問題

【1】(1)
$$
\begin{aligned}
4^x+4^{-x} &= (2^x)^2+(2^{-x})^2\\
&= (2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\\
&= t^2-2
\end{aligned}
$$
であるから,
$$
\begin{aligned}
y &= 3(4^x+4^{-x})-12(2^x+2^{-x})+15\\
&= 3(t^2-2)-12t+15\\
&= 3t^2-12t+9
\end{aligned}
$$
ここで，$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より,
$$2^x+2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$
すなわち,
$$t \geqq 2$$
よって,
$$y=\boldsymbol{3t^2-12t+9}\quad \boldsymbol{(t \geqq 2)}$$ (答)

(2) (1) の結果から,
$$y=3(t-2)^2-3$$
いま，$t \geqq 2$ であるから,

$t=2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-3}$ (答)

をとる．このとき,
$$2^x+2^{-x}=2$$
両辺に 2^x をかけて整理すると,
$$
\begin{aligned}
& (2^x)^2-2\cdot 2^x+1=0\\
\iff\quad & (2^x-1)^2=0\\
\therefore\quad & 2^x=1\\
\therefore\quad & x=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$
(答)

(3) $y=0$ より,
$$3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$$
$t \geqq 2$ より,
$$t=3$$
このとき,
$$
\begin{aligned}
& 2^x+2^{-x}=3\\
\iff\quad & (2^x)^2-3\cdot 2^x+1=0\\
\therefore\quad & 2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$
$2^x>0$ であるが，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}>0$ であるので，どちらも解となる．したがって,
$$x=\boldsymbol{\log_2\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)}$$ (答)

【2】 $\cos x = t$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，

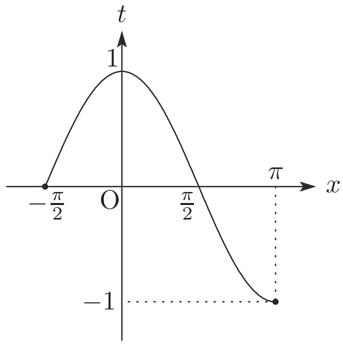
図 1 より，

$$\begin{cases} -1 \leqq t < 0,\ t = 1 \text{ のとき} \\ \qquad t \text{ が 1 つに対して } x \text{ が 1 つ} \\ 0 \leqq t < 1 \text{ のとき} \\ \qquad t \text{ が 1 つに対して } x \text{ が 2 つ} \end{cases}$$

それぞれ対応することがわかる．また，このとき与えられた方程式は，

$$3\cos^2 x - 2\cos x - a = 0$$

$$\iff \quad 3t^2 - 2t - a = 0$$



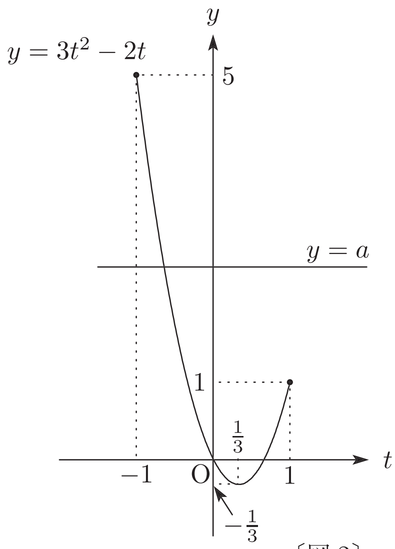
〔図 1〕

そこで，2 つのグラフ

$$\begin{cases} y = 3t^2 - 2t \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \\ y = a \end{cases}$$

の共有点の個数を求めると，図 2 より，

$$\begin{cases} a < -\dfrac{1}{3},\ a > 5 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = -\dfrac{1}{3},\ 1 < a \leqq 5 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -\dfrac{1}{3} < a \leqq 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$



〔図 2〕

先に述べた t と x の対応関係に注意して，求める解の個数は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -\dfrac{1}{3},\ a > 5} \textbf{ のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{1 < a \leqq 5} \textbf{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{a = -\dfrac{1}{3},\ a = 1} \textbf{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{0 < a < 1} \textbf{ のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{-\dfrac{1}{3} < a \leqq 0} \textbf{ のとき} & \textbf{4 個} \end{cases}$$ (答)

<別解>

与えられた方程式より，2 つのグラフ

$$y = a,\ y = f(x) = 3\cos^2 x - 2\cos x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right)$$

の共有点の個数を直接求めてもよい．$f(x)$ は偶関数であるから，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲を調べればよい．

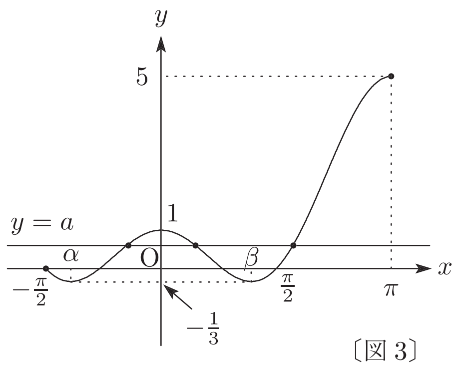
$$f'(x) = -2(3\cos x - 1)\sin x$$

であるから，$f(x)$ の増減およびグラフは次のようになる．ただし，α，β は，

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{3},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

をみたす角である．

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$		$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5



〔図 3〕

【3】 与えられた方程式

$x^3 - 3px + q = 0 \quad \cdots\cdots ①$

の左辺を $f(x)$ とおくと，

$f'(x) = 3(x^2 - p)$

よって，条件は，

①が相異なる 3 つの実数解をもつ

$\iff$ $y = f(x)$ のグラフが，x 軸と異なる 3 点で交わる

$\iff$ $y = f(x)$ が極大値と極小値をもち，かつ，それらが異符号となる

$$\iff \begin{cases} p > 0 \quad \cdots\cdots ② \\ \text{かつ} \\ f(\sqrt{p}) \cdot f(-\sqrt{p}) < 0 \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② のもとで，

$$③ \iff (q - 2p\sqrt{p})(q + 2p\sqrt{p}) < 0$$
$$\iff q^2 - 4p^3 < 0$$
$$\iff q^2 < 4p^3$$

であり，これは条件 ② を含んでいる．したがって，求める必要十分条件は，

$\boldsymbol{q^2 < 4p^3}$　　(答)

【4】(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+4a$

とおくと，

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

よって，$f'(x)=0$ より，

$x=0,\ 2a$

$a>0$ だから，

極大値 $M=f(0)=4a>0$

極小値 $m=f(2a)=-4a^3+4a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との異なる共有点の個数は，次のようになる．

(i) $m<0<M$ すなわち $a>1$ のとき，3 個

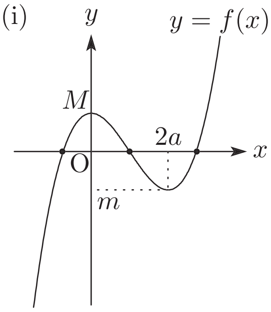
(ii) $m=0$ すなわち $a=1$ のとき，2 個

(iii) $m>0$ すなわち $0<a<1$ のとき，1 個

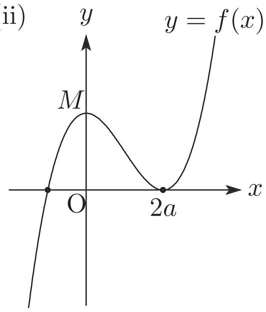
したがって，与えられた方程式の異なる実数解の個数は，

$$\begin{cases} \mathbf{0<\boldsymbol{a}<1\ のとき\quad 1\ 個} \\ \mathbf{\boldsymbol{a}=1\ のとき\quad 2\ 個} \\ \mathbf{\boldsymbol{a}>1\ のとき\quad 3\ 個} \end{cases}$$ (答)

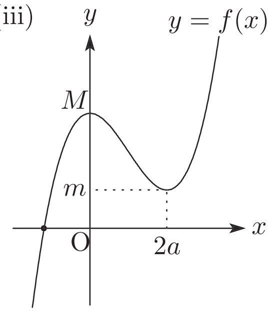
(i)



(ii)



(iii)



(2)　$g(x)=8^x-3a\cdot 4^x+4a$

$\quad=(2^x)^3-3a(2^x)^2+4a$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ で，

$g(x)=t^3-3at^2+4a$

改めて，

$h(t)=t^3-3at^2+4a$

とおく．まず，$t=2^x$ を x の方程式とみると，

$$(*)\begin{cases} t\leqq 0\ のとき，解\ x\ は存在しない． \\ t>0\ のとき，t\ と\ x\ は\ 1:1\ 対応である． \end{cases}$$

となっている．そこで，t の方程式 $h(t)=0$ が，$t\leqq 0$，$t>0$ にそれぞれ何個の実数解をもつかを調べる．

$h(t)$ は，(1) の $f(x)$ において x を t に置き換えたものだから，(1) の図 (i)〜(iii) より，方程式 $h(t)=0$ は，

(ア) $a>1$ のとき；図 (i) より，$t>0$ に 2 個，$t<0$ に 1 個の解をもつ．

(イ) $a=1$ のとき；図 (ii) より，$t>0$ に 1 個，$t<0$ に 1 個の解をもつ．

(ウ) $0<a<1$ のとき；図 (iii) より，$t<0$ に 1 個の解をもつ．

(ア)，(イ)，(ウ) と $(*)$ を合わせて，与えられた方程式の異なる実数解の個数は，

$$\begin{cases} \mathbf{0<\boldsymbol{a}<1\ のとき\quad 0\ 個} \\ \mathbf{\boldsymbol{a}=1\ のとき\quad 1\ 個} \\ \mathbf{\boldsymbol{a}>1\ のとき\quad 2\ 個} \end{cases}$$ (答)

【5】(1) 仮定より，$x+\dfrac{1}{x}=1 \iff x^2-x+1=0$ であるから，

$$\begin{cases} \alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=1 & \cdots\cdots ① \\ \alpha^3=\beta^3=-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases} \alpha^3+\beta^3=(-1)+(-1)=\boldsymbol{-2} \\ \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1-2}{1}=\boldsymbol{-1} \end{cases}$$ (答)

(2) ① より，

$$\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}=\frac{\alpha^n+\beta^n}{(\alpha\beta)^n}=\alpha^n+\beta^n \qquad \therefore\ t_n=2(\alpha^n+\beta^n)$$

また，② より，

$$\alpha^6=\beta^6=(-1)^2=1 \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つことに注意して，n を 6 の剰余系で分類すると，

(i) $n=6k$ (k は整数) のとき，
$$t_n=2(\alpha^{6k}+\beta^{6k})=2(1+1)=4 \quad (\because\ ③より)$$

(ii) $n=6k+1$ (k は整数) のとき，
$$t_n=2(\alpha^{6k+1}+\beta^{6k+1})=2(\alpha+\beta)=2 \quad (\because\ ①より)$$

(iii) $n=6k+2$ (k は整数) のとき，
$$t_n=2(\alpha^{6k+2}+\beta^{6k+2})=2(\alpha^2+\beta^2)=-2 \quad (\because\ (1)より)$$

(iv) $n=6k+3$ (k は整数) のとき，
$$t_n=2(\alpha^{6k+3}+\beta^{6k+3})=2(\alpha^3+\beta^3)=-4 \quad (\because\ (1)より)$$

(v) $n=6k+4$ (k は整数) のとき，
$$t_n=2(\alpha^{6k+4}+\beta^{6k+4})=2(\alpha^4+\beta^4)=-2(\alpha+\beta)=-2 \quad (\because\ (ii)より)$$

(vi) $n=6k+5$ (k は整数) のとき，
$$t_n=2(\alpha^{6k+5}+\beta^{6k+5})=2(\alpha^5+\beta^5)=-2(\alpha^2+\beta^2)=2 \quad (\because\ (iii)より)$$

以上 (i)〜(vi) をまとめると

$$t_n=\begin{cases} \mathbf{4} & (\boldsymbol{n=6k}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-4} & (\boldsymbol{n=6k+3}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{2} & (\boldsymbol{n=6k+1,\ 6k+5}\ \textbf{のとき}) \\ \mathbf{-2} & (\boldsymbol{n=6k+2,\ 6k+4}\ \textbf{のとき}) \end{cases} \quad (\boldsymbol{k}\ \textbf{は整数})$$ (答)

【6】(1) $f(0) = \mathbf{2}$ (答)

$$f(a) = a^3 - 3a^2(a-1) + 3a^2(a-2) + 2$$
$$= \boldsymbol{a^3 - 3a^2 + 2} \quad (\text{答})$$

(2) 条件は，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値が 0 以上になることである．

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a-1)x + 3a(a-2)$$
$$= 3\{x^2 - 2(a-1)x + a(a-2)\}$$
$$= 3(x-a)(x-a+2)$$

よって，$f(x)$ の極値を与える x は

a と $a-2$

であり，$a-2 < a$ であるから，$f(a)$ が極小値である．そこで，a が定義域に属するかどうかで場合分けする．

(i) $a \geqq 0$ のとき，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は，$f(0)$，$f(a)$ の小さいほうである．ところが，いま

$f(0) = 2 > 0$

であるから，

$$\min\{f(0),\ f(a)\} \geqq 0$$
$$\iff f(a) \geqq 0$$
$$\iff a^3 - 3a^2 + 2 \geqq 0$$
$$\iff (a-1)(a^2 - 2a - 2) \geqq 0$$
$$\iff 1 - \sqrt{3} \leqq a \leqq 1,\ 1 + \sqrt{3} \leqq a$$

$a \geqq 0$ とあわせて，

$0 \leqq a \leqq 1,\ 1 + \sqrt{3} \leqq a \quad \cdots\cdots ①$

(ii) $a < 0$ のとき，$x \geqq 0$ において $f(x)$ は増加するから，

$\min_{(x \geqq 0)} f(x) \geqq 0 \iff f(0) \geqq 0$

$f(0) = 2$ よりつねに成立．

よって，

$a < 0 \quad \cdots\cdots ②$

以上 (i)，(ii) より，求める a の値の範囲は「① または ②」であるから，

$\boldsymbol{a \leqq 1,\ 1 + \sqrt{3} \leqq a}$ (答)

問題

【1】
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n+3b_n)=4 & \cdots\cdots ① \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

より，数列 $\{a_n+3b_n\}$，$\{2a_n-b_n\}$ は収束するから

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}a_n &= \lim_{n\to\infty}\{(a_n+3b_n)+3(2a_n-b_n)\}\cdot\frac{1}{7} \\ &= \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}(a_n+3b_n)+\frac{3}{7}\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n) \\ &= \frac{1}{7}\cdot 4+\frac{3}{7}\cdot 1 \\ &= \mathbf{1} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

また

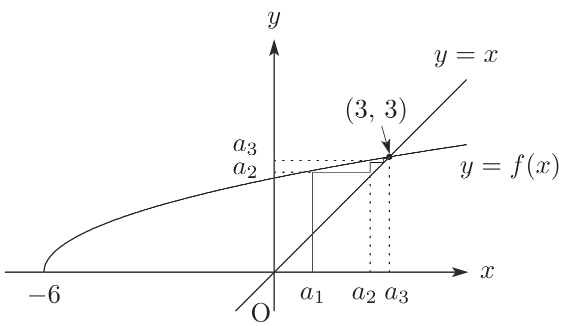
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}b_n &= \lim_{n\to\infty}\{2(a_n+3b_n)-(2a_n-b_n)\}\cdot\frac{1}{7} \\ &= \frac{2}{7}\lim_{n\to\infty}(a_n+3b_n)-\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n) \\ &= \frac{2}{7}\cdot 4-\frac{1}{7}\cdot 1 \\ &= \mathbf{1} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】(1)
$$
\begin{aligned}
x=f(x) &\iff x=\sqrt{x+6}\\
&\iff x^2=x+6 \quad \text{かつ} \quad x\geqq 0\\
&\iff (x-3)(x+2)=0 \quad \text{かつ} \quad x\geqq 0
\end{aligned}
$$
したがって

$x=\mathbf{3}$　　(答)

(2)
$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-3 &= \sqrt{a_n+6}-3\\
&= \frac{\left(\sqrt{a_n+6}-3\right)\left(\sqrt{a_n+6}+3\right)}{\sqrt{a_n+6}+3}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a_n+6}+3}(a_n-3)
\end{aligned}
$$
$$
\begin{aligned}
\therefore\quad |a_{n+1}-3| &= \left|\frac{1}{\sqrt{a_n+6}+3}\right||a_n-3|\\
&\leqq \frac{1}{3}|a_n-3| \quad \left(\because\quad 0<\frac{1}{\sqrt{a_n+6}+3}\leqq\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$
[証明終]

(3) (2) より，$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ で
$$
\begin{aligned}
|a_n-3| &\leqq \frac{1}{3}|a_{n-1}-3|\\
&\leqq \left(\frac{1}{3}\right)^2|a_{n-2}-3|\\
&\leqq \cdots\cdots\\
&\leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|a_1-3|\\
&= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad (\because\quad a_1=1)
\end{aligned}
$$
$$\therefore\quad 0\leqq|a_n-3|\leqq 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ より，はさみうちの原理により
$$\lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$



【3】(1) $p,\ q,\ r$ を実数として，一般項が $a_n = pn^2 + qn + r\ (p \fallingdotseq 0)$ と表されるので

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \{p(n+1)^2 + q(n+1) + r\} - (pn^2 + qn + r) \\ &= 2pn + (p+q) \end{aligned}$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ の階差数列は，n の 1 次式すなわち等差数列で表される．

したがって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を考えると，初項 4，公差 2 の等差数列より $n \geqq 2$ において

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{4 + 2(k-1)\} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+2) \\ &= (n-1)n + 2(n-1) \\ &= (n-1)(n+2) \quad (n \geqq 2) \end{aligned}$$

これは，$a_1 = 0$ より $n = 1$ でも成立するので

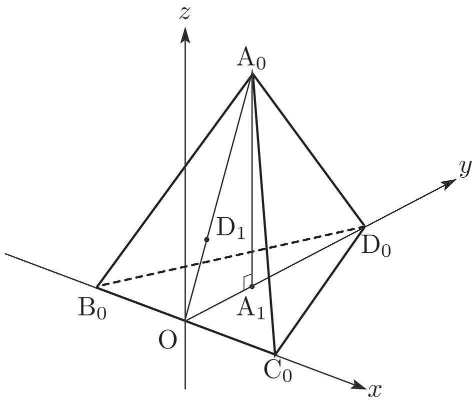
$a_n = \boldsymbol{(n-1)(n+2)}$　　(答)

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{n-1} \right) \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \boldsymbol{\frac{11}{18}} \end{aligned}$$

(答)

【4】　図のように



$A_0\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{6},\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

$B_0\left(-\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$,

$C_0\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$,

$D_0\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

となるように座標軸を考える.

(1) 底面が 1 辺の長さ 1 の正三角形で,

高さが $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の四角すいであるから

$$V_0 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}} \qquad \text{(答)}$$

(2) A_1, D_1 は, OD_0, OA_0 を $1:2$ に内分する点より, それぞれ

$$D_1\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{18},\ \frac{\sqrt{6}}{9}\right),\quad A_1\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$$

であるから

$$A_1D_1{}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\therefore\quad A_1D_1 = \frac{1}{3}$$

V_0 と V_1 は相似であり, その相似比は $1:\dfrac{1}{3}$ となるから

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_0 = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{324}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) と同様に, V_n と V_{n+1} は相似であり, その相似比は $1:\dfrac{1}{3}$ となるから, その体積比は $V_{n+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 V_n$ である.

したがって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(V_0+V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{V_0\left(1-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^n\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}\\ &= \frac{V_0}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}\\ &= \boldsymbol{\frac{9}{104}\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】(1) 左辺について

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}-(mx+n)\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\left\{3\sqrt{x^2-4}-2(mx+n)\right\}\left\{3\sqrt{x^2-4}+2(mx+n)\right\}}{3\sqrt{x^2-4}+2(mx+n)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{9(x^2-4)-4(mx+n)^2}{3\sqrt{x^2-4}+2(mx+n)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(9-4m^2)x^2-8mnx-(36+4n^2)}{3\sqrt{x^2-4}+2(mx+n)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{(9-4m^2)x-8mn-\frac{36+4n^2}{x}}{3\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+2m+\frac{2n}{x}}$$

これが有限な値になるためには

$9-4m^2=0 \qquad \therefore\quad m=\pm\frac{3}{2}$

(i) $m=\frac{3}{2}$ のとき

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-12n-\frac{36+4n^2}{x}}{3\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+3+\frac{2n}{x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-12n}{3+3}=-n$$

したがって

$n=0$

(ii) $m=-\frac{3}{2}$ のとき

条件式に代入すると

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}+\frac{3}{2}x-n\right)=\infty$$

となり不適.

よって

$(m,\ n)=\left(\boldsymbol{\frac{3}{2},\ 0}\right)$　　(答)

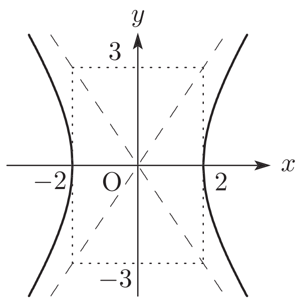
(2) 双曲線 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ を y について解くと

$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$

したがって，(1) より，この双曲線の漸近線は

$y=\pm\frac{3}{2}x$

である.



よって，グラフは右図の太実線部のようになる．(答)

＜コメント＞ 漸近線についてまとめておく.

(i) x 軸に垂直な漸近線

$\lim_{x\to a+0} f(x)$ または $\lim_{x\to a-0} f(x)$ が $+\infty$ または $-\infty$ となるとき

直線 $x=a$ は $y=f(x)$ の漸近線となる.

(ii) x 軸に垂直でない漸近線

$\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ または $\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ となるとき

直線 $y=ax+b$ は $y=f(x)$ の漸近線となる.

(ii) について，漸近線 $y=ax+b$ は次のように求めることができる.

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

より

$$\lim_{x\to+\infty} x\left\{\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right\}=0$$

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=0$ であるから

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}-a\right\}=0 \qquad \therefore\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$$

このとき，$(*)$ より

$$\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-ax\}=b$$

したがって

$y=ax+b$ が $y=f(x)$ の漸近線であるとき

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to+\infty}\{f(x)-ax\}$$

($x\to-\infty$ のときも同様)

【6】(1)

- $x=0$ における連続性

$x \fallingdotseq 0$ において，つねに

$$-1 \leqq \sin\frac{1}{x} \leqq 1$$

より

$$-x^2 \leqq x^2\sin\frac{1}{x} \leqq x^2$$

ここで

$$\lim_{x\to 0}x^2 = 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x} = 0$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x) = f(0)$ が成り立ち

$f(x)$ は $x=0$ において連続である (答)

- $x=0$ における微分可能性

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

$x \fallingdotseq 0$ において，つねに

$$-1 \leqq \sin\frac{1}{x} \leqq 1$$

より

$$-|x| \leqq x\sin\frac{1}{x} \leqq |x|$$

ここで

$$\lim_{x\to 0}|x| = 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0$$

よって，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0$ が存在するから

$f(x)$ は $x=0$ において微分可能である (答)

(2) $x \fallingdotseq 0$ において

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{x\to 0}f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

において

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 0 \qquad (\because\ \ (1))$$

となるが

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ は有限確定でない

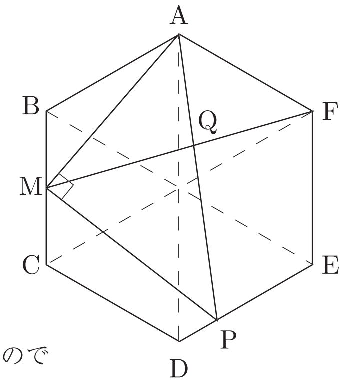
したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ は有限確定ではないから

$f'(x)$ は $x=0$ において連続でない (答)

２章－１　平面ベクトル

問題

【1】(1) 右図より



$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(2) DE 上の点 P に対して，t を $0\leqq t\leqq 1$ の実数とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-t\vec{a}$$
$$=(2-t)\vec{a}+2\vec{b}$$

さて，$\angle\mathrm{AMP}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0\iff\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)=0$$
$$\iff\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2=0\qquad\cdots\cdots①$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ に注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left\{(2-t)\vec{a}+2\vec{b}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{3(2-t)+2-\frac{8-t}{2}\right\}=\frac{1}{4}(8-5t)$$

さらに，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|^2=\frac{1}{4}\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{1}{4}(3^2+1^2-3)=\frac{7}{4}$$

これらを ① に代入して，

$$\frac{1}{4}(8-5t)-\frac{7}{4}=0\qquad\qquad \therefore\quad t=\frac{1}{5}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{9}{5}\vec{a}+2\vec{b}}\qquad\text{(答)}$$

(3) $\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=k:(1-k)$ $(0<k<1)$ とおくと，(2) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{9k}{5}\vec{a}+2k\vec{b}$$

ここで，仮定および (1) より，

$$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AF}},\qquad \vec{a}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\vec{b}}{3}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{3}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{9k}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{3}+2k\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$
$$=\frac{6k}{5}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{7k}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

したがって，Q が MF 上に存在することから，

$$\frac{6k}{5}+\frac{7k}{5}=1\qquad\qquad\therefore\quad k=\frac{5}{13}$$

よって

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=\boldsymbol{5:8}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2=\left|-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=2-2p$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|=r$ より

$\boldsymbol{2-2p=r^2}$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|}{\left|\overrightarrow{a}\right|}\overrightarrow{a}=r\overrightarrow{a}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\boldsymbol{r\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}$ (答)

また

$$\begin{cases}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\left|r\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=r^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2r\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2=r^2+2pr+1\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2=r^2\end{cases}$$

より

$pr=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$ (答)

(3) $\begin{cases}2-2p=r^2\\ pr=-\dfrac{1}{2}\\ r>0\end{cases}$ を解いて $\begin{cases}p=\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}\\ r=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\end{cases}$ (答)

(4) 正五角形の 1 つの内角は 108° であるから

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$ 〔証明終〕

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{a}\cdot\left(r\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=r\left|\overrightarrow{a}\right|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=r+p$$

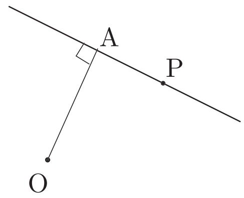
したがって

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\frac{r+p}{1\cdot r}=1+\frac{p}{r}=1+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

よって

$\cos 36^\circ=\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$ (答)

【3】(1) (i) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\iff\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}$



より，P のみたす条件は

$\mathrm{P}=\mathrm{A}$ または $\mathrm{OA}\perp\mathrm{AP}$

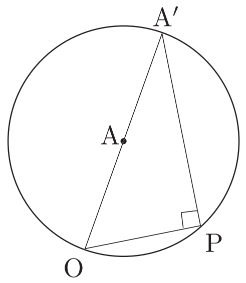
$\iff\ \overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}$ または $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right)=0$

$\iff\ \overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}$ または $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-\left|\overrightarrow{a}\right|^2=0$

$\iff\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}=\left|\overrightarrow{a}\right|^2$ 〔証明終〕

(ii) $$\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}=0$$

$$\iff \overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{p}-2\overrightarrow{a}\right)=0 \quad \cdots\cdots(*)$$



ここで，$\mathrm{A}'\left(2\overrightarrow{a}\right)$ となる点をとると

$$(*) \iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right)=0$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{P}}=0$$

$$\iff \mathrm{P}=\mathrm{O} \quad \text{または} \quad \mathrm{P}=\mathrm{A}'$$

$$\text{または} \quad \mathrm{OP}\perp\mathrm{A}'\mathrm{P}$$

よって，点 P は点 A を中心とする半径 OA の円を描く．

＜別解＞

$$\left|\overrightarrow{p}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}=0 \iff \left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}\right|^2=0$$

$$\iff \left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{a}\right|$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

より，点 P は点 A を中心とする半径 OA の円を描く．

(2) $\overrightarrow{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とすると

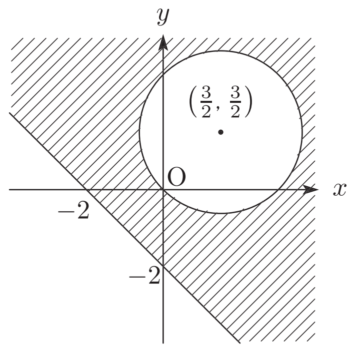
$$\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right|\leqq\left|\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{b}\right|\leqq 3\left|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right|$$

$$\iff \left|\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}\right|^2\leqq\left|\begin{pmatrix}x+3\\y+3\end{pmatrix}\right|^2\leqq 9\left|\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}\right|^2$$

$$\iff (x-1)^2+(y-1)^2\leqq(x+3)^2+(y+3)^2\leqq 9(x-1)^2+9(y-1)^2$$

$$\iff \begin{cases} x+y+2\geqq 0 \\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2\geqq\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

より，点 P 全体が表す領域は図の斜線部のようになる（境界を含む）．



＜別解＞

B(1，1)，C(−3，−3) とおくと

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\leqq\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\leqq 3\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|$ は

線分 BC の垂直二等分線 $\cdots\cdots(*)$

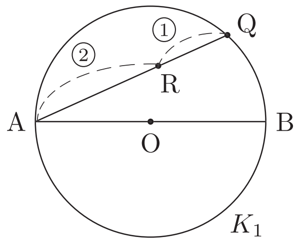
を表し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| = 3\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$ は

$$\text{線分 BC を } 1:3 \text{ に} \left\{ \begin{array}{l} \text{内分する点 D}(0,\ 0) \\ \text{外分する点 E}(3,\ 3) \end{array} \right\} \text{を直径の両端とする円} \cdots\cdots (**)$$

を表す．

よって，不等号の向きを考えて，点 P 全体が表す領域は図の斜線部のようになる．

【4】(1)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BR}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BQ}} \\ &= \frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\left(\vec{q} + \vec{a}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + k\overrightarrow{\mathrm{BR}} \\ &= \vec{q} - \vec{a} + k\left(\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{q} \end{aligned}$$

より

$$\left|\vec{p} - \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}\right| = \left|\frac{2}{3}k + 1\right|\left|\vec{q}\right| = \frac{2}{3}k + 1 \qquad \left(\because \quad k > 0,\ \left|\vec{q}\right| = 1\right)$$

よって，K_2 は

$$\boldsymbol{\left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}} \text{ を中心とする半径 } \boldsymbol{\frac{2}{3}k + 1} \text{ の円である．} \qquad \text{〔証明終〕}$$

(3) $\mathrm{C}\left(\left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}\right)$ とすると，条件は，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| < \frac{2}{3}k + 1$ であるから

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| &= \left|\vec{a} - \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}\right| \\ &= \left|2 - \frac{4}{3}k\right|\left|\vec{a}\right| \\ &= \frac{1}{3}|4k - 6| \qquad \left(\because \quad \left|\vec{a}\right| = 1\right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}|4k - 6| < \frac{1}{3}(2k + 3) \quad &\iff \quad |4k - 6| < 2k + 3 \\ &\iff \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} < k < \frac{9}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【5】 $\begin{cases} \alpha\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0} & \cdots\cdots① \\ \alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

とする.

(1) ① を A を始点としてそろえると

$$-\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\iff (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad (\because\ ②)$$

(i) $\beta+\gamma=0$ のとき

② より, $\beta=\gamma=0$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{0}$

すなわち, P = A である.

(ii) $\beta+\gamma \fallingdotseq 0$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\beta+\gamma)\cdot\dfrac{\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\beta+\gamma}$

線分 BC を $\gamma:\beta$ に内分する点を D とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

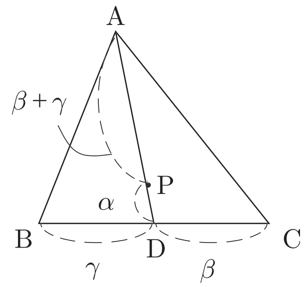
② より

$0<\beta+\gamma \leqq 1$

であるから, P は

線分 AD を $(\beta+\gamma):\alpha$ に内分する点

(ただし, D は線分 BC を $\gamma:\beta$ に内分する点)



以上, (i), (ii) より, P は

三角形 ABC の周または内部にある. 〔証明終〕

(2) ① より

$$\alpha\left(\overrightarrow{\mathrm{IP}}-\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right)+\beta\left(\overrightarrow{\mathrm{IP}}-\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{\mathrm{IP}}-\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\iff (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{IP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{IC}}$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{IP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{IA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{IB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{IC}} \quad (\because\ ②)$$

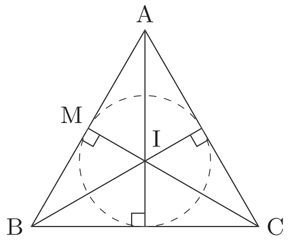
ここで

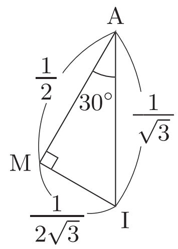
$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}=\overrightarrow{\mathrm{IB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}=\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\right|^2 &= \alpha^2\left|\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right|^2+\beta^2\left|\overrightarrow{\mathrm{IB}}\right|^2+\gamma^2\left|\overrightarrow{\mathrm{IC}}\right|^2+2\alpha\beta\overrightarrow{\mathrm{IA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IB}}+2\beta\gamma\overrightarrow{\mathrm{IB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IC}}+2\gamma\alpha\overrightarrow{\mathrm{IC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IA}} \\ &= \frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-\frac{1}{3}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= \frac{1}{3}\left\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\} \\ &= \frac{1}{3}-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \qquad (\because\ ②) \quad \cdots\cdots③ \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} - \{\beta\gamma + (\beta+\gamma)\alpha\}$$
$$= \frac{1}{3} - \{\beta\gamma + (\beta+\gamma)(1-\beta-\gamma)\} \qquad (\because \ ②)$$
$$= \boldsymbol{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma - \beta - \gamma + \frac{1}{3}} \qquad (答)$$





(3) 点 P が点 I を中心とする三角形 ABC の内接円上にあるための必要十分条件は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{IP}}\right|^2 = \frac{1}{3} - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \frac{1}{12} \qquad (\because \ ③)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{4}$$ 〔証明終〕

【6】 $\overrightarrow{p}-2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\overrightarrow{a}-\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}$ ……(∗)

とする．

(1) $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}=\overrightarrow{0}$ のとき

$$(*)\iff 2\overrightarrow{p}-2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$$

$$\iff \overrightarrow{p}=\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\overrightarrow{a} \quad \cdots\cdots ①$$

① より

$\overrightarrow{p}=k\overrightarrow{a}$ (ただし，k は実数) ……②

とおける．

逆に，② が成り立つならば

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{a}\cdot k\overrightarrow{a}=k\left|\overrightarrow{a}\right|^2=k \qquad \left(\because\ \left|\overrightarrow{a}\right|=1\right)$$

となるから，つねに ① が成り立つ．

以上より，点 P の描く図形は

原点を通り，$\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ に平行な直線 (答)

である．

(2) (∗) より

$$\left|\overrightarrow{q}\right|^2=\left|\overrightarrow{p}-2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\overrightarrow{a}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{p}\right|^2-4\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)+4\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2$$

$$=\left|\overrightarrow{p}\right|^2-4\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)^2+4\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)^2 \qquad \left(\because\ \left|\overrightarrow{a}\right|=1\right)$$

$$=\left|\overrightarrow{p}\right|^2$$

したがって

$$\left|\overrightarrow{p}\right|=\left|\overrightarrow{q}\right|$$

また

$$\left(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q}\right)\cdot\overrightarrow{a}=\left\{\overrightarrow{p}+\overrightarrow{p}-2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\overrightarrow{a}\right\}\cdot\overrightarrow{a}$$

$$=2\left\{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right)\left|\overrightarrow{a}\right|^2\right\}$$

$$=2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}\right) \qquad \left(\because\ \left|\overrightarrow{a}\right|=1\right)$$

$$=0$$

よって，題意は示された． 〔証明終〕

問題

【1】$f(x)$ は区間 I で連続かつ微分可能であるから，平均値の定理により

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad (x_1<c<x_2) \quad \cdots\cdots(*)$$

となる c が存在する．

($\Longrightarrow$) について

区間 I でつねに $f'(x)>0$ であるから

$$f'(c)>0 \qquad (\because \ \ c\in I)$$

これと，$(*)$ より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

$x_2-x_1>0$ より

$$f(x_2)-f(x_1)>0 \qquad \therefore \ \ f(x_1)<f(x_2)$$

したがって

$f(x)$ は区間 I で増加する

($\Longleftarrow$) について

$$f(x)=x^3$$

とすると，$f(x)$ は区間

$$I=\{x|-1<x<1\}$$

の任意の x_1，x_2 において，$f(x_1)<f(x_2)$ となるが，区間 I 内の $x=0$ において

$$f'(0)=0$$

であり

区間 I でつねに $f'(x)>0$ となるわけではない

よって

命題は偽である．　　(答)

【2】(1) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ より，定義域は，$x \fallingdotseq \pm 1$ である．

また，$f(-x)=-f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは原点対称であるから，$x \geqq 0$ において考えればよい．

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-x^2(x^2-3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

したがって，$x \geqq 0$ における増減表は次のようになる．

x	0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$-$	／	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	／	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗

また

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty$$

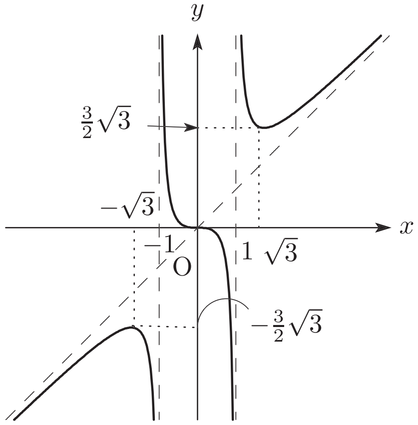
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{1-\frac{1}{x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\left\{\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)-x\right\}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x-\dfrac{1}{x}}=0$$

より，漸近線は，$x=\pm 1$，$y=x$ である．

よって，グラフは図のようになる．　　(答)



(2) $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$ より，定義域は，$-1 \leqq x \leqq 1$ である．

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+(x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-(2x-1)(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-(2x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$f''(x)=\frac{(-1-4x)\sqrt{1-x^2}-\{-(2x-1)(x+1)\}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

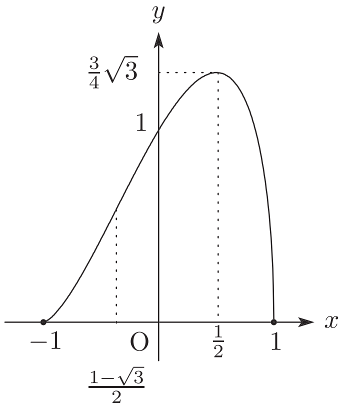
$$=\frac{-(1+4x)(1+x)(1-x)-(2x-1)(1+x)x}{(1+x)(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

したがって，増減表は次のようになる．

x	-1		$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	／
$f''(x)$	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$	／
$f(x)$	0	↗		↗	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	0

よって，グラフは図のようになる．　　　(答)



(3) $f(x) = x^2 e^{-x}$ より

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = x(2-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (2-2x)e^{-x} + x(2-x) \cdot (-e^{-x}) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

したがって，増減表は次のようになる．

x		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗		↗	$\frac{4}{e^2}$	↘		↘

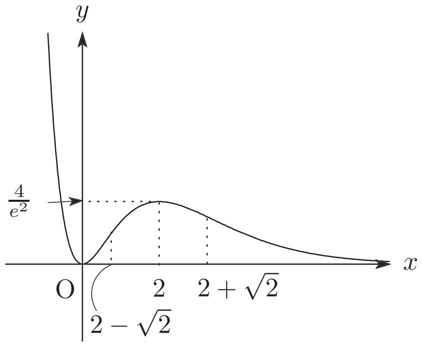
また

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

より，漸近線は，x 軸である．

よって，グラフは図のようになる．　　　(答)



【3】(1) $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}=(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}$ より

$$y'=\frac{1}{3}(x^3-x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2-2x)=\frac{x(3x-2)}{3\{x^2(x-1)\}^{\frac{2}{3}}}=\frac{3x-2}{3x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\begin{aligned}
y''&=\frac{1}{3}\left\{-\frac{2}{3}(x^3-x^2)^{-\frac{5}{3}}(3x^2-2x)^2+(x^3-x^2)^{-\frac{2}{3}}(6x-2)\right\}\\
&=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{(x^3-x^2)^{\frac{5}{3}}}\left\{x^2(3x-2)^2-3(x^3-x^2)(3x-1)\right\}\\
&=-\frac{2}{9}\cdot\frac{x^2}{\{x^2(x-1)\}^{\frac{5}{3}}}\left\{(3x-2)^2-3(x-1)(3x-1)\right\}\\
&=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{5}{3}}}
\end{aligned}$$

したがって，増減表は次のようになる．

x		0		$\frac{2}{3}$		1	
y'	$+$	／	$-$	0	$+$	／	$+$
y''	$+$	／	$+$	$+$	$+$	／	$-$
y	↗	0	↘	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	↗	0	↗

漸近線の方程式を $y=ax+b$ とすると

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}=1$$

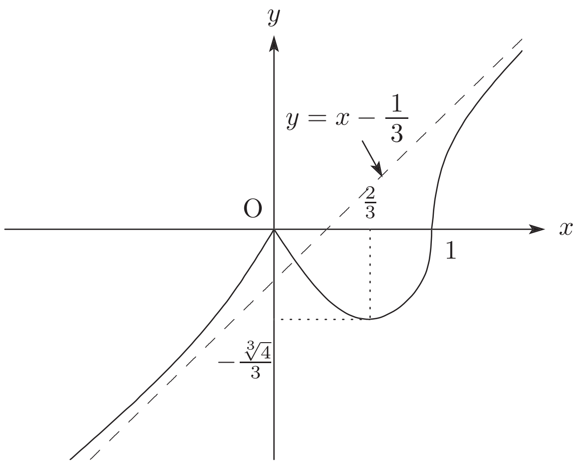
$$\begin{aligned}
b&=\lim_{x\to+\infty}(y-1\cdot x)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x)\left\{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2\right\}}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3-x^2)-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}\\
&=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

また

$$\lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt[3]{x^3-x^2}-\left(x-\frac{1}{3}\right)\right\}=0$$

となり，漸近線は，$y=x-\frac{1}{3}$ であり，

グラフは次ページの図のようになる．　　(答)


y
$y = x - \frac{1}{3}$
O
$\frac{2}{3}$
x
1
$-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

(2) $y^2=4x^2-x^3=x^2(4-x)\geqq 0$ より，定義域は，$x\leqq 4$ である．

y について解くと

$$y=\pm x\sqrt{4-x}$$

より，2 曲線は x 軸対称であるから，$y=x\sqrt{4-x}$ について考える．

$$y'=\sqrt{4-x}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{4-x}}$$
$$=\frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$$
$$y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{-3\sqrt{4-x}-(8-3x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{4-x}}}{4-x}$$
$$=\frac{3x-16}{4(4-x)^{\frac{3}{2}}}$$

したがって，増減表は次のようになる．

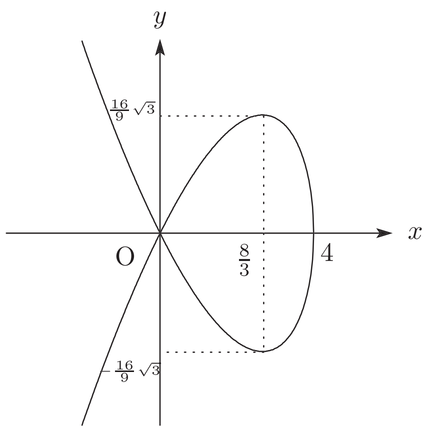
x		$\frac{8}{3}$		4
y'	$+$	0	$-$	／
y''	$-$	$-$	$-$	／
y	↗	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	↘	0

また

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}x\sqrt{4-x}=-\infty$$

である．

したがって，$y=-x\sqrt{4-x}$ もあわせると，グラフは下図のようになる．　(答)



(3) $x=x(t)=\cos t$, $y=y(t)=\sin 2t$ とおくと，$t:0\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x:1\to 0$ である．

$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のときの点 $(x(t),\ y(t))$ の描く軌跡 C に対して

$(x(\pi-t),\ y(\pi-t))=(-x(t),\ -y(t))$ より

$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ のとき，曲線 C の原点対称のグラフとなる．　…………①

$(x(\pi+t),\ y(\pi+t))=(-x(t),\ y(t))$ より

$\pi\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，曲線 C の y 軸対称のグラフとなる．　…………②

$(x(2\pi-t),\ y(2\pi-t))=(x(t),\ -y(t))$ より

$\dfrac{3}{2}\pi\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，曲線 C の x 軸対称のグラフとなる．　…………③

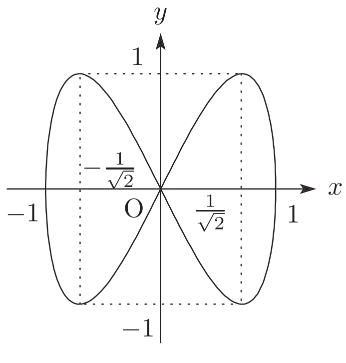
したがって，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において考えればよい．

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-\sin t\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t\end{cases}$$

より，$0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において増減表は次のようになる．

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

よって，原点対称，x 軸対称，y 軸対称に折り返して，グラフは下図のようになる．　(答)



〔補足〕

上の ① ～ ③ のうち 2 つを組み合わせれば $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ におけるグラフから，グラフ全体を考えることができる．

【4】2 点の座標を $\mathrm{A}\,(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}\,(b,\ f(b))$ とする．線分 AB を $t:(1-t)$ (ただし, $0 \leqq t \leqq 1$) に内分する点を Q とすると

$$\mathrm{Q}\,((1-t)a+tb,\ (1-t)f(a)+tf(b))$$

と表される．

また，Q を通る y 軸に平行な直線と $y=f(x)$ との交点を P とすると

$$\mathrm{P}\,((1-t)a+tb,\ f\,((1-t)a+tb))$$

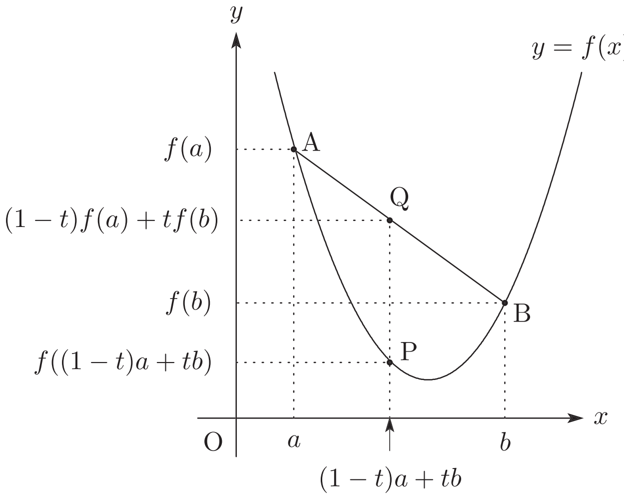
と表される．

$f''(x)>0$ より，$y=f(x)$ は下に凸な曲線であるから，P と Q の y 座標を比較して

$$f\,((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

である．

また，等号が成立するのは，$t=0,\ 1$ のときである．　〔証明終〕



〔別解〕

関数の凸性を使わずに，前半の証明部分は次のように示すこともできる．

$F(a)=f((1-t)a+tb)-(1-t)f(a)-tf(b)$ とする．

$$\begin{aligned}F'(a)&=(1-t)f'((1-t)a+tb)-(1-t)f'(a)\\&=(1-t)\{f'((1-t)a+tb)-f'(a)\}\end{aligned}$$

ここで $f''(x)>0$ より, $f'(x)$ は単調に増加する。$a<b$, $0 \leqq t \leqq 1$ より $(1-t)a+tb>a$ であるから

$$f'((1-t)a+tb)-f'(a)>0$$

よって

$$F'(a)>0$$

ここで，$F(a)$ を $a=b$ とすると $F(b)=0$ であるから，$a<b$ をみたすすべての a について $F(a)<0$ である．

よって

$$f((1-t)a+tb) \leqq (1-t)f(a)+tf(b)$$

【5】$x>0,\ a>0$ であるから，両辺の対数をとって

$$x^a = a^x \iff \log x^a = \log a^x$$

$$\iff \frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a}$$

ここで，$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とすると

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

であるから，増減表は次のようになる．

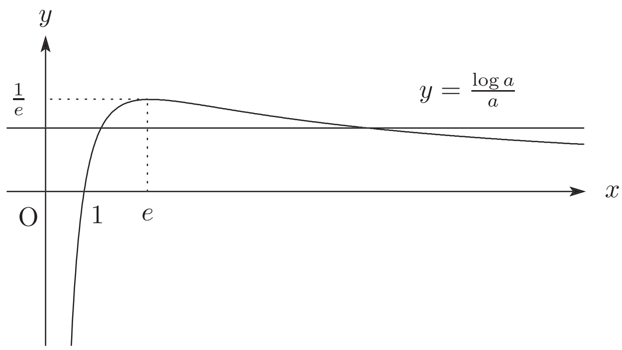
x	0		e	
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘

また

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = 0$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



$y=f(x)$ と $y=f(a)$ (定数) の共有点の個数を求めればよいので

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a\leqq 1,\ a=e} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{1<a<e,\ a>e} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \end{cases}$$ (答)

問題

【1】正四面体の一辺の長さを 2 としても一般性を失わない.

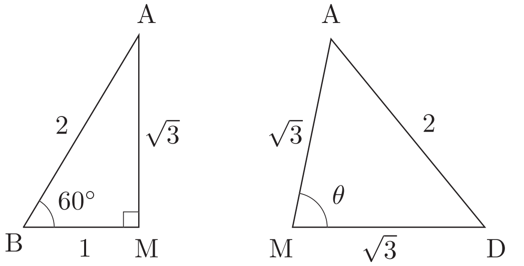
このとき，図 1 より $\mathrm{AM}=\sqrt{3}$ であり，同様に $\mathrm{MD}=\sqrt{3}$ である.

よって，$\triangle\mathrm{AMD}$ は図 2 のようになるから，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{3+3-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

したがって，$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ とから，

$\tan^2\theta=9-1=\mathbf{8}$　　(答)



〔図 1〕　〔図 2〕

【2】正八面体の辺 BC，DE の中点をそれぞれ M，N とし，内接球と△ ABC との接点を T とする．

また，正方形 BCDE の中心を O とする．

(1) $\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\qquad \mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}a$

であるので，△ AMO において，

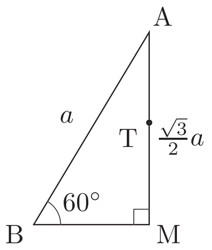
$$\mathrm{AO}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

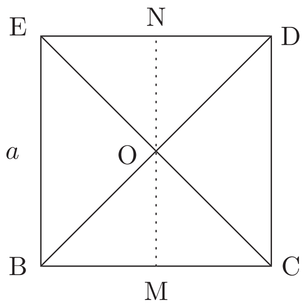
△ AMO と△ OMT は相似であり，

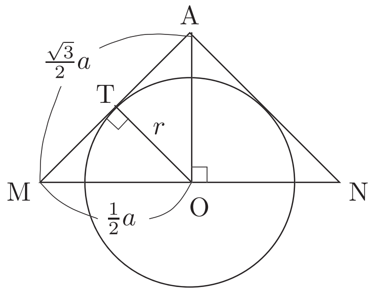
$$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OM}}\qquad\therefore\quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{r}{\frac{1}{2}a}\qquad\therefore\quad a=\boldsymbol{\sqrt{6}r}\qquad(\text{答})$$

(2) 体積 V は四角すい ABCDE の体積の 2 倍であるので，

$$V=2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3=\boldsymbol{4\sqrt{3}r^3}\qquad(\text{答})$$







【3】(1) 2 直線の方向ベクトル $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ のなす角を θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とおくと,

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_2}{\left|\overrightarrow{u}_1\right|\left|\overrightarrow{u}_2\right|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$\cos\theta > 0$ より, θ は鋭角であるから,

$$\alpha = \theta \qquad \therefore \quad \cos\alpha = \cos\theta = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{6}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ より明らかに,

$$\overrightarrow{u}_1 \nparallel \overrightarrow{u}_2$$

よって, ℓ_1, ℓ_2 は平行でない. したがって, あとはこれら 2 直線が交点をもたないことを示せばよい. ℓ_1 上の点 P および ℓ_2 上の点 Q は, 実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s+1 \\ s-1 \\ 3s+2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t+2 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} \mathrm{P}\ (2s+1,\ s-1,\ 3s+2) & (s \text{ は実数}) \\ \mathrm{Q}\ (t-1,\ -t+2,\ 2t-1) & (t \text{ は実数}) \end{cases}$$

とおけるから, これらが一致するとき,

$$\begin{cases} 2s+1 = t-1 & \cdots\cdots ① \\ s-1 = -t+2 & \cdots\cdots ② \\ 3s+2 = 2t-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

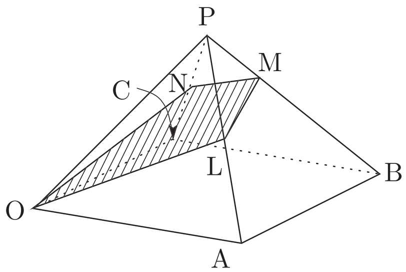
①, ② を解いて,

$$s = \frac{1}{3}, \qquad t = \frac{8}{3}$$

ところが, これらは ③ をみたさない. すなわち, ①, ②, ③ をすべてみたす実数 s, t は存在しないから, 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 は交点をもたない.

以上より, ℓ_1, ℓ_2 は同一平面上にないことが示された. 〔証明終〕

【4】(1) 仮定より，ある実数 s, t が存在して



$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\
&=s\overrightarrow{\mathrm{OL}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}\\
&=\frac{s}{2}\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{p}\right)+\frac{t}{2}\left(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{p}\right)\\
&=\frac{s}{2}\overrightarrow{a}+\frac{t}{2}\overrightarrow{c}+\frac{s+t}{2}\overrightarrow{p} \qquad \cdots\cdots①
\end{aligned}$$

と表される．また，k を $0 \leqq k \leqq 1$ の実数として

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&=(1-k)\overrightarrow{p}+k\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}\right)\\
&=k\overrightarrow{a}+k\overrightarrow{c}+(1-k)\overrightarrow{p} \qquad \cdots\cdots②
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{p}$ は 1 次独立であるから，①, ② より

$$\frac{s}{2}=\frac{t}{2}=k \quad かつ \quad \frac{s+t}{2}=1-k \quad \Longleftrightarrow \quad k=\frac{1}{3}, \quad s=t=\frac{2}{3}$$

したがって，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{c}+\frac{2}{3}\overrightarrow{p}} \quad (答) \quad \cdots\cdots③$$

(2) $\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|\overrightarrow{c}\right|=\left|\overrightarrow{p}\right|=1$ であり

$$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ, \qquad \angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{COP}=60^\circ$$

が成り立つから

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=\boldsymbol{0}, \qquad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}=\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{p}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \quad (答)$$

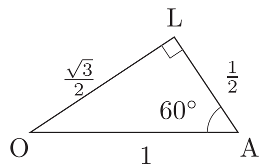
(3) 中点連結定理および (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right), \qquad \left|\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

が成り立つから

$$\begin{cases}
\overrightarrow{\mathrm{LN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right)=\frac{2}{3}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{OL}}\right|^2\right)=0\\
\left|\overrightarrow{\mathrm{LN}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{cases}$$

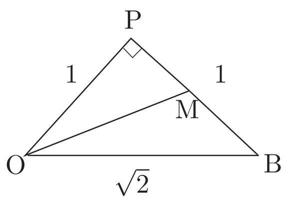
さらに，$\angle\mathrm{OPB}=90^\circ$ より



$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{PO}^2+\mathrm{PM}^2=1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$$

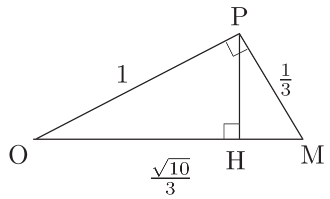
$$\therefore \quad \mathrm{OM}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

であるから，求める面積 S は



$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{LN}\cdot\mathrm{OM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{6}} \quad (答)
\end{aligned}$$

(4) P から α に下ろした垂線の足 H は，線分 OM 上に存在し，さらに (3) より右図を得る．よって



$\triangle \mathrm{OPH} \backsim \triangle \mathrm{OMP}$

が成り立つことから

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}} \iff \mathrm{OH} = \frac{1}{\mathrm{OM}} \quad (\because \ \mathrm{OP} = 1)$$

$$\iff \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}} = \frac{1}{\mathrm{OM}^2} = \frac{9}{10}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{c} + \frac{3}{5}\vec{p}} \qquad (\text{答})$$

(5) (4) より，$\mathrm{OH} = \dfrac{1}{\mathrm{OM}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ であるから

$$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{OP}^2 - \mathrm{OH}^2 = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \qquad \therefore \ \mathrm{PH} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

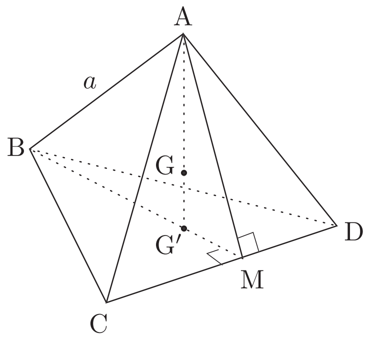
したがって，求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot S \cdot \mathrm{PH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{36}} \qquad (\text{答})$$

【5】(1) この正四面体の 4 頂点を A, B, C, D とする (右図). さらに, △ BCD の重心を G′ とし, 直線 BG′ と辺 CD の交点を M とおく. このとき対称性より,

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

であるから, △ MAB に余弦定理を用いると,



$$\cos\angle\mathrm{AMB} = \frac{\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MB}} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - a^2}{2\cdot\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{3}$$

よって,

$$\mathrm{AG'} = \mathrm{MA}\ \sin\angle\mathrm{AMB} = \frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

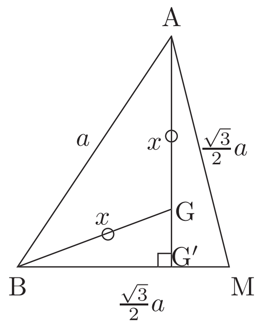
したがって, この正四面体の表面積 S は,

$$S = 4\cdot\triangle\,\mathrm{ACD} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{MA}\right) = 2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \boldsymbol{\sqrt{3}a^2} \qquad \text{(答)}$$

また, 体積 V は,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{S}{4}\cdot\mathrm{AG'} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3} \qquad \text{(答)}$$

(2) この正四面体の重心を G(=内接球および外接球の中心) とすると, 対称性から, G は線分 AG′ 上に存在する. また, △ ABM を考えたとき, AG=BG となるので, AG=BG= x(=外接円の半径) とすると, $\mathrm{GG'} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - x$ より, △ BG′G に三平方の定理を用いて



$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 + \mathrm{BG'}^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\mathrm{BM}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$$

$$\therefore\ x = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}a} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める半径を r とおくと,

$$r = \mathrm{GG'} = \mathrm{AG'} - \mathrm{AG} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{12}a} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 仮定より，

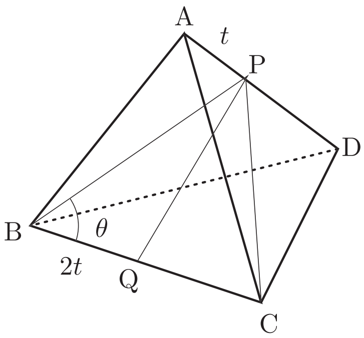
$$\mathrm{AB}=2, \qquad \mathrm{AP}=t, \qquad \angle\mathrm{BAP}=60^\circ$$

であるから， $\triangle$ ABP に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PB}^2 &= 2^2+t^2-2\cdot 2\cdot t\cos 60^\circ \\ &= t^2-2t+4\end{aligned}$$

よって，

$$\mathrm{PB}=\boldsymbol{\sqrt{t^2-2t+4}} \quad \boldsymbol{(0 \leqq t \leqq 1)}$$ (答)



(2) 図形の対称性より，

$$\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$$

であるから， $\triangle$ PBC に余弦定理を用いると，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{PB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{PC}^2}{2\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{2^2}{2\cdot\mathrm{PB}\cdot 2}=\frac{1}{\mathrm{PB}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{t^2-2t+4}}}$$ (答)

(3) $\triangle$ BPQ に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{PB}^2+\mathrm{BQ}^2-2\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{BQ}\cos\theta \\ &= (t^2-2t+4)+(2t)^2-2\cdot 2t \qquad \left(\because \quad \cos\theta=\frac{1}{\mathrm{PB}}\right) \\ &= 5t^2-6t+4 \\ &= 5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{11}{5} \qquad (\text{ただし，} 0 \leqq t \leqq 1)\end{aligned}$$

したがって，求める PQ の長さの最小値は，

$0 \leqq t \leqq 1$ の条件で $\min\mathrm{PQ}=\sqrt{\dfrac{11}{5}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{55}}{5}} \quad \left(t=\dfrac{3}{5} \text{ のとき}\right)$ (答)

３章－２　微分（２）

問題

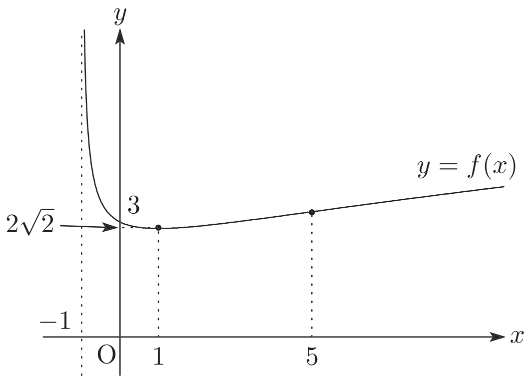
【1】$f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}}$ より

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+1}-(x+3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x+1}$$
$$=\frac{2(x+1)-(x+3)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{x-1}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$
$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)\cdot\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}-3(x-1)(x+1)^{\frac{1}{2}}}{4(x+1)^3}$$
$$=\frac{2(x+1)-3(x-1)}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}$$
$$=\frac{5-x}{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}$$

よって，増減表は次のようになる．

x	-1		1		5	
$f'(x)$	／	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	／	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	↘	$2\sqrt{2}$	↗		↗

したがって，グラフの概形は次のようになる．



よって，変曲点が１点のみなので，それぞれの接点における接線は互いに異なる．$\cdots(*)$

$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(t,\ f(t))$ (ただし，$t>-1$) における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

と表される．これが，A$(a,\ 0)$ を通るとき

$$-f(t)=f'(t)(a-t)$$
$$\therefore\quad -\frac{t+3}{(t+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{t-1}{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}(a-t)$$

$\therefore\quad -2(t+3)(t+1)=(t-1)(a-t)$

$\therefore\quad t^2+(a+9)t-a+6=0 \quad \cdots\cdots(**)$

$(*)$ より，求める条件は，t の 2 次方程式 $(**)$ が $t>-1$ において異なる 2 つの実数解をもつ条件である．

$$
\begin{aligned}
g(t)&=t^2+(a+9)t-a+6\\
&=\left(t+\frac{a+9}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left\{(a+9)^2-4(-a+6)\right\}
\end{aligned}
$$

とすると，条件は

$$
\begin{cases}
\text{軸}：-\dfrac{a+9}{2}>-1 \quad \cdots\cdots ① \\
g(-1)=-2(a+1)>0 \quad \cdots\cdots ② \\
g\left(-\dfrac{a+9}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}\left\{(a+9)^2-4(-a+6)\right\}<0 \quad \cdots\cdots ③
\end{cases}
$$

① より

$a<-7 \quad \cdots\cdots ①'$

② より

$a<-1 \quad \cdots\cdots ②'$

③ より

$\quad a^2+18a+81+4a-24>0$

$\therefore\quad a^2+22a+57>0$

$\therefore\quad (a+3)(a+19)>0$

$\therefore\quad a<-19,\quad a>-3 \quad \cdots\cdots ③'$

$①'$ かつ $②'$ かつ $③'$ より

$\boldsymbol{a<-19}$ 　 (答)

【2】(1) $t=\sin x+\cos x$ より

$$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad \therefore \quad -\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

また

$$t^2=1+2\sin x\cos x \qquad \therefore \quad \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$$

より，分母について

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x&=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\\&=1-2\cdot\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2\\&=1-2\cdot\frac{t^4-2t^2+1}{4}\\&=-\frac{1}{2}\left(t^4-2t^2-1\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{t}{-\frac{1}{2}\left(t^4-2t^2-1\right)}\\&=\boldsymbol{\frac{-2t}{t^4-2t^2-1}} \quad \boldsymbol{\left(-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}\right)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ より，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

このとき，

$$f(x)=g(t)=\frac{-2t}{t^4-2t^2-1} \quad \left(-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned}g'(t)&=-2\cdot\frac{(t^4-2t^2-1)-t(4t^3-4t)}{(t^4-2t^2-1)^2}\\&=-2\cdot\frac{-3t^4+2t^2-1}{(t^4-2t^2-1)^2}\\&=\frac{2(3t^4-2t^2+1)}{(t^4-2t^2-1)^2}\\&=\frac{2\left\{2t^4+(t^2-1)^2\right\}}{(t^4-2t^2-1)^2}>0\end{aligned}$$

より，$g(t)$ は単調増加の関数であるから

$$\begin{cases} t=\sqrt{2} \text{ のとき} & \text{最大値 } 2\sqrt{2} \\ t=-1 \text{ のとき} & \text{最小値 } -1 \end{cases}$$

である．

- $t=\sqrt{2}$ のとき

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\therefore \quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \quad \left(\because \quad \frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\therefore \quad x=\frac{\pi}{4}$$

- $t=-1$ のとき

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$\therefore\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi \quad \left(\because\quad \frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\therefore\quad x=\pi$$

よって,

$$\begin{cases} x=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}} \text{ のとき} \quad \text{最大値 } \mathbf{2\sqrt{2}} \\ x=\boldsymbol{\pi} \text{ のとき} \quad \text{最小値 } \mathbf{-1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において

$$f'(\theta)=\frac{-\sin\theta(\sin\theta\cos\theta)-(1+\cos\theta)(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)\cos\theta-(1+\cos\theta)(2\cos^2\theta-1)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-(1+\cos\theta)(\cos^2\theta+\cos\theta-1)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-(1+\cos\theta)\left(\cos\theta-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\cos\theta-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

より，増減表は次のようになる．

θ	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$	／	$-$	0	$+$	／
$f(\theta)$	／	↘		↗	／

(ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ となる鋭角)

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\cos\alpha}\quad(\because\quad \cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0)$$
$$=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

であり，最小値は

$$f(\alpha)=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{(\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\frac{(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}}$$
$$=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)^{-\frac{3}{2}}$$

ここで

$$(\sqrt{5}-1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

より

$$f(\alpha)=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{5}+1)^{\frac{5}{2}}}\qquad(答)$$

【4】 $f_n(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$ とおき，$x>0$ において，$f_n(x)>0$ が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のとき

$$f_1(x)=e^x-1-x \qquad \therefore \quad {f_1}'(x)=e^x-1>0$$

より $f_1(x)$ は，$x>0$ の範囲で単調増加であり，$x>0$ のとき

$$f_1(x)>f_1(0)=0$$

よって，$n=1$ のときに成立する．

(ii) $n=k$ のときに成り立つと仮定する．つまり，$x>0$ において

$$f_k(x)=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}\right)>0$$

が成り立つと仮定すると

$$f_{k+1}(x)=e^x-\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right\}$$

$${f_{k+1}}'(x)=e^x-\left\{1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x^k}{k!}\right\}=f_k(x)>0$$

$f_{k+1}(x)$ は $x>0$ の範囲で単調増加であり，$x>0$ のとき

$$f_{k+1}(x)>f_{k+1}(0)=0$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $f_n(x)>0$ が成り立つ．　〔証明終〕

【5】(1) B(0, 1, 0) とおく． s を実数として

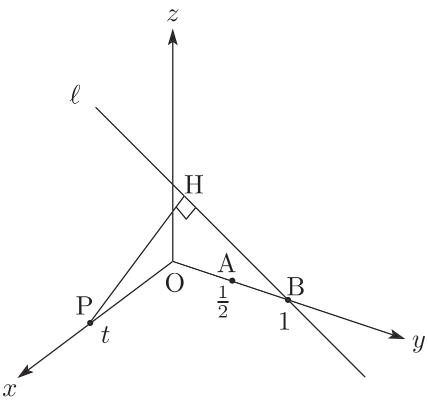
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = s\,\overrightarrow{d}$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

と表される．



PH $\perp \ell$ より $\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{d} = 0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} \cdot \overrightarrow{d} = \begin{pmatrix} s-t \\ 1 \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= s - t + s = 2s - t$$

$$\therefore \quad 2s - t = 0$$

$$\therefore \quad s = \frac{1}{2}t$$

よって

$$\mathrm{H}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}t,\ 1,\ \frac{1}{2}t}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ 1 \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 = t^2 + \frac{1}{4},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|^2 = \frac{1}{4}t^2 + 1 + \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}t^2 + 1,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{APH} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{PH}}|}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(t^2+1)}{\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{2}t^2+1}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}(t^2+1)}{\sqrt{(t^2+2)(4t^2+1)}}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $0 < \theta < \pi$ において $\cos\theta$ は単調減少の関数であるから，$\angle\mathrm{APH}$ が最大となるのは $\cos\angle\mathrm{APH}$ が最小となるときである．また，(2) より $\cos\angle\mathrm{APH} > 0$ より $\cos^2\angle\mathrm{APH}$ が最小となるときを考えればよい．

$t^2 = x \geqq 0$ として

$$f(x) = \frac{2(x+1)^2}{(x+2)(4x+1)} \quad (x \geqq 0)$$

とすると

$$f'(x) = \frac{4(x+1)(x+2)(4x+1) - 2(x+1)^2 \cdot (4x+1+4x+8)}{(x+2)^2(4x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-5)}{(x+2)^2(4x+1)^2}$$

より，増減表は次のようになる．

x	0		5	
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって，$x = 5$ のとき $f(x)$ すなわち $\cos^2\angle\mathrm{APH}$ が最小となる．

このとき

$t = \pm\boldsymbol{\sqrt{5}}$　　(答)

問題

【1】 ● $P \Longrightarrow Q$ について

P が成り立つとき，特に $x=0$, ± 1 として，

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ -a+b-c+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=0 \\ a+b+c=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=0 \\ a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，$x=2$ として，

$$8a+2c=0 \qquad (\because \quad b=d=0)$$

$$\therefore \quad 4a+c=0$$

$$\therefore \quad 4a-a=0 \qquad (\because \quad a+c=0)$$

$$\therefore \quad 3a=0$$

$$\therefore \quad a=0$$

このとき，① より $c=0$ であるから，以上より，

$$a=b=c=d=0$$

よって，Q が成り立つ．

● $Q \Longrightarrow P$ について

Q が成り立つとき，すべての x に対して，

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$$

すなわち，

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

が x の恒等式となるから，P が成り立つ．

以上より，P，Q は同値であることが示された．　　〔証明終〕

【2】(1) $f(0)$ が整数なので，

b は整数　$\cdots\cdots$①

次に，$f(1)=1+a+b$ が整数なので，① とから，

a は整数

よって示された．　　　〔証明終〕

(2) $f(0)$ が偶数なので，

b は偶数　$\cdots\cdots$②

次に，$f(1)=1+a+b$ が偶数なので，② とから，

a は奇数　$\cdots\cdots$③

逆に，「② かつ ③」が成り立つとき，

- n が偶数のとき：

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2+an+b \\ &= (\text{偶数})+(\text{偶数})+(\text{偶数}) \\ &= (\text{偶数}) \end{aligned}$$

- n が奇数のとき：

$$\begin{aligned} f(n) &= n^2+an+b \\ &= (\text{奇数})+(\text{奇数})+(\text{偶数}) \\ &= (\text{偶数}) \end{aligned}$$

以上より，求める必要十分条件は，「② かつ ③」すなわち，

a が奇数，かつ，b が偶数　　(答)

【3】整数 n は，３で割った余りに注目することによって，

$n=3k,\quad 3k+1,\quad 3k+2$　　（k は整数）

の３タイプに分けられる．$f(n)=n(n^2+2)$ より，

(i) $n=3k$ のとき

$$f(n)=3k(9k^2+2)$$

より，$f(n)$ は３の倍数である．

(ii) $n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} f(n)&=(3k+1)\{(3k+1)^2+2\}\\ &=(3k+1)(9k^2+6k+3)\\ &=3(3k+1)(3k^2+2k+1) \end{aligned}$$

より，$f(n)$ は３の倍数である．

(iii) $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} f(n)&=(3k+2)\{(3k+2)^2+2\}\\ &=(3k+2)(9k^2+12k+6)\\ &=3(3k+2)(3k^2+4k+2) \end{aligned}$$

より，$f(n)$ は３の倍数である．

以上より，示された．　　〔証明終〕

＜別解＞

$$\begin{aligned} f(n)&=n(n^2+2)\\ &=n\{(n+1)(n-1)+3\}\\ &=(n-1)n(n+1)+3n \end{aligned}$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する３つの整数であるから，３の倍数であり，$f(n)$ は３の倍数である．

〔証明終〕

【4】(1) 整数 n は，6 で割った余りに注目することによって，

$$n=6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5 \qquad (k \text{ は整数})$$

の 6 タイプに分けられる．このうち，

$$\begin{cases} 6k,\ 6k+2,\ 6k+4 \quad \text{は 2 で割り切れ，} \\ 6k+3 \quad \text{は 3 で割り切れる．} \end{cases}$$

また，

$$\begin{cases} 6k+1=2(3k)+1=3(2k)+1 \\ 6k+5=2(3k+2)+1=3(2k+1)+2 \end{cases}$$

と表されるので，これらは 2 でも 3 でも割り切れない．以上より，

$$n=6k+1,\ 6k+5$$

であり，n を 6 で割った余りは

1 または 5　　(答)

(2) (1) より，$n=6k+1,\ 6k+5$ であり，

(i) $n=6k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2-1 &= (6k+1)^2-1 \\ &= 36k^2+12k \\ &= 24k^2+12k^2+12k \\ &= 24k^2+12k(k+1) \end{aligned}$$

$k,\ k+1$ のうち一方は 2 の倍数であるから，n^2-1 は 24 の倍数である．

(ii) $n=6k+5$ のとき，$n=6l-1$ とも表せて

$$\begin{aligned} n^2-1 &= (6l-1)^2-1 \\ &= 36l^2-12l \\ &= 24l^2+12l^2-12l \\ &= 24l^2+12l(l-1) \end{aligned}$$

$l,\ l-1$ のうち一方は 2 の倍数であるから，n^2-1 は 24 の倍数である．

以上より，示された．　　〔証明終〕

【5】(1) 2^n $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を 10 で割った余りは，下表のようになる．

2^n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	$\cdots\cdots$
余り	2	4	8	6	2	4	8	6	$\cdots\cdots$

さて，ここで

$$2^{k+4}-2^k=2^k(2^4-1)=2^k\cdot3\cdot5$$

であるから，$k\geqq1$ のとき，$2^{k+4}-2^k$ は 10 の倍数.

よって，2^{k+4} と 2^k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を 10 で割った余りは一致する.

これと表より，2^n を 10 で割った余りは，

「**2，4，8，6**」の繰り返し　〔証明終〕

である.

(2) まず，(1) と同様に，3^n の余りの動きを調べる.

$$3^{k+4}-3^k=3^k(3^4-1)=3^k\cdot80=(10\text{ の倍数})$$

より，3^{k+4} と 3^k $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を 10 で割った余りは一致する.

さらに，最初の 4 項についての余りは,

3，9，7，1

であるので，3^n を 10 で割った余りは,

「3，9，7，1」の繰り返しである

したがって，(1) とから,

$f(n)$ を 10 で割った余りは，長さ 4 の周期性をもつ

よって，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ を調べれば十分であり,

$$f(1)=2+3+7=12\qquad f(2)=4+9+7=20$$
$$f(3)=8+27+7=42\qquad f(4)=16+81+7=104$$

であるので，求める n の条件は,

4で割ると2余る数　〔証明終〕

である.

【6】(1) $f(n)=n^9-n^3$ とおくと，

$$f(n)=n^3(n^6-1)$$
$$=n^3(n^3-1)(n^3+1) \quad \cdots\cdots①$$

ここで，整数 n を

$n=3k,\ 3k+1,\ 3k-1 \quad (k$ は整数)

の 3 タイプに分けて考えると，

(i) $n=3k$ のとき

$$n^3=27k^3=9(3k^3)$$

① より，$f(n)$ は 9 の倍数である．

(ii) $n=3k+1$ のとき

$$n^3-1=(3k+1)^3-1$$
$$=27k^3+27k^2+9k$$
$$=9(3k^3+3k^2+k)$$

① より，$f(n)$ は 9 の倍数である．

(iii) $n=3k-1$ のとき

$$n^3+1=(3k-1)^3+1$$
$$=27k^3-27k^2+9k$$
$$=9(3k^3-3k^2+k)$$

① より，$f(n)$ は 9 の倍数である．

したがって，題意は示された．　〔証明終〕

(2) まず，次のことに注意する．

2^n+1 が 15 で割り切れる　$\Longleftrightarrow$　2^n を 15 で割ると 14 余る　$\cdots\cdots$②

そこで，すべての正の整数 n に対して，② が成立しないことを示す．

ここで，整数 n を

$n=4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3 \quad (k$ は整数)

の 4 タイプに分けて考えると，

(i) $n=4k$ のとき

$$2^n=2^{4k}$$
$$=16^k$$
$$=(15+1)^k$$
$$=15^k+{}_k\mathrm{C}_1 15^{k-1}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}15+1$$
$$=15\left(15^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_1 15^{k-2}+{}_k\mathrm{C}_2 15^{k-3}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-2}15+{}_k\mathrm{C}_{k-1}\right)+1$$
$$=15N+1$$
$$(N=15^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_1 15^{k-2}+{}_k\mathrm{C}_2 15^{k-3}+\cdots\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-2}15+{}_k\mathrm{C}_{k-1})$$

より，2^n は 15 で割ると 1 余る．

(ii) $n=4k+1$ のとき，同様にして

$$2^n=2^{4k+1}$$
$$=2\cdot 16^k$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot (15N+1) \\
&= 15 \cdot 2N + 2
\end{aligned}
$$

より，2^n は 15 で割ると 2 余る.

(iii) $n = 4k+2$ のとき，同様にして

$$
\begin{aligned}
2^n &= 2^{4k+2} \\
&= 4 \cdot 16^k \\
&= 4 \cdot (15N+1) \\
&= 15 \cdot 4N + 4
\end{aligned}
$$

より，2^n は 15 で割ると 4 余る.

(iv) $n = 4k+3$ のとき，同様にして

$$
\begin{aligned}
2^n &= 2^{4k+3} \\
&= 8 \cdot 16^k \\
&= 8 \cdot (15N+1) \\
&= 15 \cdot 8N + 8
\end{aligned}
$$

より，2^n は 15 で割ると 8 余る.

以上より，すべての正の整数 n に対して，② は成立しない.

したがって，$2^n + 1$ は 15 で割り切れないことが示された.　〔証明終〕

＜別解＞

$a_n = 2^n + 1$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
a_{n+4} &= 2^{n+4} + 1 \\
&= 16 \cdot 2^n + 1 \\
&= (15+1) \cdot 2^n + 1 \\
&= 15 \cdot 2^n + (2^n + 1) \\
&= 15 \cdot 2^n + a_n
\end{aligned}
$$

よって

a_{n+4} と a_n を 15 で割った余りは一致する　$\cdots\cdots$③

(ア) $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき，

$a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_3 = 9,\ a_4 = 17$

を 15 で割ると，余りはそれぞれ 3, 5, 9, 2 となるから，これらは 15 で割り切れない.

(イ) ある n に対して，a_n が 15 で割り切れないとすると，③ より，a_{n+4} も 15 で割り切れない.

以上 (ア)，(イ) より，数学的帰納法により，$2^n + 1$ は 15 で割り切れないことが示された.

〔証明終〕

問題

【1】(1) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とすると

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\qquad\text{〔証明終〕}\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1\\ &= 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1\\ &= \frac{2}{1+t^2}-1\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad\text{〔証明終〕}\end{aligned}$$

また

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1+t^2}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2}\qquad\text{〔証明終〕}$$

(2)　(i)

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\tan x} &= \int\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx\\ &= \int\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{dx}{dt}dt\quad\left(t=\tan\frac{x}{2}\text{とおいた}\right)\\ &= \int\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}dt\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1-t^2}{t(1+t^2)}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{1+t^2}$$

となるような実数 a, b, c を求めると

$$\begin{aligned}\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{1+t^2} &= \frac{a(1+t^2)+t(bt+c)}{t(1+t^2)}\\ &= \frac{(a+b)t^2+ct+a}{t(1+t^2)}\end{aligned}$$

より

$$\begin{cases}a+b=-1\\ c=0\\ a=1\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=0\end{cases}$$

となるから

$$\frac{1-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\tan x} &= \int \frac{1-t^2}{t(1+t^2)}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{1+t^2}\right)dt \\
&= \log|t| - \log|1+t^2| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}) \\
&= \log\left|\frac{t}{1+t^2}\right| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}) \\
&= \log\left|\frac{1}{2}\sin x\right| + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}) \\
&= \log|\sin x| + \log\frac{1}{2} + C_0 \quad (C_0 \text{ は積分定数}) \\
&= \boldsymbol{\log|\sin x| + C \quad (C \text{ は積分定数})} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} \\
=&\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dx}{dt}dt \quad \left(t = \tan\frac{x}{2} \text{とおいた}\right) \\
=&\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2+2t+1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt \\
=&\int_0^1 \frac{dt}{1+t} \\
=&\Big[\log|1+t|\Big]_0^1 \\
=&\boldsymbol{\log 2} \qquad (\text{答})
\end{aligned}$$

【2】(1) $x=c(\theta)$，$y=s(\theta)$ とおくと，

$$x^2-y^2=\frac{\left(e^\theta+e^{-\theta}\right)^2}{4}-\frac{\left(e^\theta-e^{-\theta}\right)^2}{4}=1$$

また，$e^\theta>0$，$e^{-\theta}>0$ より，相加・相乗平均の関係より

$$x=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\geqq\sqrt{e^\theta\cdot e^{-\theta}}=1$$

したがって，$(x,\ y)=(c(\theta),\ s(\theta))$ が描く軌跡の方程式は

$\boldsymbol{x^2-y^2=1}$ **(ただし，$\boldsymbol{x\geqq 1}$)**　　(答)

(2)

$$\frac{d}{d\theta}\{s(\theta)\}=\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}=c(\theta)$$
〔証明終〕

$$\frac{d}{d\theta}\{c(\theta)\}=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}=s(\theta)$$
〔証明終〕

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\{t(\theta)\}&=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}\right)\\&=\frac{\left(e^\theta+e^{-\theta}\right)^2-\left(e^\theta-e^{-\theta}\right)^2}{\left(e^\theta+e^{-\theta}\right)^2}\\&=\frac{4}{\left(e^\theta+e^{-\theta}\right)^2}\\&=\frac{1}{\left(\frac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}\right)^2}\\&=\frac{1}{\{c(\theta)\}^2}\end{aligned}$$
〔証明終〕

(3) $y=s(\theta)=\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$ とおくと，$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}\{s(\theta)\}=c(\theta)$ である．

また，θ について解くと

$$e^{2\theta}-2ye^\theta-1=0$$

$$\therefore\quad e^\theta=y+\sqrt{y^2+1}\qquad(\because\quad e^\theta>0)$$

$$\therefore\quad \theta=\log\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y^2+1}}&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{\{s(\theta)\}^2+1}}\ \frac{dy}{d\theta}d\theta\\&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}\frac{c(\theta)}{c(\theta)}d\theta\\&=\int_0^{\log(1+\sqrt{2})}d\theta\\&=\Big[\ \theta\ \Big]_0^{\log(1+\sqrt{2})}\\&=\boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}\end{aligned}$$
(答)

【3】(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ とする.

$\pi - t = x$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ より

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \\
&= \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt \\
&= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt \\
&= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - I
\end{aligned}$$

$\therefore \quad I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ 〔証明終〕

(2)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 x dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx \\
&= \frac{\pi}{4}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}
\end{aligned}$$

(答)

【4】(1) $x=1-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$ より

$$\begin{aligned}
I(q,\ p)&=\int_0^1 x^q(1-x)^p dx\\
&=\int_1^0 (1-t)^q t^p \frac{dx}{dt}dt\\
&=\int_0^1 t^p(1-t)^q dt\\
&=I(p,\ q) \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
I(p,\ q)&=\int_0^1 x^p(1-x)^q dx\\
&=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\cdot(1-x)^q\right]_0^1-\int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\left\{-q(1-x)^{q-1}\right\}dx\\
&=\frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx\\
&=\frac{q}{p+1}I(p+1,\ q-1) \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
I(m,\ n)&=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot I(m+2,\ n-2)\\
&=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\cdots\frac{1}{m+n}\cdot I(m+n,\ 0)\\
&=\frac{n!}{\frac{(m+n)!}{m!}}\int_0^1 x^{m+n}dx\\
&=\frac{m!n!}{(m+n)!}\left[\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right]_0^1\\
&=\boldsymbol{\frac{m!n!}{(m+n+1)!}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【5】(1) $$I_0=\int_0^1 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^2-1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n \geqq 1$ において

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{2x}dx \\ &= \left[x^n\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 nx^{n-1}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}n\int_0^1 x^{n-1}e^{2x}dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}nI_{n-1} \quad (n \geqq 1)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) (2) より

$$I_4=\frac{1}{2}e^2-2I_3 \quad \cdots\cdots①$$

$$I_3=\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}I_2 \quad \cdots\cdots②$$

$$I_2=\frac{1}{2}e^2-I_1 \quad \cdots\cdots③$$

$$I_1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}I_0 \quad \cdots\cdots④$$

よって，$① - 2 \times ② - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times ③ - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times (-1) \times ④$，すなわち，
$① - 2 \times ② + 3 \times ③ - 3 \times ④$ より

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2}e^2(1-2+3-3)-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)I_0 \\ &= -\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}I_0 \\ &= -\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{e^2-1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(e^2-3)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) $t=\sin x$ とおくと

$$\frac{dt}{dx}=\cos x \qquad \therefore \ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos x}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x\cos x)e^{2\sin x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x)e^{2\sin x}\cos x dx \\ &= \int_0^1 t^5e^{2t}dt \\ &= I_5 \\ &= \frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}I_4 \\ &= \frac{1}{2}e^2-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}(e^2-3) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{8}(-e^2+15)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

問題

【1】(1) $\sin\theta - \cos\theta = t$ とおくと，

$$t^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore\quad 2\sin\theta\cos\theta = 1 - t^2$$

また，$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$　$\cdots\cdots$①　と表されることから，

$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}\qquad (\because\ \ \theta \text{ は任意})$$

したがって，

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin^3\theta - \cos^3\theta + 4\sin\theta\cos\theta \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)(1 + \sin\theta\cos\theta) + 4\sin\theta\cos\theta \\ &= t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) + 2(1-t^2) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{3}{2}t + 2\qquad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2})} \end{aligned}$$　(答)

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，① より，

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

このとき，

$$g(t) = -\frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{3}{2}t + 2\qquad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$$

のとる値の範囲は，

$$f(\theta)\qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

のとる値の範囲に一致する．ここで，

$$g'(t) = -\frac{3}{2}t^2 - 4t + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(t+3)\left(t - \frac{1}{3}\right)$$

よって，右の表より，

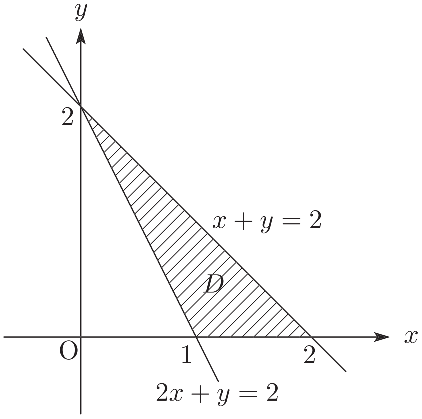
t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{61}{27}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - 2$

$$g(\sqrt{2}) \leqq g(t) \leqq g\left(\frac{1}{3}\right)$$

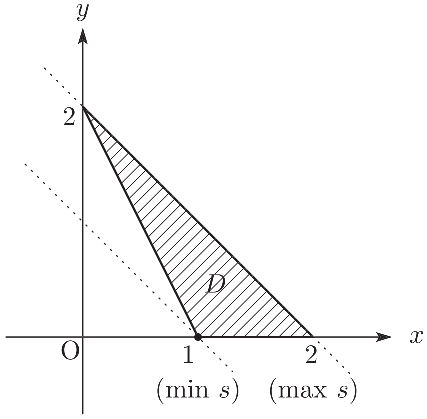
を得るから，

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \leqq f(\theta) \leqq \frac{61}{27}}$$　(答)

【2】(1) 領域 D は図 1 の斜線部分 (境界を含む) となる.　　(答)



〔図 1〕



〔図 2〕

(2) (i) $x+y=s$ とおくと，図 2 より

$1 \leqq s \leqq 2$

よって

$\min(x+y)=\mathbf{1}$,　$\max(x+y)=\mathbf{2}$　(答)

(ii) $x^2+y=t \iff y=-x^2+t$ とおくと，図 3 より，

放物線 $y=-x^2+t$ が直線 $2x+y=2$ に接する

$\iff$ 2 次方程式 $2x+(-x^2+t)=2$ が重解をもつ

$\iff$ 2 次方程式 $x^2-2x+2-t=0$ が重解をもつ

$\iff 1^2-(2-t)=0$

$\iff t=1$

このとき，接点 $(1,\ 0)$ となり，これは領域 D 内に存在する．また，

放物線 $y=-x^2+t$ が点 $(2,\ 0)$ を通る　$\iff$　$t=4$

よって

$\min(x^2+y)=\mathbf{1}$,　$\max(x^2+y)=\mathbf{4}$　(答)

(iii) $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$ とおくと，図 4 より，

円 $x^2+y^2=r^2$ が直線 $2x+y=2$ に接する

$\iff$ 円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $2x+y-2=0$ との距離が r に等しい

$$\iff r=\frac{|-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

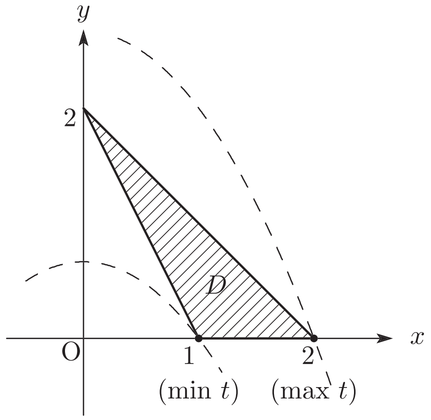
$$\iff r=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

また，

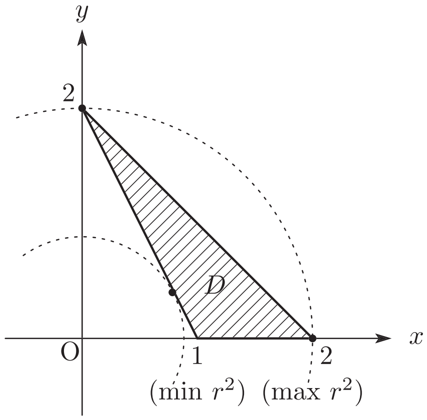
円 $x^2+y^2=r^2$ が点 $(2,\ 0)$, $(0,\ 2)$ を通る　$\iff$　$r^2=4$

よって

$\min(x^2+y^2)=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$,　$\max(x^2+y^2)=\mathbf{4}$　(答)



〔図 3〕



〔図 4〕

【3】 (1) $x<0$ より，$-x>0$，$-\dfrac{1}{x}>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式を使って，

$$(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)\geqq 2\sqrt{(-x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=2$$

$$\therefore\quad -\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq 2$$

$$\therefore\quad f(x)=x+\frac{1}{x}\leqq -2$$

等号成立は，

$$-x=-\frac{1}{x}\text{ かつ }x<0\quad\Longleftrightarrow\quad x=-1$$

のときであるから，求める $f(x)$ の最大値は，

$\max f(x)=f(1)=\boldsymbol{-2}$　　(答)

(2) 与えられた関数は，

$$g(x)=x-2+\frac{5}{x-2}+2$$

と変形できる．$x-2>0$ より，相加・相乗平均の不等式を使うと，

$$x-2+\frac{5}{x-2}\geqq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{5}{x-2}}=2\sqrt{5}$$

$$\therefore\quad g(x)=x-2+\frac{5}{x-2}+2\geqq 2\sqrt{5}+2$$

等号成立は，

$$x-2=\frac{5}{x-2}\text{ かつ }x-2>0\quad\Longleftrightarrow\quad x=2+\sqrt{5}$$

のときであるから，求める $g(x)$ の最小値は，

$\min g(x)=g\left(2+\sqrt{5}\right)=\boldsymbol{2\left(\sqrt{5}+1\right)}$　　(答)

(3) 与えられた関数において，

$$h(x)=2x+\frac{1}{x^2}\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

と相加・相乗平均の関係を使ってはうまく最小値が求められない (→ **≪注≫**).

そこで，$2x=x+x$ と分けて，$n=3$ のときの相加・相乗平均の不等式を利用す

ると，

$$h(x)=x+x+\frac{1}{x^2}\geqq 3\sqrt[3]{x\cdot x\cdot\frac{1}{x^2}}=3\sqrt[3]{1}=3$$

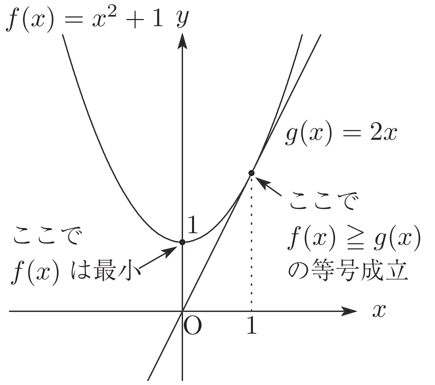
$\therefore\quad h(x)\geqq 3$

等号成立は，

$$x=\frac{1}{x^2}\text{ かつ }x>0\quad\Longleftrightarrow\quad x=1$$

のときであるから，求める $h(x)$ の最小値は，

$\min h(x)=h(1)=\mathbf{3}$　　(答)



≪注≫ $h(x)\geqq\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$ で等号成立は

$$2x=\frac{1}{x^2}\text{ かつ }x>0\Longleftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

のときであるから，

$$\min h(x)=h\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$$

と解答しなかっただろうか？

これは誤答である．実際，不等式 $f(x)\geqq g(x)$　……① が成立していても，

<u>①で等号が成立するときと $f(x)$ が最小となるときは，一般に無関係</u> だからである(右上図を参照).

(4) $x\leqq 0$ のとき $j(x)\leqq 0$，$x>0$ のとき $j(x)>0$ であるから，最大値を考える際は，$x>0$ で考えればよい．このとき，分母・分子を x で割ると，

$$j(x)=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\leqq\frac{1}{2}\quad(\because\ \text{相加・相乗平均の不等式より})$$

さらに，$j(1)=\dfrac{1}{2}$(等号成立) であるから，求める $j(x)$ の最大値は，

$$\max j(x)=j(1)=\mathbf{\frac{1}{2}}\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) $x>1$ において，$\log_2 x>0$ であるから，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3\log_4\sqrt{x}+\log_x 8\\
&= \frac{3\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4}+\frac{\log_2 8}{\log_2 x} \quad (\because\ \ \text{底の変換})\\
&= \frac{3}{4}\log_2 x+\frac{3}{\log_2 x}\\
&\geqq 2\sqrt{\frac{3}{4}\log_2 x\cdot\frac{3}{\log_2 x}}=3 \quad (\because\ \ \text{相加・相乗平均の不等式より})
\end{aligned}
$$

ここで，等号成立条件は，

$$\frac{3}{4}\log_2 x=\frac{3}{\log_2 x} \iff \log_2 x=2(>0) \iff x=\mathbf{4} \qquad (\text{答})$$

したがって，求める最小値は，

$x>1$ において $f(x)\geqq f(4)=\mathbf{3}$ (答)

(2) (1) より，$x>1$ であるようなすべての x に対して，与えられた不等式が成り立つ条件は，

$$
\begin{aligned}
x>1 \text{ において } f(x)\geqq(a-1)^2 &\iff 3\geqq(a-1)^2\\
&\iff -\sqrt{3}\leqq a-1\leqq\sqrt{3}\\
&\iff \boldsymbol{1-\sqrt{3}\leqq a\leqq 1+\sqrt{3}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

【5】 $k=0$ のとき，与式はつねに成り立つので，最大値は $k \geqq 0$ の範囲にある．

よって，この範囲で考えれば十分であり，$x^2=X$ とおいて両辺を 2 乗すれば，

$$(X+2)^2 \geqq k^2(X+1)$$

$$\iff \quad X^2+(4-k^2)X+4-k^2 \geqq 0 \quad (X \geqq 0)$$

放物線 $Y=X^2+(4-k^2)X+4-k^2 \quad (X \geqq 0)$ の軸は

$$X=\frac{k^2-4}{2}$$

であり，この軸は，k が大きくなるにつれて X 軸の正方向へ移る．

いま，k が最大となる場合を考えているから，k を大きくして，$X \geqq 0$ にある場合から考えると，

$$k^2 \geqq 4 \qquad \therefore \quad k \geqq 2 \quad (\because \quad k \geqq 0) \quad \cdots\cdots ①$$

で，さらにこのとき，

$$X^2+(4-k^2)X+4-k^2=0$$

の判別式の符号について，

$$(4-k^2)^2-4(4-k^2) \leqq 0$$

$$\therefore \quad k^2(k-2)(k+2) \leqq 0$$

$$\therefore \quad 0 \leqq k \leqq 2 \quad (\because \quad k \geqq 0) \quad \cdots\cdots ②$$

であれば十分である．したがって，①，② より，

$\max k = \mathbf{2}$ 　　(答)

＜別解＞

与えられた不等式を

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqq k$$

と変形すれば，左辺の最小値が k の最大値を与える．

左辺に相加・相乗平均の不等式を用いれば，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &\geqq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2\end{aligned}$$

等号成立は，

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \therefore \quad x=0$$

のときである．以上より，求める k の最大値は，

$\max k = \mathbf{2}$ 　　(答)

【6】(1) $\begin{cases} x \text{ を } -x \text{ に変えても式は不変だから，} A \text{ は } y \text{ 軸対称.} \\ y \text{ を } -y \text{ に変えても式は不変だから，} A \text{ は } x \text{ 軸対称.} \end{cases}$

そこで，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において考えると，

$$x+y+|x-y| \leqq 2$$

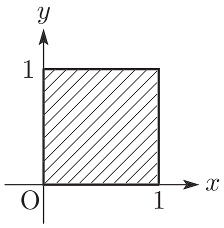
$$\iff \begin{cases} x \geqq y \quad \text{かつ} \quad x+y+(x-y) \leqq 2 \\ \text{または,} \\ x \leqq y \quad \text{かつ} \quad x+y-(x-y) \leqq 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqq y \quad \text{かつ} \quad x \leqq 1 \\ \text{または,} \\ x \leqq y \quad \text{かつ} \quad y \leqq 1 \end{cases}$$

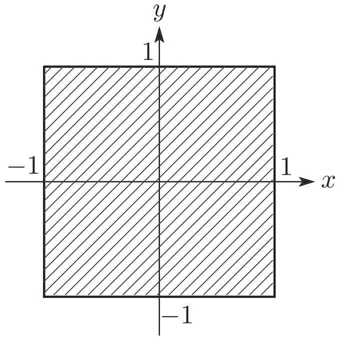
よって，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ では図 1 の通り．

したがって，A は図 2 の斜線部 (境界を含む) である．

(答)



〔図 1〕

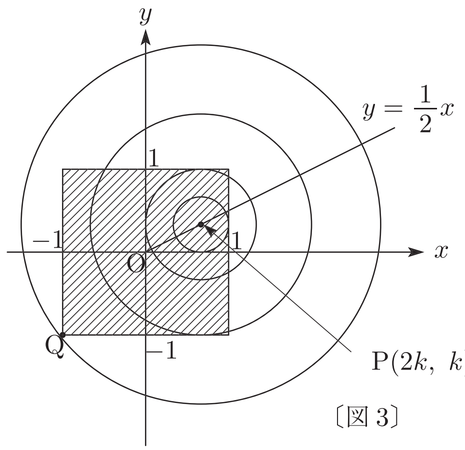


〔図 2〕

(2) $f(x,\ y) = x^2+y^2-4kx-2ky+5k^2$

$\qquad\qquad = (x-2k)^2+(y-k)^2$

とおくと，これは点 $\mathrm{P}(2k,\ k)$ と $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の距離の平方を表す．



〔図 3〕

さて，$k \geqq 0$ だから，点 $\mathrm{P}(2k,\ k)$ は必ず半直線 $y=\dfrac{1}{2}x\ (x \geqq 0)$ 上にある．

よって，点 P の位置によらず，$\mathrm{Q}(-1,\ -1)$ のときに $f(x,\ y)$ は最大になり (図 3)，その値は

$$f(-1,\ -1) = (-1-2k)^2+(-1-k)^2$$

$$= \boldsymbol{5k^2+6k+2} \qquad \text{(答)}$$

(3) $(x-2k)^2+(y-k)^2=16$

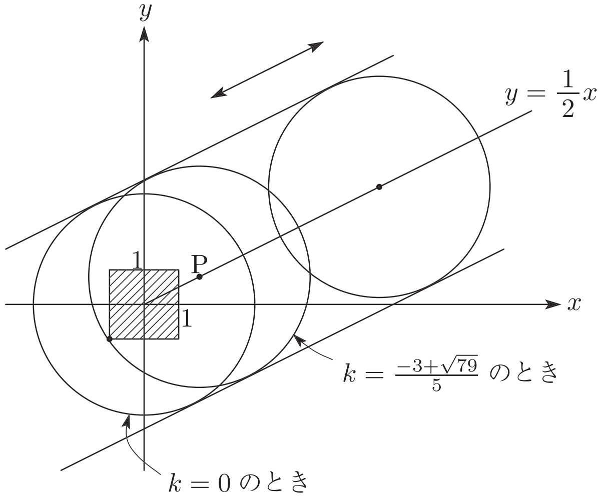
より，B は中心 $\mathrm{P}(2k,\ k)$，半径 4 の円である．よって，円の大きさは一定であるから，この円を連続的に動かせば，求める k は，円が点 $(-1,\ -1)$ を通るときであるとわかる．

したがって

$$5k^2+6k+2=16 \iff 5k^2+6k-14=0$$

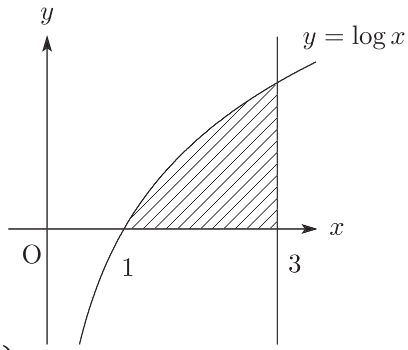
$k \geqq 0$ より,

$$k=\boldsymbol{\frac{-3+\sqrt{79}}{5}} \qquad \text{(答)}$$



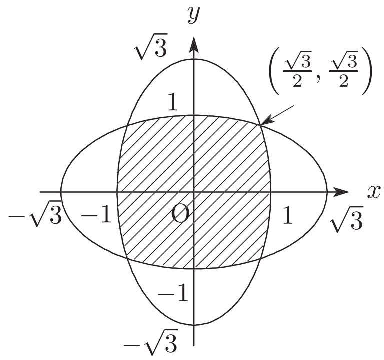
問題

【1】グラフは図のようになるから



$$S = \int_1^3 \log x dx$$
$$= \Big[x \cdot \log x\Big]_1^3 - \int_1^3 x \cdot \frac{1}{x} dx$$
$$= 3\log 3 - (3-1)$$
$$= \mathbf{3\log 3 - 2} \qquad (答)$$
$$V = \pi \int_1^3 (\log x)^2 dx$$
$$= \pi \left\{ \Big[x \cdot (\log x)^2\Big]_1^3 - \int_1^3 x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x} dx \right\}$$
$$= \pi \left\{ 3(\log 3)^2 - 2S \right\}$$
$$= \pi \left\{ 3(\log 3)^2 - 2(3\log 3 - 2) \right\}$$
$$= \boldsymbol{\pi \left\{ 3(\log 3)^2 - 6\log 3 + 4) \right\}} \qquad (答)$$

【2】2つの楕円の交点は



$$x^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 1$$
$$\therefore \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

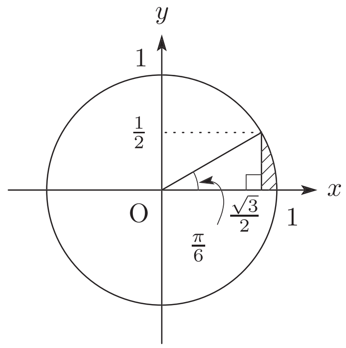
より，$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (複号任意)

である．

また

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 = 3(1-x^2)$$
$$\therefore \quad y = \pm\sqrt{3(1-x^2)}$$

より，求める面積を S とすると，図形の対称性より



$$\frac{S}{8} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{3(1-x^2)} dx$$
$$= \frac{3}{8} + \sqrt{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$
$$= \frac{3}{8} + \sqrt{3}\left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{8} + \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

したがって

$S = \boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi}$　　(答)

<別解>

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

の計算は，$x = \sin\theta$ とすると，$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

としてもよい．

【3】 (1) $\begin{cases} x = 1 - t^4 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

より

$$\frac{dx}{dt} = -4t^3, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$$

であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \boldsymbol{\frac{3t^2-1}{4t^3}} \qquad (答)$$

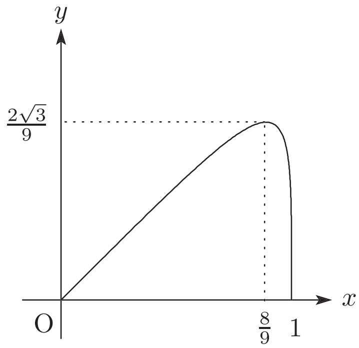
また

$$\begin{aligned}&\frac{d^2y}{dx^2} \\ =&\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ =&\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \\ =&\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{6t\cdot t^3-(3t^2-1)\cdot 3t^2}{t^6}}{-4t^3} \\ =&\frac{3}{16}\cdot\frac{t^2-1}{t^7} < 0\end{aligned}$$

より，上に凸のグラフである．

よって，増減表は次のようになる．

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	1	↘	$\frac{8}{9}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0



これを x, y についてまとめると

x	0		$\frac{8}{9}$		1
$\frac{dy}{dx}$	$+$	$+$	0	$-$	／
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	／
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

ここで

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to +0}\frac{3t^2-1}{4t^3}=-\infty$$

であるから，C の概形は右上図のようになる．　(答)

(2) 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y\,dx \\ &= \int_1^0 y\frac{dx}{dt}dt \\ &= \int_1^0 (t-t^3)\cdot(-4t^3)dt \\ &= 4\int_0^1 (t^4-t^6)dt \\ &= 4\left[\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right]_0^1 \\ &= \mathbf{\frac{8}{35}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【4】(1) $y' = 2\cos x$ より，C 上の点 $(t,\ 2\sin t)$ (ただし，$-\pi \leqq t \leqq \pi$) における接線の方程式は

$$y - 2\sin t = 2\cos t(x - t)$$
$$\iff \quad y = (2\cos t)x + 2(\sin t - t\cos t)$$

と表される.

これが $y = x + a$ と一致するので

$$\begin{cases} 2\cos t = 1 & \cdots\cdots ① \\ 2(\sin t - t\cos t) = a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ であるから，① より

$$t = \pm\frac{\pi}{3}$$

(i) $t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$a = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3} > 0$ より，条件に適する.

(ii) $t = -\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$a = 2\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

$-\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3} < 0$ より，不適.

よって

$$a = \boldsymbol{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}} \qquad (答)$$

(2) 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(a + \frac{\pi}{3}\right) - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2 dx \\ &= \pi\left(a + \frac{\pi}{3}\right) - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1 - \cos 2x)dx \\ &= \sqrt{3}\pi - 2\pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \qquad \left(\because \quad a + \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\right) \\ &= \sqrt{3}\pi - 2\pi\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi - \frac{2}{3}\pi^2} \qquad (答) \end{aligned}$$