$	$\mathrm{Q_3P_4}$
2θ	$\dfrac{2\pi}{3}+2\theta$	$\dfrac{4\pi}{3}+2\theta$	$\dfrac{6\pi}{3}+2\theta$	$\dfrac{8\pi}{3}+2\theta$	$\dfrac{10\pi}{3}+2\theta$

そこで，折れ線の長さの和を

$$\mathrm{P_1Q_1}+\mathrm{Q_1P_2}+\cdots+\mathrm{Q_3P_4} = L(\theta)$$

として，

$$L(\theta) = 2\left|\sin\theta\right| + 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right|$$
$$+ 2\left|\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\theta\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right| + 2\left|\sin\left(\frac{5\pi}{3}+\theta\right)\right|$$

関数 $\left|\sin x\right|$ は周期 π をもつから，

$$\left|\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\theta\right)\right| = \left|\sin\theta\right|,\quad \left|\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\theta\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right|$$

などが成り立ち，

$$L(\theta) = 4\left\{\left|\sin\theta\right| + \left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right|\right\}$$

さらに,

$$\begin{aligned} L\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) &= 4\left\{\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right|+\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right|+\left|\sin(\pi+\theta)\right|\right\} \\ &= 4\left\{\left|\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right|+\left|\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right|+\left|\sin(\theta)\right|\right\} \\ &= L(\theta) \end{aligned}$$

であるから，関数 $L(\theta)$ は周期 $\dfrac{\pi}{3}$ をもつ．よって $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ で考えれば十分である．

この範囲では，$\sin\theta$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ の値はすべて非負であるから，絶対値記号はそのままはずれて，

$$\begin{aligned} L(\theta) &= 4\left\{\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \\ &= 4\left\{\sin\theta+2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= 4\left(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right) \\ &= 4\cdot 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = 8\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta+\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ であり，よって $\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta=\dfrac{\theta}{6}$ のとき，$L(\theta)$ は最大となる．

以上より

$$\max L = L\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 \qquad \text{(答)}$$

【6】 (1) 基点 O を定め，また直線 ℓ の方向ベクトル，法線ベクトルで大きさが 1 であるものをそれぞれ $\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{n}$ と定める：

$$\left|\overrightarrow{d}\right| = \left|\overrightarrow{n}\right| = 1, \quad \overrightarrow{d} \perp \overrightarrow{n}$$

与えられた 2 点 A，B について，$\mathrm{A}\left(\overrightarrow{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\overrightarrow{b}\right)$ とする．

ℓ 上の点は，k を定数として，t を実数上で動かせば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{d}$$

と表されるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{d} - \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = k\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{d} - \overrightarrow{b}$$

より，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \left(k\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{d} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{n} + t\overrightarrow{d} - \overrightarrow{b}\right) \\
&= t^2 + \left(2k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \cdot t\overrightarrow{d} + \left(k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{b}\right) \\
&= t^2 - \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{d}\,t + \left(k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{b}\right) \\
&\qquad \because \left|\overrightarrow{d}\right| = \left\|\overrightarrow{n}\right\| = 1,\ \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n} = 0
\end{aligned}$$

この値は t の 2 次関数と考えられる．そこでこの値を $V = V(t)$ とする：

$$V(t) = t^2 - \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{d}\,t + \left(k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{a}\right) \cdot \left(k\overrightarrow{n} - \overrightarrow{b}\right)$$

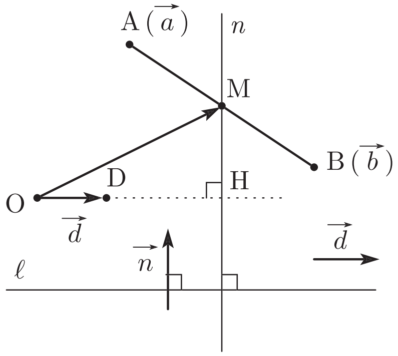
V が最小となるのは，$t = \dfrac{\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{d}}{2}$ のときであり，このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{n} + \frac{\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{d}}{2}\overrightarrow{d}$$

直線 ℓ を平行移動すれば，$\overrightarrow{n}$ の係数 k が実数上で動き，また $\overrightarrow{d}$ の係数 $\dfrac{\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{d}}{2}$ は定数であるから，点 Q は ℓ と垂直な直線を描く． ［証明終］

(2) (1) で得た Q の軌跡，つまり ℓ に垂直な直線を n とする．$n \perp \ell$ は既に示された．そこで，直線 n が線分 AB の中点 M を通ることを示す．

図 11



線分 AB の中点 M $\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$ について

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{d}$$

は，$\vec{d}$ への$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$の正射影を表す．従って $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ として，直線 OD に下した垂線の足を H とすれば，正射影 $\overline{\mathrm{OH}}$，および正射影ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$について

$$\overline{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\vec{d},\quad \therefore\ \frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{d}}{2}\vec{d}=\overline{\mathrm{OH}}\ \vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

が成り立ち，従って

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+k\vec{n}$$

となる．よって図 11 のように Q の軌跡 n は線分 AB の中点 M を通り，与えられた直線 ℓ に直交することが示された．　　[証明終]

【7】 $f(x, y)$ を f, $g(x, y)$ を g, $h(x, y)$ を h と略記すると
$\ell_1 : f = 0, \quad \ell_2 : g = 0, \quad \ell_3 : h = 0$
である．また，考察する曲線の方程式について，その左辺を $F(x, y)$ とする：
$F(x, y) = pfg + qgh + rhf$
題意より，3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は，それぞれ 2 本ずつ交わる．その交点を
$$\ell_2 \text{ と } \ell_3 \text{ の交点を } \mathrm{P}_1, \quad \ell_3 \text{ と } \ell_1 \text{ の交点を } \mathrm{P}_2, \quad \ell_1 \text{ と } \ell_2 \text{ の交点を } \mathrm{P}_3$$
と定める．

$\mathrm{P}_1(X, Y)$ とすると，P_1 は直線 ℓ_2 上にあるから $g(X, Y) = 0$，かつ ℓ_3 上にもあるから $h(X, Y) = 0$ が成り立つ．よって $F(x, y)$ に P_1 の座標 $x = X$, $y = Y$ を代入した値は
$F(X, Y) = p \cdot f \cdot 0 + q \cdot 0 \cdot 0 + r \cdot 0 \cdot f = 0$
となり，$F(x, y) = 0$ で表される曲線 C は点 $\mathrm{P}_1(X, Y)$ を通る．
同様にして，$\mathrm{P}_2(X_2, Y_2)$，$\mathrm{P}_3(X_3, Y_3)$ とすれば，
$h(X_2, Y_2) = f(X_2, Y_2) = 0, \quad f(X_3, Y_3) = g(X_3, Y_3) = 0$
が成り立つから，
$F(X_2, Y_2) = F(X_3, Y_3) = 0$
よって，曲線 $C : F(x, y) = 0$ は，点 P_2，P_3 を通る．
以上より，x と y の方程式 $F(x, y) = 0$ が曲線 C を表す限りで，C は 3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の作る $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の頂点を 3 個とも通る．
従って，C が円を表すならば，曲線 C は $\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の外接円となる．そこで，方程式 $F(x, y) = 0$ が円を表すための条件を求める．
2 次式
$F(x, y) = pfg + qgh + rhf$
を展開して，x と y について整理したとき，$G(x, y)$ を x と y の 1 次以下の整式として
$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + G(x, y)$
になるとする．ここで
$f = x + a_1 y + b_1, \quad g = x + a_2 y + b_2, \quad h = x + a_3 y + b_3$
より

- x^2 の係数 A は　　$A = p + q + r$
- xy の係数 B は　　$B = p(a_1 + a_2) + q(a_2 + a_3) + r(a_3 + a_1)$
- y^2 の係数 C は　　$C = pa_1a_2 + qa_2a_3 + ra_3a_1$

である．
$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + G(x, y) = 0$ が円を表すための条件は $A = C \fallingdotseq 0$ かつ $B = 0$ であるから，求める条件は
$$\begin{cases} p + q + r = pa_1a_2 + qa_2a_3 + ra_3a_1 \fallingdotseq 0 \\ p(a_1 + a_2) + q(a_2 + a_3) + r(a_3 + a_1) = 0 \end{cases} \qquad \text{(答)}$$
またこの下で，円 $C : F(x, y) = 0$ は 3 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ を通るから，3 直線 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の作る 3 角形の外接円になる．　　　[証明終]

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大文系数学
東大文系数学
難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	