M3JP

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

東大確率特講

１．演習問題（１）ー解答

【1-1】

(1) 0 を使わないものも含め，$0, 1, 2, 3$ の 4 つの数字を用いてできる整数は

$$3 \cdot 4^{n-1}\,(個)$$

ある．このうち，$1, 2, 3$ の 3 つの数字だけでできる整数は 3^n 個あるので，条件をみたす整数は

$$3 \cdot 4^{n-1} - 3^n = \mathbf{3(4^{n-1} - 3^{n-1})}\,(個)$$

である．　　(答)

(2) (1) より $n = 5$ のときできる整数は全部で

$$3(4^4 - 3^4) = 525\,(個)$$

あるので，真中の整数は 263 番目である．

(1) の式より，最初の数字が $1, 2, 3$ になるものがそれぞれ

$$4^4 - 3^4 = 175\,(個)$$

ずつあるので，求める整数の最初の数字は 2 である．さらに，最初の数字が 2 である整数のうち

2 番目が 0 $\cdots\cdots$ $4^3 = 64$（個）
2 番目が 1 $\cdots\cdots$ $4^3 - 3^3 = 37$（個）

なので 2 番目の数字は 1 となり，このうち

3 番目が 0 $\cdots\cdots$ $4^2 = 16$（個）
3 番目が 1 $\cdots\cdots$ $4^2 - 3^2 = 7$（個）

となり，ここまでの総数が

$$175 + 64 + 16 + 7 = 262\,(個)$$

となっているので，求める 263 番目の整数は

21200

である．　　(答)

【1-2】

1，2，$\cdots\cdots$，n のうちから重複を許して選んだ 6 個の数字のうち，異なるものを

a，b，c，$\cdots\cdots$

として，以下，タイプに分けて数えていく．

(i) 2 数ずつ等しい組があるとき，すなわち $(a,\ a)$，$(b,\ b)$，$(c,\ c)$ の組によって順列がつくられる場合，a，b，c の 3 数の選び方が ${}_n\mathrm{C}_3$ 通り，それらの並べ方が

$$\frac{6!}{2!2!2!}\ (\text{通り})$$

であるから，

$${}_n\mathrm{C}_3 \cdot \frac{6!}{2!2!2!} = 15n(n-1)(n-2)\ (\text{個})$$

(ii) 2 数が等しい組と 4 数が等しい組があるとき，すなわち $(a,\ a)$，$(b,\ b,\ b,\ b)$ の組によって順列がつくられる場合，同様に考えて，

$${}_n\mathrm{P}_2 \cdot \frac{6!}{2!4!} = 15n(n-1)\ (\text{個})$$

(iii) 3 数ずつ等しい組があるとき，すなわち $(a,\ a,\ a)$，$(b,\ b,\ b)$ の組によって順列がつくられる場合，同様に考えて，

$${}_n\mathrm{C}_2 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 10n(n-1)\ (\text{個})$$

(iv) すべて同じ数による順列の場合，

$${}_n\mathrm{C}_1 = n\ (\text{個})$$

以上 (i)〜(iv) がすべてであるから，求める個数は，

$$\begin{aligned}&15n(n-1)(n-2)+15n(n-1)+10n(n-1)+n\\ =&n\{15(n^2-3n+2)+25(n-1)+1\}\\ =&\boldsymbol{n(15n^2-20n+6)}\ (\text{個}) \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【1-3】

(1) 求める三角形の総数は，n 個の頂点 A_1，A_2，$\cdots\cdots$，A_n から，異なる 3 点を取り出す組合せの数に等しい．よって，

$$ {}_n\mathrm{C}_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1} = \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}(\text{個}) \qquad (\text{答}) $$

(2) 鋭角三角形の総数よりも，鈍角または直角三角形の総数を数える方が易しい．
まず，A_1 を 1 つの頂点とする三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k$(ただし，$1<i<k$) で，$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k$ が鈍角または直角三角形であるものを考えると，その場合の数は，

(i) $n=2m$(m は自然数) のとき，A_2〜A_{m+1} の m 個の点から，2 点を選ぶ組合せの数に等しいので，

$$ {}_m\mathrm{C}_2 = \frac{m(m-1)}{2} \quad \cdots\cdots ① $$

(ii) $n=2m+1$(m は自然数) のとき，同様に考えて，① を得る．

一般に点 $\mathrm{A}_\ell(\ell=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を 1 つの頂点とする三角形 $\mathrm{A}_\ell\mathrm{A}_i\mathrm{A}_k(\ell<i<k)$ で第 2 の頂点 A_i が鈍角または直角であるものの個数は上の A_1 の場合と同数である．さらに第 2 の頂点を鈍角または直角とするという条件から，これらは重複して数えられることはない．よって，すべての鈍角または直角三角形の個数は ① の n 倍であるから，求める鋭角三角形の個数は，

(i) $n=2m$ のとき，

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_3 - n\times{}_m\mathrm{C}_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n\times\frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n\times\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n^2(n-2)}{8} \\ &= \frac{n(n-2)(n-4)}{24} \end{aligned} $$

(ii) $n=2m+1$ のとき，

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_3 - n\times{}_m\mathrm{C}_2 &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n\times\frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n\times\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)(n-3)}{8} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{24} \end{aligned} $$

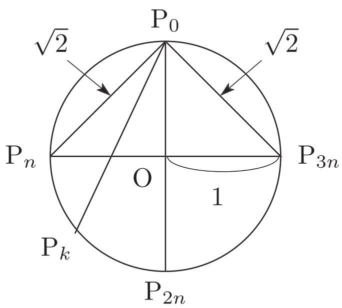
したがって

n が偶数のとき， $\boldsymbol{\dfrac{n(n-2)(n-4)}{24}}$

n が奇数のとき， $\boldsymbol{\dfrac{n(n-1)(n+1)}{24}}$

である．　　(答)

【1-4】



(1) 円の中心を O とすれば，$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{OP}_n = \angle \mathrm{P}_0\mathrm{OP}_{3n} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_{3n} = \sqrt{2}$ である．
よって，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ となる k の範囲は

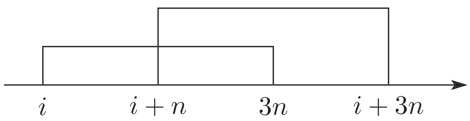
$$\boldsymbol{n \leqq k \leqq 3n}$$

である． (答)

(2) P_0 を頂点にもつ三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ について考える．
(1) より，条件を満たす場合は

$$n \leqq i < j \leqq 3n \quad \text{かつ} \quad i+n \leqq j \leqq i+3n$$

が成立する．



$$i < i+n \quad \text{かつ} \quad 3n < i+3n$$

であるから，j は

$$i+n \leqq j \leqq 3n$$

を満たす．

したがって，各 i に対して j は $3n-(i+n)+1 = 2n+1-i$ 個存在する．
このとき，$2n+1-i \geqq 1$ であるから，$n \leqq i \leqq 2n$ となる．
よって条件を満たす三角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{i=n}^{2n}(2n+1-i) &= (2n+1)(n+1) - \frac{1}{2}(n+2n)(n+1)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

となる．したがって，P_0，$\cdots$ P_{4n-1} を頂点にもつ三角形についても同様にそれぞれ $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 個の三角形が存在する．これらの総和は条件を満たす三角形を重複して 3 回ずつ数えていることになるので，求める個数 $g(n)$ は

$$\begin{aligned}g(n) &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot 4n \cdot \frac{1}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

である． (答)

【1-5】
引かれる直線の本数は，

$$ {}_n\mathrm{C}_2 = \frac{n(n-1)}{2} $$

であるから，これらの交点は重複も含めて，

$$ \begin{aligned} {}_{\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{C}_2 &= \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left\{\frac{n(n-1)}{2}-1\right\}}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8} \end{aligned} $$

このうち，円内の交点は，その点を対角線の交点とし，円に内接する四角形の 4 頂点の選び方を考えて，

$$ {}_n\mathrm{C}_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}(\text{個}) $$

また，円周上の交点は，1 点を $n-1$ 本の直線が通ることから，1 点に ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$ 個の点が集まっていると考えられるので，重複を含めて，

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times n = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}(\text{個}) $$

ある．
よって，円外の交点は，

$$ \begin{aligned} &\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \\ =&\frac{n(n-1)(n-2)\{3(n+1)-(n-3)-12\}}{24} \\ =&\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}(\text{個}) \end{aligned} $$

となるから，

(円内の交点の個数) $\times 2 =$ (円外の交点の個数)

が成り立つ．　　(証明終)

2．演習問題（2）－解答

【2-1】

(1) 異なる $n+1$ 個の数字の中の特定の 1 つ (a とする) に注目する．
このとき，${}_{n+1}S_k$ 通りの分け方は，

(i) a が 1 つだけでグループをつくっているもの

(ii) a が他の数字 1 個以上とグループをつくっているもの

の 2 つの場合があり，これらは排反である．
ここで，(i) は，a を除くと，n 個の数字が $k-1$ 個のグループに分けられているので，

$${}_nS_{k-1}\text{（通り）}$$

また，(ii) は，a を除いた n 個の数字を k 個のグループに分けておき (${}_nS_k$ 通り)，その k 個のグループのどれかに a を入れる (k 通り) と考えると，

$$k\cdot{}_nS_k\text{（通り）}$$

以上から，

$${}_{n+1}S_k={}_nS_{k-1}+k_nS_k \qquad \text{(証明終)}$$

(2) (1) より，

$$\begin{cases} {}_5S_3={}_4S_2+3\ {}_4S_3 \\ {}_4S_2={}_3S_1+2\ {}_3S_2 \\ {}_4S_3={}_3S_2+3\ {}_3S_3 \end{cases}$$

ここで，${}_3S_1={}_3S_3=1$，${}_3S_2=3$ より，

$${}_4S_2=1+2\cdot3=7,\quad {}_4S_3=3+3\cdot1=6$$
$$\therefore\quad {}_5S_3=7+3\cdot6=\mathbf{25} \qquad \text{(答)}$$

《別解》

(2) (1) を用いずに次のように求めてもよい．
異なる 5 個の数字を 3 個のグループに分ける方法は，

(i) 3 個，1 個，1 個と分けるのが，${}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_2\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{1}{2!}=10$（通り）

(ii) 2 個，2 個，1 個と分けるのが，${}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{1}{2!}=15$（通り）

あることから，

$$10+15=\mathbf{25}\text{（通り）} \qquad \text{(答)}$$

【2-2】

(1) $n+2$ 桁の自然数の最高位すなわち 10^{n+1} の位は 1 か 2 である．
最高位が 1 のとき，次の位すなわち 10^{n} の位は 1 でも 2 でもよいので残る $n+1$ 桁の自然数の部分は a_{n+1} 通りある．したがって，条件を満たす自然数の数は a_{n+1} 個である．
最高位が 2 のとき，次の位すなわち 10^{n} の位は 2 が連続して現れてはならないので 1 と定まる．このとき次の 10^{n-1} の位は 1 でも 2 でもよいので残る n 桁の自然数の部分は a_n 通りある．したがって，条件を満たす自然数の数は a_n 個である．
以上より

$$\boldsymbol{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$$

が成立する．　　(答)

(2) (1) より

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

このとき，$x^2 - x - 1 = 0$ の解を α, β とおけば，① は次のように表すことができる．

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) \\ a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) \end{cases}$$

2 式の差をとって

$$(\beta - \alpha)a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$$

ここで，$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とすれば，$a_1 = 2$, $a_2 = 3$ より

$$a_2 - \alpha a_1 = 3 - 2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5},\ a_2 - \beta a_1 = 3 - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$

であるので

$$a_n = \frac{\boldsymbol{(2+\sqrt{5})\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - (2-\sqrt{5})\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}}{\boldsymbol{\sqrt{5}}}$$

である．　　(答)

【2-3】

(1) 白球○を i グループに分けるための条件は，$i-1$ 個ある黒球●をすべて 1 個ずつのグループにし，かつ端へ配置しないことである．

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc & \cdots\cdots & \bigcirc \end{array}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

これは，上の図で，↑に黒球●を配置すればよく，↑は $n-1$ 個あるから，その中から $i-1$ 個を選べばよい．よって，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1} = \boldsymbol{\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}} \text{ (通り)} \qquad \text{(答)}$$

(2) i 個ある白球○を i グループに分けるための条件は，白球をすべて 1 個ずつのグループにすることである．

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & m \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots\cdots & \bullet \end{array}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

この図の $m+1$ 個の↑の中から，白球○を配置する i 個の選び方が求める並べ方の総数で，

$${}_{m+1}\mathrm{C}_{i} = \boldsymbol{\frac{(m+1)!}{i!(m+1-i)!}} \text{ (通り)} \qquad \text{(答)}$$

(3) まず，n 個ある白球○を i 個の「組」の列に分ける．その分け方は，(1) の結果と等しく，${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}$ 通りある．
白球○を i 個の「組」に分けたとき，さらにこれらと m 個の黒球●を並べて白球○が i グループになる並べ方は，(2) の結果と等しく，${}_{m+1}\mathrm{C}_{i}$ 通りある．
したがって，求める並べ方の総数は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1} \cdot {}_{m+1}\mathrm{C}_{i} = \boldsymbol{\frac{(n-1)!(m+1)!}{(i-1)!(n-i)!i!(m+1-i)!}} \text{ (通り)} \qquad \text{(答)}$$

(4) まず，n 個ある白球○を i 個の「組」の列に分ける．その分け方は，(1) と同じで ${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1}$ 通りある．
白球○を i 個の「組」の列に分けたとき，さらにこれらと m 個の黒球●を並べて白球○も黒球●も i グループになる並べ方は，以下の 2 つの図のいずれしかない．

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & m \\ \bigcirc & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots\cdots & \bullet \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & m & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \cdots\cdots & \bullet & \bigcirc \end{array}$$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

そこで，すでに配置されている端の白球○の「組」以外の配置の仕方を考えると，いずれも $m-1$ 個の↑の中から $i-1$ 個を選ぶ選び方で，${}_{m-1}\mathrm{C}_{i-1}$ 通りある．
したがって，求める並べ方の総数は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{i-1} \cdot (2 \cdot {}_{m-1}\mathrm{C}_{i-1}) = \boldsymbol{\frac{2 \cdot (n-1)!(m-1)!}{\{(i-1)!\}^2(n-i)!(m-i)!}} \text{ (通り)} \qquad \text{(答)}$$

【2-4】

(1) 左から小さい順に並んでいるので，k の書かれたカードより左には，k より大きい数の書かれたカードはない．よって，

$$\boldsymbol{b_k = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 左から大きい順に並んでいるので，k の書かれたカードより左にあるカードの枚数が，b_k に等しい．よって，

$$\boldsymbol{b_k = n - k \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)} \qquad \text{(答)}$$

(3) $b_1 = 3$ より，カード $\boxed{\mathbf{1}}$ は 4 枚目 $\quad\therefore\quad \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\mathbf{1}}\ \boxed{}$

$b_2 = 3$ より，カード $\boxed{\mathbf{2}}$ は 5 枚目 $\quad\therefore\quad \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\mathbf{1}}\ \boxed{\mathbf{2}}$

$b_3 = 2$ より，カード $\boxed{\mathbf{3}}$ は 3 枚目 $\quad\therefore\quad \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\mathbf{3}}\ \boxed{\mathbf{1}}\ \boxed{\mathbf{2}}$

$b_4 = 1$ より，カード $\boxed{\mathbf{4}}$ は 2 枚目 $\quad\therefore\quad \boxed{}\ \boxed{\mathbf{4}}\ \boxed{\mathbf{3}}\ \boxed{\mathbf{1}}\ \boxed{\mathbf{2}}$

また，このときのカード $\boxed{\mathbf{5}}$ は 1 枚目となり，$b_5 = 0$ である．
以上より，

$$\boldsymbol{a_1 = 5,\quad a_2 = 4,\quad a_3 = 3,\quad a_4 = 1,\quad a_5 = 2} \qquad \text{(答)}$$

(4) (3) と同様にして，$\boxed{\mathbf{1}}\ \boxed{\mathbf{2}}\ \cdots$ と順次決めていく．

$b_1 \leqq m - 1$ より，カード $\boxed{\mathbf{1}}$ は 1 枚目から m 枚目のいずれかにある (m 通り)．

このうちのどこに $\boxed{\mathbf{1}}$ があったとしても，$b_2 \leqq m - 1$ より，カード $\boxed{\mathbf{2}}$ は 1 枚目から $m + 1$ 枚目までで，空いているところに存在できる (m 通り)．

以下同様に考えて，カード $\boxed{\mathbf{3}}\ \boxed{\mathbf{4}}\ \cdots\cdots\ \boxed{n - m}$ が存在できる位置は，すべて m 通りずつある．

次に，残りの $\boxed{n - m + 1}$ から $\boxed{n}$ までは，自分より大きい数の個数が $m - 1$ 個以下なので，どこにあっても，$b_k \leqq m - 1$ $(k = n - m + 1,\ \cdots,\ n)$ を満たす．

よって，これら m 枚の並べ方は，$m!$ 通りある．

以上より，求める総数は，

$$\boldsymbol{m^{n-m} \cdot m!}\ \text{(通り)} \qquad \text{(答)}$$

【2-5】
4 色を A，B，C，D とする．

(1) 中央の正三角形の部分の塗り方は 4 通りである．
さらに，中央の正三角形の回りの部分を ①，②，③ とすると，① の塗り方は 3 通りあるので，中央 –① の塗り方は，12 通りとなる．中央に A，① に B が塗られたとして他の塗り方を調べると

$12 \times 2 = \mathbf{24}$ (通り)　　(答)

(2) 中央の正方形の回りの部分を ①，②，③，④ とする．(1) と同様に，中央の正方形に A，① に B が塗られたとして，他の塗り方を考える．
② は中央・① と異なる色を塗り，③ は中央・② と異なる色を塗り，④ は中央・③ と異なる色を塗ることにすると，② – ③ – ④ の塗り方は，

$2 \times 2 \times 2 = 8$ (通り)

ある．このうち，④ が B となる場合が 2 通りあるので，それを除いた 6 通りが ②–③–④ の塗り方となる．

$12 \times 6 = \mathbf{72}$ (通り)　　(答)

(3) 中央の正五角形の回りの部分を ①，②，③，④，⑤ とする．
中央の正五角形 –① の塗り方が A–B となるとき，② は中央・① と異なる色を塗り，③ は中央・② と異なる色を塗り，④ は中央・③ と異なる色を塗り，⑤ は中央・④ と異なる色を塗ることにすると，② – ③ – ④ – ⑤ の塗り方は，

$2^4 = 16$ (通り)

あるが，このうち，⑤ と ① が同じ色となる場合がある．それは 4 角地図の場合と同じ 6 通りであるから，適する塗り方は，10 通りである．
したがって，

$12 \times 10 = \mathbf{120}$ (通り)　　(答)

(4) n 角地図を塗るとき，中央の塗り方は 4 通り，そのそれぞれに対して，① の塗り方は 3 通りある．
(3) と同様に，ⓚ は中央・$k-1$ と異なる色を塗ることにすると ($k = 2$，3，$\cdots$，n)，2^{n-1} 通りある．
よって，

$4 \times 3 \times 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n+1}$ (通り)

となる．ここで，求める場合の数を a_n とすれば，この中には，ⓝ と ① が違う色の場合が a_n 通り，ⓝ と ① が同じ色の場合が a_{n-1} 通りあるので，

$$
\begin{aligned}
& 3 \cdot 2^{n+1} = a_n + a_{n-1} \\
\iff\quad & (2+1) \cdot 2^{n+1} = a_n + a_{n-1} \\
\iff\quad & 2^{n+2} + 2^{n+1} = a_n + a_{n-1} \\
\therefore\quad & a_n - 2^{n+2} = -(a_{n-1} - 2^{n+1})
\end{aligned}
$$

数列 $\{a_n - 2^{n+2}\}$ は，公比 -1 の等比数列であるから，

$$a_n - 2^{n+2} = (-1)^{n-3}(a_3 - 2^5)$$

(1) より，$a_3 = 24$ であるから，

$$a_n - 2^{n+2} = (-1)^{n-2} \cdot 8$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n = 2^{n+2} + (-1)^n \cdot 8} \qquad \text{(答)}$$

３．演習問題（３）ー解答

【3-1】

$k \geqq 2$ に対して，k 回目にはじめてちょうど 1 人の勝者が決まるのは，

(i) $k-1$ 回引き分けが続いて，k 回目に一気に 1 人が勝つ

(ii) $k-1$ 回目までに， 1 人が負けて，k 回目に残る 2 人のうち 1 人が勝つ

のいずれかであり，(i)，(ii) は排反である．

3 人でジャンケンをするとき，引き分ける確率は $\dfrac{1}{3}$，1 人だけが勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから (i) の起こる確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^k} \quad \cdots\cdots ①$$

次に，2 人でジャンケンをするとき，引き分ける確率 $\dfrac{1}{3}$，勝負のつく確率は $\dfrac{2}{3}$ に注意して，(ii) の確率を求めると，

$$\underline{{}_{k-1}\mathrm{C}_1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} = (k-1) \cdot \frac{2}{3^k} \quad \cdots\cdots ②$$

↑

$k-1$ 回までに 1 人が負ける場所を選ぶ場合の数

したがって，$k \geqq 2$ のとき，求める確率は ①，② から，

$$\frac{1}{3^k} + (k-1) \cdot \frac{2}{3^k} = \frac{2k-1}{3^k} \quad \cdots\cdots ③$$

一方，$k = 1$ のとき，1 回目で 1 人の勝者が決まる確率は，$\dfrac{1}{3}$ であるから，③ は $k = 1$ のときも成立する．

したがって，k 回目にはじめてちょうど 1 人の勝者が決まる確率は，

$$\boldsymbol{\frac{2k-1}{3^k} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)} \qquad \text{(答)}$$

である．

【3-2】

余事象の確率，すなわち原点に点 P が存在する確率を考えるとわかりやすい．また，ルール［A］,［B］から，表が a 回，裏が b 回出たとき，点 P の座標は $a-b$ であるから，

「点 P が原点にある $\Longleftrightarrow$ 表と裏の出る回数は等しい」 $\cdots\cdots(*)$

が成立する．

(1) 硬貨を 4 回投げて点 P が原点 O に戻るのは，$(*)$ より，表が 2 回，裏が 2 回出るときである．よって，求める確率は，

$$p_4 = 1 - {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{8} = \boldsymbol{\frac{5}{8}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 5 回のうち表が a 回出たとすると，裏は $5-a$ 回出たことになるから，$(*)$ より，

$$a = 5 - a \quad \Longleftrightarrow \quad 2a = 5$$

ところが，これを満たす整数 a は存在しない．

したがって，5 回の試行で点 P が原点 O に戻ることはないから，求める確率は，

$$p_5 = \boldsymbol{1} \qquad \text{(答)}$$

(3) n 回の試行で点 P が原点 O に戻るのは，

(i) n が偶数のとき，(1) と同様に考えて，

表が $\dfrac{n}{2}$ 回，裏が $\dfrac{n}{2}$ 回

出るときである．よって，その確率は，

$$p_n = 1 - {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii) n が奇数のとき，(2) と同様に考えて，

$$p_n = 1$$

以上 (i)(ii) より，求める確率は，

$$p_n = \begin{cases} \boldsymbol{1 - \dfrac{n!}{2^n\left\{\left(\frac{n}{2}\right)!\right\}^2}} & \boldsymbol{(n : \text{偶数})} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{(n : \text{奇数})} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3-3】

(1) 白球 5 個，赤球 n 個の計 $n+5$ 個から，2 個を取り出す方法は，

$${}_{n+5}\mathrm{C}_2 \text{ (通り)}$$

あり，これらは同様に確からしい．この中で，白球，赤球を 1 個ずつ取り出す方法は，

$${}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_1 \text{ (通り)}$$

あるから，その確率 p_n は，

$$p_n = \frac{{}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_2} = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

となる．ここで，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = \frac{10(n+1)}{(n+6)(n+5)} \cdot \frac{(n+5)(n+4)}{10n} - 1 = \frac{4-n}{n(n+6)}$$

であるから，

$$\begin{cases} n \leqq 3 \text{ ならば，} & \dfrac{p_{n+1}}{p_n} - 1 > 0 \iff p_n < p_{n+1} \\ n = 4 \text{ ならば，} & \dfrac{p_{n+1}}{p_n} - 1 = 0 \iff p_n = p_{n+1} \\ n \geqq 5 \text{ ならば，} & \dfrac{p_{n+1}}{p_n} - 1 < 0 \iff p_n > p_{n+1} \end{cases}$$

したがって，

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 = p_5 > p_6 > p_7 > \cdots\cdots$$

となるから，p_n を最大にする n は，

$n = \mathbf{4,\ 5}$　　**(答)**

(2) (1) と同様にして，

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{{}_5\mathrm{C}_1 \cdot {}_n\mathrm{C}_{r-1}}{{}_{n+5}\mathrm{C}_r} \\ &= \frac{5r(n-r+5)(n-r+4)(n-r+3)(n-r+2)}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

となり，

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} - 1 = \frac{(n+1)(n-r+6)}{(n+6)(n-r+2)} - 1 = \frac{(5r-6)-n}{(n+6)(n-r+2)} \quad \cdots\cdots ②$$

(i) $r \geqq 2$ のとき，② より，

$$\begin{cases} n \leqq 5r-7 \text{ ならば，} & q_n < q_{n+1} \\ n = 5r-6 \text{ ならば，} & q_n = q_{n+1} \\ n \geqq 5r-5 \text{ ならば，} & q_n > q_{n+1} \end{cases}$$

であるから，

$$q_1 < q_2 < \cdots\cdots < q_{5r-6} = q_{5r-5} > q_{5r-4} > \cdots\cdots$$

(ii) $r=1$ のとき，① より，

$$q_n = \frac{5}{n+5}$$

であり，これは $n(\geqq 1)$ の減少関数であるから，

$$q_1 > q_2 > q_3 > \cdots\cdots$$

以上 (i)(ii) より，q_n を最大にする n は，

$$\begin{cases} r \geqq 2 \quad \Longrightarrow \quad n = \boldsymbol{5r-6,\ 5r-5} \\ r = 1 \quad \Longrightarrow \quad n = \boldsymbol{1} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3-4】

(1) X_n が 5 で割り切れるときは，n 回中少なくとも 1 回 5 の目が出るときであるから，その余事象は毎回 5 以外の目が出るときである．よって，求める確率は

$$\boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$$

である．　　(答)

(2) X_n が 4 で割り切れないときは，毎回奇数の目のみが出る場合か，1 回だけ 2 または 6 の目が出て，残り $n-1$ 回は全て奇数の目が出るときである．その確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^{n}+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この余事象の確率を求めるのであるから，求める確率は

$$\boldsymbol{1-\frac{2n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

である．　　(答)

(3) X_n が 5 で割り切れる事象を A，X_n が 4 で割り切れる事象を B とすれば，X_n が 20 で割り切れる事象は $A\cap B$ で表される．この余事象である $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ の確率を考える．

(1)，(2) より

$$P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^{n},\quad P(\overline{B})=\frac{2n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

である．一方 X_n が 5 でも 4 でも割り切れない事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，

(i) 毎回 1 または 3 の目が出る

(ii) 1 回だけ 2 または 6 の目が出で，残り $n-1$ 回は全て 1 または 3 の目が出る

のいずれかであるから，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{6}\right)^{n}+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}=(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\cup\overline{B})&=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+\frac{2n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\end{aligned}$$

以上より求める確率は

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=\boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}-\frac{2n+3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}\end{aligned}$$

である．　　(答)

【3-5】

仮定より,

$$\begin{cases} A \quad :「X \text{ と } Y \text{ の積 } XY \text{ は,} \quad 3^n \text{で割り切れる}」 \\ B_j \quad :「Y \text{ は } 3^j \text{で割り切れるが,} \quad 3^{j+1} \text{では割り切れない}」(0 \leqq j \leqq n) \end{cases}$$

(1) 3^j で割り切れる正の整数は $m \cdot 3^j$ (m は整数) とかける.

1 から 3^n までの整数の中で, このような形をしている数は,

$$3^j \leqq m \cdot 3^j \leqq 3^n \qquad \therefore \quad 1 \leqq m \leqq 3^{n-j} \qquad \therefore \quad 3^{n-j} \text{ (個)}$$

同様に, 3^{j+1} で割り切れる正の整数は, $j \fallingdotseq n$ のとき,

$$3^{n-j-1} \text{ (個)}$$

したがって, 事象 B_j が起こるような Y の値は,

$$\begin{cases} j \fallingdotseq n \text{ ならば,} \quad 3^{n-j} - 3^{n-j-1} = 2 \cdot 3^{n-j-1} \text{ (通り)} \\ j = n \text{ ならば,} \quad 3^n \text{の } 1 \text{ (通り)} \end{cases}$$

ある. このような Y の各々の値に対して, 事象 A が起こるような X は,

$$k \cdot 3^{n-j} \text{ (} k \text{ は整数)}$$

という形をしている数であるから,

$$3^{n-j} \leqq k \cdot 3^{n-j} \leqq 3^n \qquad \therefore \quad 1 \leqq k \leqq 3^j \qquad \therefore \quad 3^j \text{ (個)}$$

よって, 事象 $A \cap B_j$ が起こるような (X, Y) の組は,

$$\begin{cases} j \fallingdotseq n \text{ ならば,} \quad (2 \cdot 3^{n-j-1}) \cdot 3^j = 2 \cdot 3^{n-1} \text{ (通り)} \\ j = n \text{ ならば,} \quad 1 \cdot 3^n = 3^n \text{ (通り)} \end{cases}$$

ある. また, 箱の中から 2 枚を取り出す方法は,

$$(3^n)^2 = 3^{2n} \text{ (通り)}$$

あるから, 求める確率は,

$$\begin{cases} \boldsymbol{j \fallingdotseq n} \text{ ならば,} \quad P(A \cap B_j) = \dfrac{2 \cdot 3^{n-1}}{3^{2n}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3^{n+1}}} \\ \boldsymbol{j = n} \text{ ならば,} \quad P(A \cap B_j) = \dfrac{3^n}{3^{2n}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3^n}} \end{cases}$$

(2) 標本空間 U は, 互いに排反な事象

$$B_0, \quad B_1, \quad \cdots\cdots, \quad B_n$$

の和事象となるから,

$$A \cap B_0, \quad A \cap B_1, \quad \cdots\cdots, \quad A \cap B_n$$

も互いに排反な事象である. したがって,

$$\begin{aligned} &P(A) \\ =&P(A \cap B_0) + P(A \cap B_1) \\ &\qquad + \cdots\cdots \\ &\qquad + P(A \cap B_{n-1}) \\ &\qquad + P(A \cap B_n) \\ =&\frac{2}{3^{n+1}} \cdot n + \frac{1}{3^n} \quad (\because \quad (1) \text{ より}) \\ =&\boldsymbol{\frac{2n+3}{3^{n+1}}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) (1) と (2) より，

$$P_A(B_n) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{2n+3} = \frac{3}{2n+3}$$

よって，条件より，

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \leqq P_A(B_n) < \frac{1}{2} \quad &\iff \quad \frac{1}{3} \leqq \frac{3}{2n+3} < \frac{1}{2} \\ &\iff \quad 9 \geqq 2n+3 > 6 \\ &\iff \quad 3 \geqq n > \frac{3}{2} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{n = 2,\ \ 3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

４．演習問題（４）－解答

【4-1】

〔I〕n 回目 $(n \geqq 2)$ に 1 か 6 の目が出るのは，

「$n-1$ 回目に 1 と 6 以外の目が出ていて，
n 回目の操作で 1 か 6 の目が出る」

場合に限られる．これより，

$$P_n = (1 - P_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad P_n = -\frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}$$

を得るから，この漸化式を変形して，

$$P_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_{n-1} - \frac{1}{3}\right) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

したがって，

$$P_n - \frac{1}{3} = \left(P_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (\because \quad P_1 = 0)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{P_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)} \qquad (答)$$

《注意》

$n = 0$ とすると $P_0 = 1$ となり,「最初の 1 の目が出ている」ことと一致する．

〔II〕(1) $k = 2$ より，n 回続けて表・裏が交互に出ればよい．最初に表か裏かで 2 通りあるので，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{2^{n-1}}} \qquad (答)$$

(2) 同じ面が 3 回続かないような 6 個の並べ方を考えると，

(i) 表・裏が 2 回と 4 回のとき：
同じ面が 4 回続く並べ方は，4 回をひとかたまりと考えれば，

$$\frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ (通り)}$$

同じ面が 3 回だけ続く並べ方は

$${}_3\mathrm{C}_2 \times 2 = 6 \text{ (通り)}$$

したがって，求める並べ方は，表・裏のどちらかが 2 回かで 2 通りあるので，

$$2 \times \left(\frac{6!}{4!2!} - 3 - 6\right) = 12 \text{ (通り)}$$

(ii) 表・裏が 3 回ずつのとき：
1 つの面だけが 3 回続く並べ方は，

$$2 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

表も裏も 3 回続く並べ方は，2 通りである．
よって，求める並べ方は，

$$\frac{6!}{3!3!} - 4 - 2 = 14 \text{ (通り)}$$

以上により，6 回投げても終了しない確率は，

$$\frac{12+14}{2^6} = \frac{26}{2^6} = \mathbf{\frac{13}{32}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 1 回目が表で n 回投げても終了しない確率を q_n，1 回目が裏で n 回投げても終了しない確率を r_n とすると，

$$q_n + r_n = p_n \quad \cdots\cdots ①$$

である．

まず，1 回目が表であるとき $\left(\text{確率}\ :\ \dfrac{1}{2}\right)$ を考えると，

(i) 2 回目が裏で 2 回目〜$n+2$ 回目の $n+1$ 回について終了しない (確率：r_{n+1}) の場合

(ii) 2 回目が表で $\left(\text{確率}\ :\ \dfrac{1}{2}\right)$，3 回目が裏で 3 回目〜$n+2$ 回目の n 回について終了しない (確率：r_n) の場合

がある．よって，このとき，

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}r_{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r_n$$

となる．

1 回目が裏のときも同様に考えると，

$$r_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}q_n$$

が得られるので，これらの辺々を足して，① を用いれば，

$$\boldsymbol{p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n} \qquad \text{(答)}$$

【4-2】

$n+1$ 秒後に頂点 A_1 にいるには，n 秒後に頂点 A_2，A_3，A_4 のどれかにいて，次の移動で頂点 A_1 に来るしかないので，

$$\begin{aligned}&P_1(n+1)\\=&\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_3(n)+\frac{1}{3}P_4(n)\ \cdots\cdots①\end{aligned}$$

が成り立つ．

同様にして，

$$P_2(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_3(n)+\frac{1}{3}P_4(n)\ \cdots\cdots②$$

$$P_3(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_4(n)$$

$$P_4(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_3(n)$$

が成立する．これらの漸化式を，

$$\begin{cases}P_1(0)=0\ \cdots\cdots③\\ P_2(0)=P_3(0)=P_4(0)=\dfrac{1}{3}\ \cdots\cdots④\end{cases}$$

のもとで解く．

全確率が 1 であること，すなわち

$$P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)=1\ \cdots\cdots⑤$$

を用いると，① は

$$P_1(n+1)=\frac{1}{3}(1-P_1(n))$$

$$\therefore\quad P_1(n+1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_1(n)-\frac{1}{4}\right)$$

となり，③ より，

$$\begin{aligned}P_1(n)&=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(P_1(0)-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\\&=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

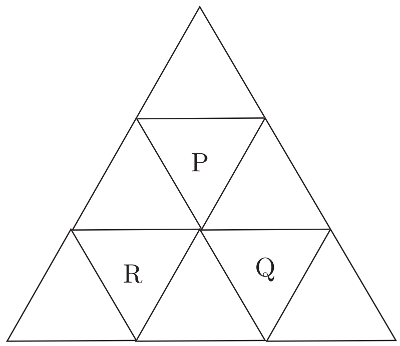
同様にして，②，⑤ より，

$$P_2(n+1)=\frac{1}{3}(1-P_2(n))\quad\therefore\quad P_2(n+1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_2(n)-\frac{1}{4}\right)$$

となり，④ より，

$$\begin{aligned}&P_2(n)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(P_2(0)-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\\=&\boldsymbol{\frac{1}{12}\left\{3+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【4-3】



図のように部屋 R を定め，n 秒後に球が部屋 P，Q，R にある確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおく．

条件より，n が奇数のときは球は必ず P，Q，R 以外の部屋にあり，n が偶数のときは球は必ずP，Q，R のいずれかの部屋にある．つまり，k を非負整数として

$$p_{2k+1} = q_{2k+1} = r_{2k+1} = 0, p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1$$

が成り立つ．ここで，$2k$ 秒後の段階で球が部屋 P，Q，R にあり，$2k+2$ 秒後に球が部屋 Q に移動する確率はそれぞれ

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}\ ,\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

なので

$$q_{2k+2} = \frac{1}{6}p_{2k} + \frac{2}{3}q_{2k} + \frac{1}{6}r_{2k}$$

さらに，出発する部屋 P から見た対称性から $q_n = r_n$ が成り立つ．以上より結局

$$p_{2k} + 2q_{2k} = 1, q_{2k+2} = \frac{1}{6}p_{2k} + \frac{5}{6}q_{2k}$$

なので，

$$q_{2k+2} = \frac{1}{6}(1 - 2q_{2k}) + \frac{5}{6}q_{2k}$$

$$q_{2k+2} = \frac{1}{2}q_{2k} + \frac{1}{6}$$

これを解いて

$$q_{2k+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(q_{2k} - \frac{1}{3}\right)$$

$q_0 = 0$ なので

$$q_{2k} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{3}$$

よって，求める確率は

$\boldsymbol{n}$ が奇数のとき, $\boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{n}$ が偶数のとき, $\boldsymbol{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{3}}$

となる．　　(答)

【4-4】

(1) n 回さいころを投げたとき，左から n 番目の文字が A である確率を p_n とおく．
1 回目に文字列 AA を書く確率は $\dfrac{1}{2}$，文字列 AA 以外の文字を書く確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

また，2 番目の文字が A となるのは 1 回目に AA を書くか，1 回目に AA を書かず 2 回目に AA を書く場合なので

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

1 回目に文字列 AA を書いた条件のもとで，左から $n+2$ 番目に A を書く確率は p_n である．また，1 回目に文字列 AA 以外を書いた条件のもとで，左から $n+2$ 番目に A を書く確率は p_{n+1} である．したがって，次の漸化式が成り立つ．

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}p_{n+1}$$

$$\therefore \quad p_{n+2} + \frac{1}{2}p_{n+1} = p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n$$

よって

$$\begin{aligned} p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n &= p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} = \cdots\cdots \\ &= p_2 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad p_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{2}{3}\right)$$

したがって

$$p_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

である．　　(答)

(2) $n \geqq 2$ として，n 回さいころを投げたとき左から $n-1$ 番目の文字が A で n 番目の文字が B である確率を q_n とおくと

$$q_2 = 0, \quad q_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

である．このとき，(1) の考察と同様にして

$$q_{n+2} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}q_{n+1}$$

が成立する．(1) と同様にして

$$q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n = q_n + \frac{1}{2}q_{n-1} = \cdots\cdots = q_3 + \frac{1}{2}q_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{12}$$

$$\therefore \quad q_{n+1} - \frac{1}{18} = -\frac{1}{2}\left(q_n - \frac{1}{18}\right)$$

より

$$q_n - \frac{1}{18} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(q_2 - \frac{1}{18}\right) = -\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

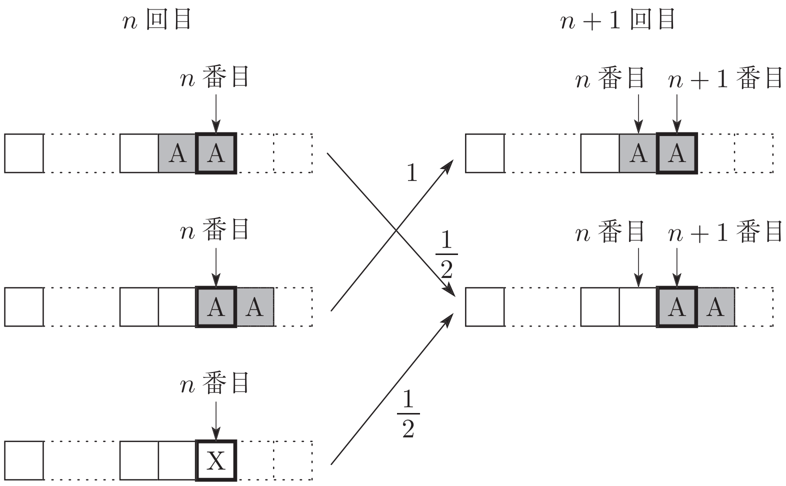
したがって

$$q_n = \boldsymbol{\frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} \quad (n \geqq 2)$$

である.　　　(答)

＜別解＞

(1) n 回さいころを投げたとき，左から n 番目の文字が AA のうち右側の A である確率を r_n，n 回さいころを投げたとき，左から n 番目の文字が AA のうち左側の A である確率を s_n とおくと，求める確率を p_n とすれば $p_n = r_n + s_n$ と表される.



X は A 以外の文字

$n+1$ 回目で $n+1$ 番目の文字が右側の A である場合は，n 回目で n 番目が左側の A のときである.

また，$n+1$ 回目で $n+1$ 番目の文字が左側の A である場合は，n 回目で n 番目が左側の A でないときで $n+1$ 回目に AA が書かれたときである.

よって，次の漸化式が成立する.

$$\begin{cases} r_{n+1} = s_n \\ s_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - s_n) \end{cases}$$

2 番目の式より

$$s_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(s_n - \frac{1}{3}\right)$$

$n = 1$ のとき，1 番目の文字が左側の A であるのは 1 回目に AA を書くときであるから，$s_1 = \dfrac{1}{2}$ である．よって

$$s_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(s_1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$n \geqq 2$ のとき

$$r_n = s_{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n=1$ のとき，1 番目の文字が右側の A であることはないので，$r_1 = 0$ である．よって $n=1$ のときも，$r_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ は成立.

以上より

$$\begin{aligned} p_n &= r_n + s_n \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{3}\left\{2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}} \end{aligned}$$

である.　　(答)

(2) 左から $n-1$ 番目が A で n 番目が B のときは，$n-1$ 番目の A は AA の右側の A である．よって求める確率は $r_{n-1} \cdot \dfrac{1}{6}$ と表せるので

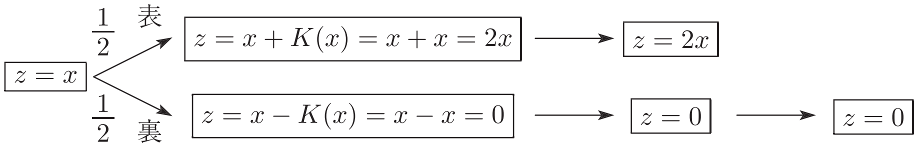
$$\begin{aligned} r_{n-1} \cdot \frac{1}{6} &= \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}} \end{aligned}$$

である.　　(答)

【4-5】

(1) (i) $0 \leqq x \leqq 15$ のとき

(#) より $z=0$ となると表が出ても裏が出てもボールの移動はないので以降 $z=0$ であり続ける.

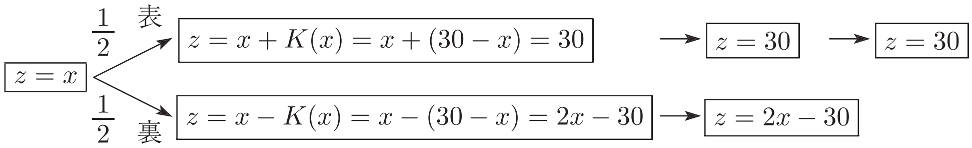


初めから数えて m 回目に $z=30$ となるときには, 2 回目から残り $m-1$ 回で $z=30$ となるときである. 初回に裏が出てしまうと以降は $z=0$ となるので, m 回目に $z=30$ となることはない. 初回に確率 $\frac{1}{2}$ で表が出た場合は残り $m-1$ 回で $z=30$ となる可能性があり, その条件付き確率は $P_{m-1}(2x)$ で表せる. よって, 次の関係式が成り立つ（この式は $x=0$ のときも成立している）.

$$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$$

(ii) $16 \leqq x \leqq 30$ のとき

(#) より $z=30$ となると表が出ても裏が出てもボールの移動はないので以降 $z=30$ であり続ける.



(i) と同様に考えると, 初めから数えて m 回目に $z=30$ となるときには, 初回に表が出た場合および初回で裏が出て 2 回目から残り $m-1$ 回で $z=30$ となるときである. よって, 次の関係式が成り立つ.

$$P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$$

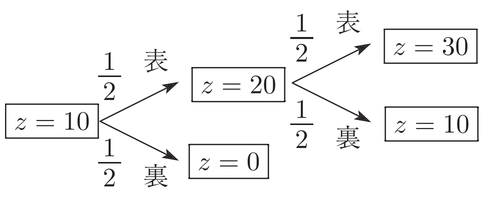
(i), (ii) より

$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 15}$ **のとき,** $\boldsymbol{P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)}$

$\boldsymbol{16 \leqq x \leqq 30}$ **のとき,** $\boldsymbol{P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)}$

である. (答)

(2) $x=10$ のときは, 次のような状況となる.



よって，(1) より次の式が成り立つ．

$$P_{2n+2}(10) = \frac{1}{2}P_{2n+1}(20) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{2n}(10)\right\}$$

$$\therefore \quad P_{2n+2}(10) = \frac{1}{4}P_{2n}(10) + \frac{1}{4}$$

よって

$$P_{2n+2}(10) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left\{P_{2n}(10) - \frac{1}{3}\right\}$$

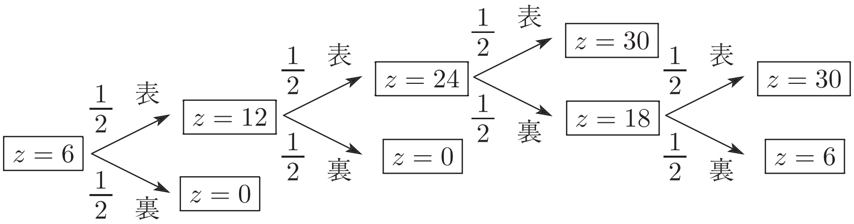
したがって，図より $P_2(10) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ であるから

$$P_{2n}(10) - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left\{P_2(10) - \frac{1}{3}\right\} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad P_{2n}(10) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}}$$

である．　　(答)

(3) $x = 6$ のときは，次のような状況となる．



よって，(1) より次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
P_{4n+4}(6) &= \frac{1}{2}P_{4n+3}(12) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n+2}(24) \\
&= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{4n+1}(18)\right\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}P_{4n+1}(18) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{4n}(6)\right\} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16}P_{4n}(6)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad P_{4n+4}(6) - \frac{1}{5} = \frac{1}{16}\left\{P_{4n}(6) - \frac{1}{5}\right\}$$

したがって，図より $P_4(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$ であるから

$$P_{4n}(6) - \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\left\{P_4(6) - \frac{1}{5}\right\} = \left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{80}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \quad P_{4n}(6) = \boldsymbol{\frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{n}\right\}}$$

である．　　(答)

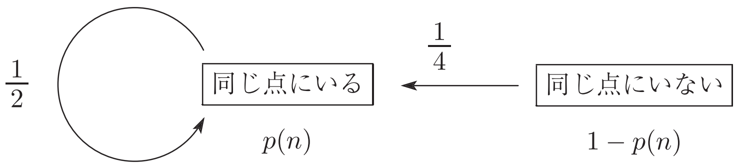
5．演習問題（5）－解答

【5-1】

2 つの粒子をそれぞれ X，Y とする．

(i) X，Y が同じ点にいるときその 1 秒後にも同じ点にいる場合を考える．たとえば A にいた場合，X，Y とも B に移動する確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ であり，X，Y とも C に移動する確率も $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ であるから，1 秒後にも同じ点にいる確率は $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である．

(ii) X，Y が違う点にいるときその 1 秒後に同じ点にいる場合を考える．たとえば A に X，B に Y がいた場合，X，Y ともに同じ点に移動する場合はともに C に移動する場合だけである．したがって，その確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である．



(i), (ii) より次の式が成り立つ．

$$p(n+1) = \frac{1}{2}p(n) + \frac{1}{4}\{1 - p(n)\}$$
$$\therefore \quad p(n+1) = \frac{1}{4}p(n) + \frac{1}{4}$$

したがって

$$p(n+1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left\{p(n) - \frac{1}{3}\right\}$$

よって，$p(0) = 1$ より

$$p(n) - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left\{p(0) - \frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$
$$\therefore \quad p(n) = \boldsymbol{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

である．　　(答)

【5-2】

1 個の赤玉の位置を固定し，反時計回りに残り $n+2$ 個の玉を並べる．このとき残る 2 個の赤玉の位置の選び方は

$$ {}_{n+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ (通り)} $$

あり，これらは同様に確からしい．

残り 2 つの赤玉をそれぞれ i 番目，j 番目に置くとする $(1 \leqq i < j \leqq n+2)$．白玉が $k+1$ 個以上並ばないためには，まず 1 つ目の赤玉が固定した赤玉から $k+1$ 番目以内になければいけないので

$$ 1 \leqq i \leqq k+1 \quad \cdots\cdots ① $$

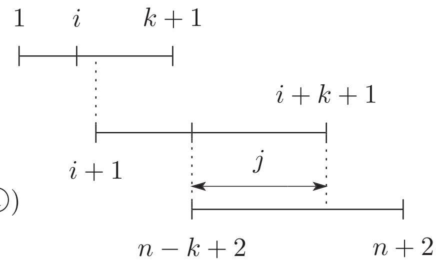
であることが必要．

次に 2 つ目の赤玉は 1 つめの赤玉から $k+1$ 番目以内になければいけないことより

$$ i+1 \leqq j \leqq i+k+1 \quad \cdots\cdots ② $$

また，はじめに固定した赤玉からも $k+1$ 番目以内になければいけないので

$$ n+2-(k+1)+1 \leqq j \leqq n+2 $$
$$ \therefore \quad n-k+2 \leqq j \leqq n+2 \quad \cdots\cdots ③ $$



ここで

$$ \begin{aligned} (n-k+2)-(i+1) &= n-k-i+1 \\ &\geqq n-k-(k+1)+1 \quad (\because \ ①) \\ &= n-2k > 0 \quad \left(\because \ k < \frac{n}{2}\right) \end{aligned} $$

より，$i+1 < n-k+2$ および $i+k+1 < n+2$ が成り立つ．

したがって，条件を満たすには

$$ n-k+2 \leqq j \leqq i+k+1 $$

が成り立てばよい．そのような j は各 i に対して

$$ (i+k+1)-(n-k+2)+1 = i+2k-n \text{ (個)} $$

存在する．

一方，$i+2k-n \geqq 1$ より，$i \geqq n-2k+1$ であり，また

$$ (k+1)-(n-2k+1) = 3k-n \geqq 0 \quad \left(\because \ \frac{n}{3} \leqq k\right) $$

より，$n-2k+1 \leqq k+1$ である．以上と ① から

$$ n-2k+1 \leqq i \leqq k+1 $$

したがって，条件を満たす場合の数は

$$ \begin{aligned} \sum_{i=n-2k+1}^{k+1}(i+2k-n) &= \frac{(n-2k+1)+(k+1)}{2}(3k-n+1)+(2k-n)(3k-n+1) \\ &= \frac{(3k-n+2)(3k-n+1)}{2} \end{aligned} $$

よって求める確率は

$$\frac{\dfrac{(3k-n+2)(3k-n+1)}{2}}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}} = \boldsymbol{\frac{(3k-n+2)(3k-n+1)}{(n+2)(n+1)}}$$

である.　　　(答)

【5-3】

(1) $n \geqq 2$ のときは，s_n が 4 で割り切れるのは，s_n の下 2 桁が 4 の倍数のときである．それは

$$(a_{n-1}, a_n) = (1,2), (1,6), (2,4), (3,2), (3,6), (4,4), (5,2), (5,6), (6,4)$$

の 9 通りなので，求める確率は

$$\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$$

また，$n = 1$ のときは，$a_1 = 4$ のときのみ題意を満たすので，求める確率は $\dfrac{1}{6}$ である．まとめると

$$\boldsymbol{n = 1 \text{のとき} \frac{1}{6} \text{，} n \geqq 2 \text{のとき} \frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，$s_n = 10s_{n-1} + a_n$ であることに注意すると，s_{n-1} を 6 で割った余りを r_{n-1} とするとき，s_n が 6 で割り切れるのは $10r_{n-1} + a_n$ が 6 で割り切れるときである．これは

$$(r_{n-1}, a_n) = (0,6), (1,2), (2,4), (3,6), (4,2), (5,4)$$

のときに限られ，結局 r_{n-1} によらず（すなわち s_{n-1} の状況によらず）題意を満たす a_n は 1 つしか存在しないので，このとき求める確率は

$$\frac{1}{6}$$

また，$n = 1$ のときは $a_1 = 6$ のときのみ条件を満たすので，このときも求める確率は $\dfrac{1}{6}$ である．結局，n によらず求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ となる．　　(答)

(3) s_{n-1} を 7 で割った余りが r_{n-1} のときに，s_n が 7 で割り切れるのは $10r_{n-1} + a_n$ が 7 で割り切れるときである．これは

$$(r_{n-1}, a_n) = (1,4), (2,1), (3,5), (4,2), (5,6), (6,3)$$

のときに限られる．つまり，$r_{n-1} = 0$ のとき s_n が 7 で割り切れることはなく，$r_{n-1} \fallingdotseq 0$ のとき s_n が 7 で割り切れるような a_n はただひとつ定まる．s_n が 7 で割り切れる確率を p_n とおくと，$p_1 = 0$ であり，$n \geqq 2$ のときは

$$p_n = \frac{1}{6}(1 - p_{n-1})$$

と表せるので，これを解いて

$$p_n - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_{n-1} - \frac{1}{7}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{7} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\boldsymbol{p_n = -\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{1}{7}} \qquad \text{(答)}$$

これは $n = 1$ のときも満たしている．

【5-4】

(1) (i) $m=n$ のとき，n 回目にブロックの高さが m となるためには $m=n$ 回連続して表が出なければならない.
よって

$$p_m = p^m = p^n$$

(ii) $0 \leqq m < n$ のとき，条件を満たすには $n-m$ 回目に裏が出て，$n-m+1$ 回目から n 回目まで表が出ればよい（1 回目から $n-m\ (>0)$ 回目までは表裏のいずれが出てもよい）.
よって

$$p_m = (1-p)p^m$$

以上より

$\boldsymbol{m=n}$ **のとき,** $\boldsymbol{p_m = p^m}$
$\boldsymbol{0 \leqq m < n}$ **のとき,** $\boldsymbol{p_m = (1-p)p^m}$

である. (答)

(2) (i) $m=n$ のとき，n 回目にブロックの高さが m となるときが一番高いときなので，$m=n$ 回目のブロックの高さは必ず m 以下である.
よって

$$q_m = 1$$

(ii) $0 \leqq m < n$ のとき，n 回目にブロックの高さが $0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ であればよい.
それぞれの確率は (1) より，$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_m$ なので

$$\begin{aligned} q_m &= p_0 + p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_m = (1-p)(1+p+p^2+\cdots\cdots+p^m) \\ &= (1-p)\frac{1-p^{m+1}}{1-p} = 1-p^{m+1} \end{aligned}$$

以上より

$\boldsymbol{m=n}$ **のとき,** $\boldsymbol{q_m = 1}$
$\boldsymbol{0 \leqq m < n}$ **のとき,** $\boldsymbol{q_m = 1-p^{m+1}}$

である. (答)

(3) (1 回目のブロックの高さ) $\leqq m$ または (2 回目のブロックの高さ) $\leqq m$ となる確率を求めればよい.

事象 A；(1 回目のブロックの高さ) $= m$ かつ (2 回目のブロックの高さ) $\leqq m$
事象 B；(1 回目のブロックの高さ) $\leqq m$ かつ (2 回目のブロックの高さ) $= m$

とすれば，求める確率は

$$r_m = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

である．

事象 $A \cap B$；(1 回目のブロックの高さ) $= m$ かつ (2 回目のブロックの高さ) $= m$ であり

$$P(A) = p_m q_m, \quad P(B) = q_m p_m, \quad P(A \cap B) = p_m p_m$$

であるから

$$\begin{aligned} r_m &= P(A \cup B) = p_m q_m + q_m p_m - p_m p_m \\ &= p_m(2q_m - p_m) \end{aligned}$$

よって，(1), (2) より

(i) $m = n$ のとき

$$r_m = p^m(2 - p^m)$$

(ii) $0 \leqq m < n$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= (1-p)p^m\{2(1-p^{m+1}) - (1-p)p^m\} \\ &= (1-p)p^m\{2 - (1+p)p^m\} \end{aligned}$$

以上より，

$\boldsymbol{m = n}$ **のとき,** $\boldsymbol{r_m = p^m(2 - p^m)}$
$\boldsymbol{0 \leqq m < n}$ **のとき,** $\boldsymbol{r_m = (1-p)p^m\{2 - (1+p)p^m\}}$

である．　　(答)

【5-5】

(1) $\mathrm{P}_1(1,\,2)$，$\mathrm{P}_2(2,\,1)$

と

$\mathrm{P}_1(1,\,2)$，$\mathrm{P}_2(2,\,y_2)$ $(y_2 \fallingdotseq 1)$

で分けて考える．

$\mathrm{P}_1(1,\,2)$，$\mathrm{P}_2(2,\,1)$ のとき，1 通り

$\mathrm{P}_1(1,\,2)$，$\mathrm{P}_2(2,\,y_2)$ $(y_2 \fallingdotseq 1)$ のとき，2 通り

だから，$y_1 = 2$ となるのは 3 通り．

y_1 は 2，3，4 の 3 通りがあるから，

$$D_4 = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}\ (\text{通り}) \qquad (\text{答})$$

(2) P_1〜P_{n+2} について考える．$y_i(1 \leqq i \leqq n+2)$ は，2〜$n+2$ の $n+1$ 通りがある．$y_1 = 2$ のときを考え，y_2 で場合分けする．

(i) $y_2 = 1$ のとき，y_3〜y_{n+2} が 3〜$n+2$ であるから，このとき D_n 通りである．

(ii) $y_2 \fallingdotseq 1$ のとき，x_2〜x_{n+2} に対する $y_i = 1$，3〜$n+2$ の順列の個数を考える．$y_i = 1$ となるのは，$i \fallingdotseq 2$ のときなので，$y_i = 1$ を 2 に入れ換えて，そのとき，x_2〜x_{n+2} に対する $y_i = 2$〜$n+2$ の順列の個数を考えればよい．このとき D_{n+1} 通りある．

(i)(ii) より，

$$\boldsymbol{D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n) \quad (n \geqq 2)} \ \cdots\cdots ① \qquad (\text{答})$$

(3) ① より，

$$D_{n+2} - (n+2)D_{n+1} = -\{D_{n+1} - (n+1)D_n\}$$
$$\therefore \quad D_{n+2} - (n+2)D_{n+1} = (D_3 - 3D_2)(-1)^{n-1}$$

よって，$D_2 = 1$，$D_3 = 2$ とから，

$$D_{n+2} - (n+2)D_{n+1} = (-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n = (-1)^{n+2}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}} \ \cdots\cdots ② \qquad (\text{答})$$

(4) P_i の選び方は $n!$ 通りあるから，D - 折れ線となる確率は，

$$P_n = \frac{D_n}{n!}$$

ここで，② の両辺を $(n+1)!$ で割ると，

$$\frac{D_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{D_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\therefore \quad P_{n+1} = P_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
P_n &= P_2 + \left\{ \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right\} \\
&= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots\cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \quad (\because \quad D_2 = 1) \\
&= \boldsymbol{\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}} \quad \textbf{(これは } \boldsymbol{n = 2} \textbf{ でも成立)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

《注意》

本問のように，すべてのペアが異なる数字となる順列を「完全順列」または「かき乱し」という．

Z-KAI

会員番号		氏　名	