M3MB

夏期講習

解答

Z会東大進学教室

難関大文系数学／難関大文系数学 M

問題

【1】(1) 点 B の座標を $(a,\ b)$ とおく．AB$\perp l$ より

$$\frac{b-2}{a-4}\cdot\frac{1}{2}=-1 \qquad \therefore\quad 2a+b=10 \quad\cdots①$$

AB の中点

$$\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$$

は l 上にあるから

$$\frac{a+4}{2}-2\cdot\frac{b+2}{2}+5=0$$

$$\therefore\quad a-2b=-10 \quad\cdots②$$

①，②より

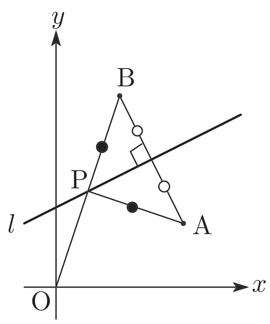
$a=2,\ b=6 \qquad \therefore$ B **(2，6)**　　(答)

(2) l 上の点 P に対して

OP + PA = OP + PB

であり，O と B は l に関して反対側にあるから，OP + PA は P を線分 OB 上にとるとき最小となる．直線 OB の方程式は $y=3x$ であるから，これと l の方程式を連立して解くと

$x=1,\ y=3 \qquad \therefore$ P **(1，3)**　　(答)



(3) 直線 OP，l が x 軸の正方向とのなす角を，それぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=3,\ \tan\beta=\frac{1}{2}$$

求める角は $\alpha-\beta$ であるから

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0^\circ<\alpha-\beta<90^\circ$ であるから

$\alpha-\beta=\mathbf{45^\circ}$　　(答)

【2】(1) P は OA 上にあるので，t を実数として $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t\right)$ とおける．ここで，点 P は 円周上の点であるから

$$(t-2)^2+\left(\frac{1}{2}t-2\right)^2=4$$

$$\therefore\quad t^2-4t+4+\frac{1}{4}t^2-2t+4=4$$

$$\therefore\quad (5t-4)(t-4)=0$$

$\mathrm{P}\fallingdotseq\mathrm{A}$ より, $t\fallingdotseq 4$ であるから

$$t=\frac{4}{5}$$

よって

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}}\right)\qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると, 重心 $(X,\ Y)$ は

$$(X,\ Y)=\left(\frac{x+4}{3},\ \frac{y+2}{3}\right)$$

とおける．

$X=\dfrac{x+4}{3},\ Y=\dfrac{y+2}{3}$ より

$$x=3X-4,\ y=3Y-2$$

点 P は円周上の点であるので

$$(3X-4-2)^2+(3Y-2-2)^2=4$$

$$\therefore\quad 3^2(X-2)^2+3^2\left(Y-\frac{4}{3}\right)^2=4$$

$$\therefore\quad (X-2)^2+\left(Y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

ただし, $\triangle$ OAP が存在しないといけないので, O，A，P が同一直線上にある

$$(x,\ y)=(4,\ 2),\ \left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$$

を除く.

ここで， $\mathrm{P}=(x,\ y)=(4,\ 2),\ \left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ のとき

$$(X,\ Y)=\left(\frac{8}{3},\ \frac{4}{3}\right),\ \left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$$

であるから, 求める軌跡は

$$\text{円 } \boldsymbol{(x-2)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{9}}$$

ただし, $\boldsymbol{(x,\ y)=\left(\frac{8}{3},\ \frac{4}{3}\right),\ \left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)}$ を除く.　　(答)

(3) B$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ とする. P から OA への垂線の長さが最大になるのは, AB の中点 M と円の中心 O$'$ を結ぶ直線が優弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と交わる点 P$'$ と点 P が一致するときである (図 1 参照).

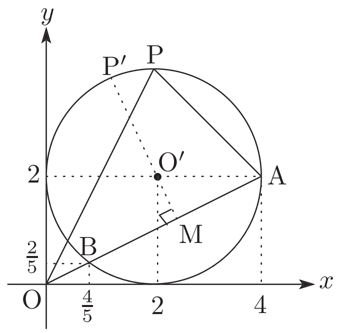


図 1

直線 OA の式は

$$y=\frac{1}{2}x \quad \therefore \quad x-2y=0$$

であるから

$$\mathrm{O'M}=\frac{|2-2\cdot 2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{P'M}=2+\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ より

$$\triangle\,\mathrm{OAP'}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}+2$$

よって, △ OAP の面積の最大値は

$\boldsymbol{2\sqrt{5}+2}$　　(答)

【3】(1) $x+2y=k$ とおく．この直線が円 $x^2+y^2=4$ の内部および周上と共有点をもつ k の値の範囲を求めればよい．

円と直線が共有点をもつとき，(円の中心と直線との距離) $\leqq$ (円の半径) であるから

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1+4}} \leqq 2 \qquad \therefore \quad |k| \leqq 2\sqrt{5}$$

よって

$$\boldsymbol{-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x^2+2y=k$ とおく．

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}k$$

この放物線が円 $x^2+y^2=4$ の内部および周上と共有点をもつ k の値の範囲を求めればよい．

$x^2+y^2=4$ と $x^2+2y=k$ が接するとき，$x^2=k-2y$ より

$$k-2y+y^2=4 \quad \therefore \quad y^2-2y+k-4=0 \ \cdots(*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると

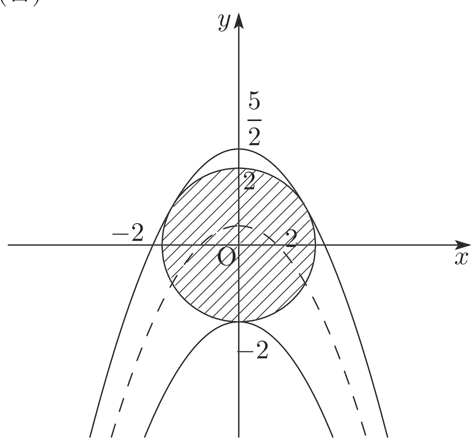
$$\frac{D}{4}=1-k+4=0 \qquad \therefore \quad k=5$$

$x^2+2y=k$ が点 $(0,\ -2)$ を通るとき

$$k=-4$$

したがって

$$\boldsymbol{-4 \leqq k \leqq 5} \qquad \text{(答)}$$



【4】求めるべき曲線を C とすると, 平面上のある点 $(x,\ y)$ が C 上にある条件は

$$\begin{cases} (x-t)^2+y^2=t^2 & \cdots ① \\ y=tx & \cdots ② \\ t>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす t が存在することである.

(i) $x=0$ のとき

②は, $0\cdot t=y$ となるので, これをみたす t が存在する条件は

$y=0$ (このとき, ②は任意の t で成立する)

そして, $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき, ①は 恒等的に成り立つので, 結局, ①, ②, ③をみたす t が無数に存在する. よって,

$(0,\ 0)\in C$

である.

(ii) $x\fallingdotseq 0$ のとき

②は

$$t=\frac{y}{x} \quad \cdots ②'$$

と解けるので, ①, ②, ③をみたす t が存在する条件は

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{y}{x}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 & \cdots ①' \\ \quad \text{かつ} & \\ \dfrac{y}{x}>0 & \cdots ③' \end{cases}$$

である.

$$\begin{aligned} ①' &\Longleftrightarrow \frac{(x^2-y)^2}{x^2}+y^2=\frac{y^2}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow (x^2-y)^2+x^2y^2=y^2 \text{ かつ } x^2\fallingdotseq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2(x^2-2y+y^2)=0 \text{ かつ } x\fallingdotseq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2-2y+y^2=0 \text{ かつ } x\fallingdotseq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2+(y-1)^2=1 \text{ かつ } x\fallingdotseq 0 \end{aligned}$$

よって,

$xy>0$ かつ $x^2+(y-1)^2=1$

(i), (ii) より, C は,

$(0,\ 0)$ または

$xy > 0$ かつ $x^2 + (y-1)^2 = 1$

である. これを図示すると, **図 1 の実線部, ただし, (0, 0) は含み (0, 2) は含まない.**

(答)

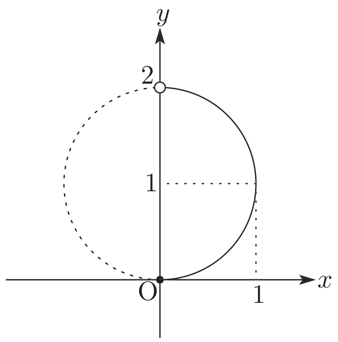


図 1

＜発展＞

① と ② の交点を求めると,

$$(0,\ 0),\quad \left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{2t^2}{1+t^2}\right)$$

である. この後

$$(x,\ y) = \left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{2t^2}{1+t^2}\right)$$

とおき, パラメーター t を消去してもよいが, 結局 ②$'$ を導くことになる.

問題

【1】$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n - \{(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 3n^2 + 3n \end{aligned}$$

また

$$a_1 = S_1 = 6$$

であり, これは上の式の $n = 1$ のときに一致するから

$\boldsymbol{a_n = 3n^2 + 3n}$　　(答)

さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \boldsymbol{\frac{n}{3(n+1)}} \end{aligned}$$　　(答)

【2】(1)　$2a_{n+1}a_n - a_{n+1} + a_n = 0 \quad \cdots ①$

任意の n に対して，$a_n \fallingdotseq 0$ であることを示す.

ある n で $a_n = 0$ であるとすると，漸化式 ① より，$a_{n-1} = 0$ となり，以下，漸化式 ① を繰り返し用い

$a_n = 0$，$a_{n-1} = 0$，$a_{n-2} = 0$，$\cdots$，$a_1 = 0$

となるが，これは $a_1 \fallingdotseq 0$ という仮定に反する.

よって，任意の n に対して，$a_n \fallingdotseq 0$

$a_n \fallingdotseq 0$ より, ① の両辺を $a_{n+1}a_n$ で割ると

$$2 - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = -2$$

よって, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は公差 -2 の等差数列である.　　(証終)

(2) (1) より, 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ の一般項は

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)(-2)$$
$$=\frac{1}{a_1}-2n+2 \quad \cdots ②$$

また, 条件式より

$$a_{n+1}a_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots ③$$

与式より

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{10}a_{11}$$
$$=\frac{1}{2}(a_2-a_1)+\frac{1}{2}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{2}(a_{11}-a_{10}) \qquad (\because ③)$$
$$=\frac{1}{2}(a_{11}-a_1)=\frac{10{a_1}^2}{1-20a_1}=-\frac{40}{39} \qquad (\because ②)$$

すなわち

$$39{a_1}^2-80a_1+4=0$$
$$\therefore \quad (a_1-2)(39a_1-2)=0$$
$$\therefore \quad a_1=2,\ \frac{2}{39}$$

②より

$$a_n=-\frac{2}{4n-5}, \qquad -\frac{2}{4n-43}$$

よって

$a_1=2,\ \boldsymbol{a_n=-\dfrac{2}{4n-5}}$ または $a_1=\dfrac{2}{39},\ \boldsymbol{a_n=-\dfrac{2}{4n-43}}$ (答)

【3】(1) $n \geqq 3$ のとき

$$\begin{array}{rrrrcl} & S_{n+1} & -7S_n & +12S_{n-1} & = & 1 \\ -\ ) & S_n & -7S_{n-1} & +12S_{n-2} & = & 1 \\ \hline & a_{n+1} & -7a_n & +12a_{n-1} & = & 0 \end{array}$$

これより

$$a_{n+1} - 3a_n = 4(a_n - 3a_{n-1})$$

$$\therefore \quad a_{n+1} - 3a_n = 4^{n-2}(a_3 - 3a_2)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_3 - 7S_2 + 12S_1 &= a_3 + a_2 + a_1 - 7(a_2 + a_1) + 12a_1 \\ &= a_3 - 6a_2 + 6a_1 \ = \ 1 \qquad \therefore \quad a_3 = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} - 3a_n = 4^{n-2}(7-3) = 4^{n-1}$$

これは, $n = 1$, 2 でも成立する．よって

$\boldsymbol{a_{n+1} - 3a_n = 4^{n-1}}$ (答)

(2) (1) より

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3^2}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ の階差数列を考えて

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1}{\frac{4}{3} - 1} \\ &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1\right\} \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ のときもみたすので

$\boldsymbol{a_n = 4^{n-1} - 3^{n-1}}$ (答)

よって

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{4^n - 1}{4-1} - \frac{3^n - 1}{3-1} = \boldsymbol{\frac{4^n}{3} - \frac{3^n}{2} + \frac{1}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【4】数学的帰納法で証明する.

(i) $n=1$ のとき

$$a_1=1\leqq\frac{4}{1}$$

であるから, 与えられた不等式は成り立つ.

また, $n=2$ のとき

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{1+1}=1\leqq\frac{4}{2}$$

だから, このときも与えられた不等式は成り立つ.

(ii) $n=k\ (\geqq 2)$ のときの不等式の成立, すなわち

$$a_k\leqq\frac{4}{k}$$

を仮定する. このとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{k+1}\ \leqq\ \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k}+\frac{1}{k+1}\\&=\frac{2(k+1)+k}{k(k+1)}\ =\ \frac{3k+2}{k(k+1)}\end{aligned}$$

ここで, $k\geqq 2$ だから

$$3k+2\leqq 4k \qquad \therefore\quad \frac{3k+2}{k}\leqq 4$$

よって

$$a_{k+1}\leqq\frac{3k+2}{k}\cdot\frac{1}{k+1}\leqq 4\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{4}{k+1}$$

となり, $n=k+1$ のときも与えられた不等式は成り立つ.

(i), (ii) より, すべての自然数 n に対して

$$a_n\leqq\frac{4}{n}$$

が成り立つ. (証終)

問題

【1】(1) $y=x^3-x+6$ より

$$y'=3x^2-1$$

なので，C 上の点 $(t,\ t^3-t+6)$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t+6$$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=(3t^2-1)x-2t^3+6}$　　(答)

(2) (1) の直線が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき

$$0=-6t^2+2-2t^3+6$$

$$2t^3+6t^2-8=0$$

$$(t+2)^2(t-1)=0$$

$\therefore\quad t=-2,\ 1$

であるから，求める直線の方程式は

$t=-2$ のとき，$y=11x+22$

$t=1$ のとき，$y=2x+4$

曲線 $C: y=x^3-x+6$ と直線 $y=11x+22$ の共有点の座標を求める．2 式より y を消去して整理すると，接点の x 座標が $x=t=-2$ であることに注意すると

$$x^3-x+6=11x+22 \iff (x+2)^2(x-4)=0$$

となるので，曲線 $C: y=x^3-x+6$ と直線 $y=11x+22$ の共有点の座標は

$(-2,\ 0)$，$(4,\ 66)$

曲線 $C: y=x^3-x+6$ と直線 $y=2x+4$ の共有点の座標を求める．2 式より y を消去して整理すると，接点の x 座標が $x=t=1$ であることに注意すると

$$x^3-x+6=2x+4 \iff (x-1)^2(x+2)=0$$

となるので，曲線 $C: y=x^3-x+6$ と直線 $y=2x+4$ の共有点の座標は

$(1,\ 6)$，$(-2,\ 0)$

以上をまとめて，求める直線の方程式と直線と曲線 C との共有点の座標は

$\boldsymbol{y=11x+22}$，共有点 $\boldsymbol{(-2,\ 0)}$，$\boldsymbol{(4,\ 66)}$

$\boldsymbol{y=2x+4}$，共有点 $\boldsymbol{(1,\ 6)}$，$\boldsymbol{(-2,\ 0)}$　　(答)

【2】(1) $2x^3+3x^2-12x-k=0$ より

$$2x^3+3x^2-12x=k$$

である. そこで, 座標平面上において

曲線 $y=2x^3+3x^2-12x$, 直線 $y=k$

が相異なる 3 つの共有点をもつような k の値の範囲を求める.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$ とおくと

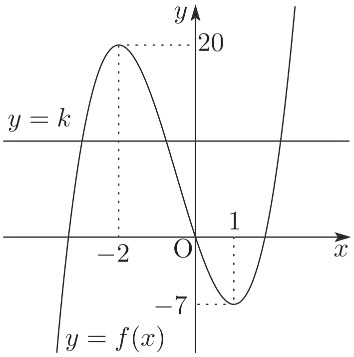
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

なので, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

したがって, $y=f(x)$ のグラフは下図のようになるので, 求める k の値の範囲は

$\boldsymbol{-7<k<20}$ (答)



(2) 2 番目に大きい解 β が $-2 < \beta < -\frac{1}{2}$ をみたすとき

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) + 3\cdot\frac{1}{4} - 12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$$

なので, k の値の範囲は

$$\frac{13}{2} < k < 20$$

である. そこで, $k = \frac{13}{2}$, $k = 20$ のときの方程式の解を求める.

まず, $k = \frac{13}{2}$ のとき

$$2x^3 + 3x^2 - 12x - \frac{13}{2} = (2x+1)\left(x^2 + x - \frac{13}{2}\right) = 0$$

なので

$$x = -\frac{1}{2}, \quad \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}}{2}$$

また, $k = 20$ のとき

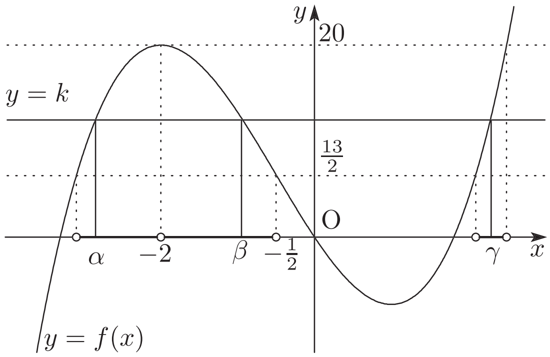
$$2x^3 + 3x^2 - 12x - 20 = (x+2)^2(2x-5) = 0$$

なので

$$x = -2\ (\text{重解}), \quad \frac{5}{2}$$

である. したがって, グラフより α, γ のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{-1-3\sqrt{3}}{2} < \alpha < -2, \quad \frac{-1+3\sqrt{3}}{2} < \gamma < \frac{5}{2}} \qquad \text{(答)}$$



【3】(1) $x^2f_{n+1}(x)-x^3+x^2=\displaystyle\int_0^x tf_n(t)dt \quad \cdots①$ において, $n=1$ とおくと

$$\begin{aligned} x^2f_2(x)-x^3+x^2 &= \int_0^x tf_1(t)dt \\ &= \int_0^x t(t^2+2t-2)dt \\ &= \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-x^2 \end{aligned}$$

よって

$$x^2f_2(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-2x^2=x^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{3}x-2\right)$$

これより

$$\boldsymbol{f_2(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{3}x-2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 数学的帰納法で示す.

〔I〕$n=1$ のとき, $f_1(x)=x^2+2x-2$ より題意をみたす.

〔II〕$n=k$ のとき, $f_k(x)=a_kx^2+b_kx+c_k$ (ただし, $a_k\fallingdotseq 0$) とすると

$$\begin{aligned} \int_0^x tf_k(t)dt &= \int_0^x (a_kt^3+b_kt^2+c_kt)dt \\ &= \frac{1}{4}a_kx^4+\frac{1}{3}b_kx^3+\frac{1}{2}c_kx^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} x^2f_{k+1}(x) &= \frac{1}{4}a_kx^4+\left(\frac{1}{3}b_k+1\right)x^3+\left(\frac{1}{2}c_k-1\right)x^2 \\ &= x^2\left\{\frac{1}{4}a_kx^2+\left(\frac{1}{3}b_k+1\right)x+\left(\frac{1}{2}c_k-1\right)\right\} \end{aligned}$$

これより

$$f_{k+1}(x)=\frac{1}{4}a_kx^2+\left(\frac{1}{3}b_k+1\right)x+\frac{1}{2}c_k-1$$

よって, $f_{k+1}(x)$ も x の 2 次式である

〔I〕,〔II〕より, $f_n(x)$ は x の 2 次式である. (証終)

(3) (2) の結果より

$$f_n(x)=a_nx^2+b_nx+c_n \quad (a_n\fallingdotseq 0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおくと, (2)〔II〕の変形を行えば, $f_{n+1}(x)$ に関して

$$f_{n+1}(x)=\frac{1}{4}a_nx^2+\left(\frac{1}{3}b_n+1\right)x+\frac{1}{2}c_n-1$$

であるから,

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n,\ b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+1,\ c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n-1 \quad \cdots②$$

よって, 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=1$, 公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$a_n=\frac{1}{4^{n-1}}$$

一方, ②の第 2 式を変形すると,

$$b_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(b_n-\frac{3}{2}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

よって, 数列 $\left\{b_n - \dfrac{3}{2}\right\}$ は,

初項 ： $b_1 - \dfrac{3}{2} = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$, 公比 ： $\dfrac{1}{3}$

の等比数列であるから,

$$b_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \qquad \therefore \quad b_n = \frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

同様にして, ②の第 3 式から,

$$c_n = -2$$

が得られる. したがって,

$$\boldsymbol{f_n(x) = \frac{1}{4^{n-1}}x^2 + \frac{3^n + 1}{2 \cdot 3^{n-1}}x - 2} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 接点の x 座標を t $(0 \leqq t \leqq 2)$ とすると

$$ax+b=(x+1)(2-x)$$

$$\therefore\quad x^2+(a-1)x+b-2=0$$

の重解が t であるから，解と係数の関係より

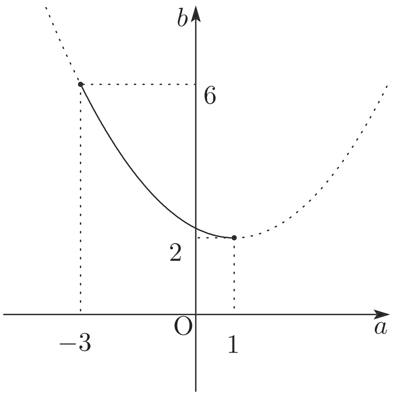
$$a-1=-2t,\ b-2=t^2$$

$$\therefore\quad a=1-2t,\ b=t^2+2$$

である．また $0 \leqq t \leqq 2$ より，$-3 \leqq a \leqq 1$ であり

$$b=\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+2=\frac{1}{4}(a-1)^2+2$$

だから，これを図示すると**下図の実線部分 (端点含む)** となる．　　(答)



(2) 面積を S とすると，右図より

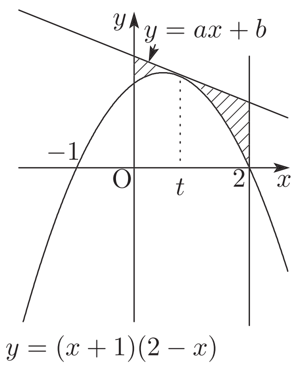
$$S=\int_0^2\{(ax+b)-(x+1)(2-x)\}\,dx$$

$$=\int_0^2(x-t)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^2$$

$$=\frac{1}{3}\{(2-t)^3-(-t)^3\}=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$$

だから，S は $t=1$ で最小となり，このとき

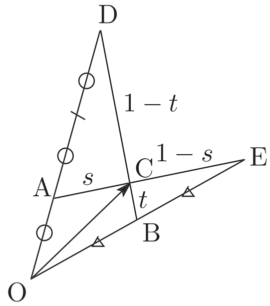
$\boldsymbol{a=-1,\ b=3}$, **面積** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$　　(答)



問題

【1】(1) 右図のように

$\mathrm{DC}:\mathrm{CB}=1-t:t,\ \mathrm{AC}:\mathrm{CE}=s:1-s$



とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=3t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，

①，② の右辺を比較して

$$\begin{cases}3t=1-s\\1-t=2s\end{cases}$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{5},\ s=\frac{2}{5}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{4}{5}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad (答)$$

(2) 題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{UT}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{\mathrm{OU}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

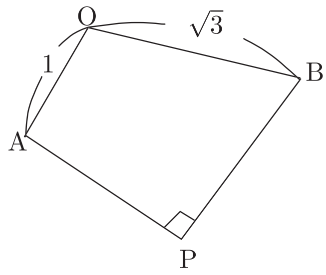
よって

$$-5\overrightarrow{\mathrm{ST}}=\overrightarrow{\mathrm{UT}}$$

となることから，S, T, U は一直線上にある．　(証終)

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ だから

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\
=&\{(s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\cdot\{s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\\
=&s(s-1)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+st\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\
&\qquad+(s-1)(t-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(t-1)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\
=&s^2-s-st-(s-1)(t-1)+3t^2-3t\\
&\qquad(\because |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1)\\
=&s^2-2st+3t^2-2t-1\ =\ 0
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad \boldsymbol{s^2-2st+3t^2-2t-1=0}$ (答)

(2) $\triangle\,\mathrm{OPA}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}})^2}$

ここで

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| & = & 1\\
|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 & = & s^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2st\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\
 & = & s^2+2st(-1)+3t^2\ =\ s^2-2st+3t^2
\end{array}
\right.
$$

であり

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s-t$

より

$\triangle\,\mathrm{OPA}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(s^2-2st+3t^2)-(s-t)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2t^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|t|$

$s^2-2st+3t^2-2t-1=0$ で s が実数なので，s の 2 次方程式が実数解をもつと考えると，$D\geqq 0$ より

$\dfrac{D}{4}=t^2-(3t^2-2t-1)=-2t^2+2t+1\geqq 0$

$\therefore\quad \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

よって，$\triangle\,\mathrm{OPA}$ の面積は $t=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき最大となるから

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$ (答)

【3】(1) $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \quad \Longrightarrow \quad 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-4\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots ①$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおく. ①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P が BC 上にあるので

$$-\frac{3}{2}k+(-2k)=1 \qquad \therefore \quad k=-\frac{2}{7}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

P は線分 BC を 4 : 3 に内分する (答)

(2) ①, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ より

$$4=|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=9+24\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+16$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{7}{8}$$

よって, △ OBC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{16}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\left|\frac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\boldsymbol{\frac{9}{7}} \qquad \text{(答)}$$

また

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+1=2+\frac{7}{4}=\frac{15}{4}$$

よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ とおく.

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0\end{cases}\iff\begin{cases}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})\cdot\vec{a}=0\\ (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\alpha|\vec{a}|^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}+\gamma\vec{c}\cdot\vec{a}=0\\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta|\vec{b}|^2+\gamma\vec{c}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\alpha+\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}+\dfrac{\gamma}{3}=0\\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}+\beta+\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}=0\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+(1+\gamma)\vec{c}$$

であり, D は OAB 平面上にあるので

$$1+\gamma=0\qquad\therefore\quad\gamma=-1$$

したがって, $(*)$ より

$$\begin{cases}\alpha+\dfrac{\beta}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3}=0\\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}+\beta-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0\end{cases}\qquad\therefore\quad\alpha=-\frac{1}{3},\ \beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}}\qquad\text{(答)}$$

(2)

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1\cdot1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(1) より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2&=\frac{1}{3^2}\left|-\vec{a}+2\sqrt{2}\vec{b}-3\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2+8\left|\vec{b}\right|^2+9\left|\vec{c}\right|^2-4\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-12\sqrt{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{9}(1+8+9-4-12+2)=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\frac{2}{3}$$

よって, 体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{18}}\qquad\text{(答)}$$

問題

【1】 $t=\cos\theta\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とおくと，与えられた直線の方程式は

$$l_t : y = tx - (2t^2 - 1)$$

と表せる．ここで，求める領域を D とし，D に含まれる点を $(X,\ Y)$ とすると

直線 l_t は点 $(X,\ Y)$ を通る

$\Longleftrightarrow Y = tX - (2t^2 - 1),\ -1 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t が存在する．

$\Longleftrightarrow$ 方程式 $2t^2 - Xt + Y - 1 = 0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に実数解をもつ $\cdots\cdots(*)$

と読み替えることができる．そこで

$$f(t) = 2t^2 - Xt + Y - 1 = 2\left(t - \frac{X}{4}\right)^2 - \frac{X^2}{8} + Y - 1$$

とおくと，$(*)$ であるためには

$$\text{(i) } f(-1)f(1) \leqq 0 \quad \text{または} \quad \text{(ii) } \begin{cases} -\dfrac{X^2}{8} + Y - 1 \leqq 0 \\ -1 \leqq \dfrac{X}{4} \leqq 1 \\ f(-1) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0 \end{cases}$$

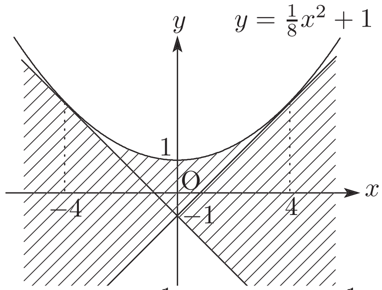
であり，$f(-1) = X + Y + 1,\ f(1) = -X + Y + 1$ より

$$\text{(i) } \begin{cases} Y \geqq -X - 1 \\ Y \leqq X - 1 \end{cases},\ \begin{cases} Y \leqq -X - 1 \\ Y \geqq X - 1 \end{cases} \qquad \text{(ii) } \begin{cases} Y \leqq \dfrac{1}{8}X^2 + 1 \\ -4 \leqq X \leqq 4 \\ Y \geqq -X - 1 \\ Y \geqq X - 1 \end{cases}$$

よって，領域 D は，不等式

$$\text{(i) } \begin{cases} y \geqq -x - 1 \\ y \leqq x - 1 \end{cases},\ \begin{cases} y \leqq -x - 1 \\ y \geqq x - 1 \end{cases} \qquad \text{(ii) } \begin{cases} y \leqq \dfrac{1}{8}x^2 + 1 \\ -4 \leqq x \leqq 4 \\ y \geqq -x - 1 \\ y \geqq x - 1 \end{cases}$$

の表す領域で，図示すると下図の斜線部分，ただし，境界線は含む．　(答)



【2】(1) 長さ n の列で末尾が a または b で終わるものの個数を p_n，c で終わるものの個数を q_n とおく．長さ n の列の末尾に a, b, c を付け加えて長さ $n+1$ の列を作るとき

末尾が a または b のものには c を付け加える．

末尾が c のものには a, b, c のいずれかを付け加える．

となるから

$q_{n+1}=p_n+q_n$，$p_{n+1}=2q_n$

ここで，$p_n+q_n=x_n$，$p_{n+1}+q_{n+1}=x_{n+1}$ より

$$\begin{aligned}x_{n+2}&=p_{n+2}+q_{n+2}=2q_{n+1}+(p_{n+1}+q_{n+1})\\&=2(p_n+q_n)+(p_{n+1}+q_{n+1})\\&=2x_n+x_{n+1}\end{aligned}$$

これより

$\boldsymbol{x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n}$　　(答)

(2) $y_n=x_{n+1}+x_n$ とおくと，(1) より

$y_{n+1}=x_{n+2}+x_{n+1}=2(x_{n+1}+x_n)=2y_n$

であるから，数列 $\{y_n\}$ は公比 2 の等比数列である．$y_1=x_1+x_2=8$ であるから

$y_n=8\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{2^{n+2}}$　　(答)

(3) (1) より

$x_{n+2}-2x_{n+1}=-(x_{n+1}-2x_n)$

であるから

$x_{n+1}-2x_n=(x_2-2x_1)(-1)^{n-1}=(-1)^n$

これと (2) の結果から

$\boldsymbol{x_n=\dfrac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^n\}}$　　(答)

【3】

$f(x)$ が, 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ 内で極大値と極小値をもつための必要十分条件は

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$$

が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において異なる 2 つの実数解をもつこと, すなわち

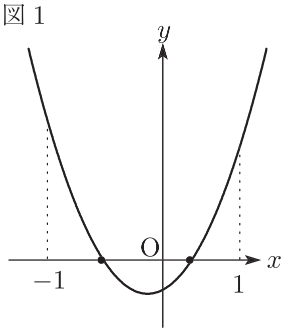
$$-1 < -\frac{a}{3} < 1 \quad \therefore \quad -3 < a < 3$$

$$\left(\frac{D}{4} =\right) a^2 - 3b > 0$$

$$f'(1) = 2a + b + 3 \geqq 0$$

$$f'(-1) = -2a + b + 3 \geqq 0$$

図 1



この 4 つの不等式を同時にみたす a, b が存在することである.

$$b = \frac{a^2}{3} \quad \cdots ①$$

$$b = 2a - 3 \quad \cdots ②$$

$$b = -2a - 3 \quad \cdots ③$$

とおく. ①, ②より,

$$\frac{a^2}{3} - 2a + 3 = 0 \quad \therefore \quad (a-3)^2 = 0$$

ゆえに, ①と②は点 (3, 3) で接することがわかる.

同様に, ①と③が点 (−3, 3) で接する.

これより, 求める $(a,\ b)$ の組が存在する領域は, **右図 2 の斜線部. 境界線は, 放物線 $b = \frac{a^2}{3}$ は含まず, 直線 $b = \pm 2a - 3$ は含む. また, $(\pm 3,\ 3)$ は含まず, $(0,\ -3)$ は含む.** (答)

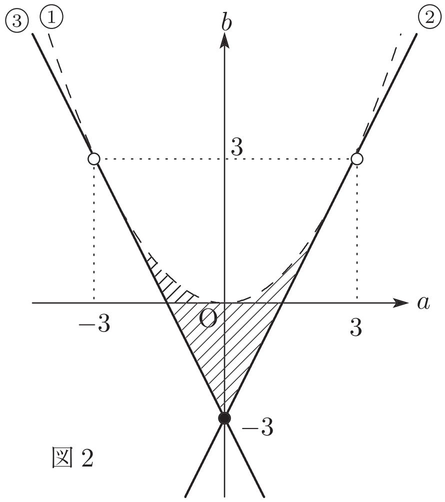


図 2

【4】(1) $s=t=0$ のとき $r=1$ πとの交点 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$r=t=0$ のとき $s=\dfrac{1}{2}$ πとの交点 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (答)

$r=s=0$ のとき $t=\dfrac{1}{3}$ πとの交点 $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(2) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}$, $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とする.

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AL}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}})^2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6\cdot 6\cdot\cos 60^\circ=18$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AL}}|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 6^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 18+6^2 \;=\; 27$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|^2=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$
$$=\frac{1}{9}\cdot 6^2-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 18+6^2 \;=\; 28$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 18-\frac{1}{3}\cdot 18-\frac{1}{2}\cdot 18+36 \;=\; 24$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{27\cdot 28-24^2} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^3\cdot 7-2^6\cdot 3^2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sqrt{21-16} \;=\; \mathbf{3\sqrt{5}} \qquad \text{(答)}$$

(3) O から平面 π に下ろした垂線が π と交わる点を H とすると,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

と表される.

ここで, H は π 上の点であるので, α, β, γ を実数として, (2) で設定した L, M を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\alpha+\beta+\gamma=1\cdots$①

と表される.

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\pi$ より

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AL}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\beta}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{\gamma}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \\ \left(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\beta}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{\gamma}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \dfrac{\beta}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + \dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ \qquad + \dfrac{\gamma}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \dfrac{\gamma}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\ -\alpha|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \dfrac{\gamma}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \dfrac{\beta}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{\beta}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \qquad + \dfrac{1}{3}(\alpha-\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -36\alpha + 9\beta + 9(\alpha-\beta) + 3\gamma - 6\gamma = 0 \\ -36\alpha + 4\gamma - 9\beta + 3\beta + 6(\alpha-\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9\alpha + \gamma = 0 \ \cdots ② \\ 15\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \ \cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③ を連立して解くと

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \left(-\frac{1}{10},\ \frac{1}{5},\ \frac{9}{10}\right)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{6}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}} + \boldsymbol{\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} + \boldsymbol{\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \qquad \text{(答)}$$

M3MB

難関大文系数学／難関大文系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	