１章－１　波動の関数

問題

■演習

【１】

《解答》

(1)　時刻 t における位置 x での位相と，時刻 $t+\Delta t$ における位置 $x+\Delta x$ での位相が等しいとおくと，

$$2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)=2\pi\left(\frac{t+\Delta t}{T}+\frac{x+\Delta x}{\lambda}\right)\qquad \therefore\quad \frac{\Delta x}{\Delta t}=-\frac{\lambda}{T}$$

これは，時間の経過とともに同位相の状態が x 軸の負の方向に移動することを表し，与えられた式は x 軸の負の方向に進行する波を表していることがわかる．また，横波の速さは，

$$v=\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|=\frac{\lambda}{T}$$

(2)　与えられた入射波の式 y を改めて y_1 とおくと，

$$y_1(x,\ t)=A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)\right\}$$

固定端 $x=0$ での入射波による振動を表す式は，

$$y_1(0,\ t)=A\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

ここで反射波を y_2 とおく．固定端 $x=0$ での合成変位は常に 0 なので，

$$y_1(0,\ t)+y_2(0,\ t)=0\qquad \therefore\quad y_2(0,\ t)=-A\sin 2\pi\frac{t}{T}$$

(3)　
$$\begin{aligned}y_2(x,\ t)&=y_2\left(0,\ t-\frac{x}{v}\right)\\&=-A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

(4)　与えられた式と (3) より，

$$\begin{aligned}y(x,\ t)&=y_1(x,\ t)+y_2(x,\ t)\\&=A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)-A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\\&=2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\end{aligned}$$

(5)　定常波の節の位置では常に $y=0$ なので，

$$2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)=0\qquad \therefore\quad x=\frac{\lambda}{2}\cdot m\quad (m=0,\ 1,\ 2\cdots)$$

よって，節と節との距離は $\Delta x=\dfrac{\lambda}{2}$ と分かる．

《解説》

(1) の内容は，以下のように簡略に扱うこともできる．

「同一の位相の状態」に注目すると，

$$2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)=\phi_0\,(\text{定数})$$

両辺を t で微分すると，

$$\frac{2\pi}{T}+\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\lambda}{T}$$

この速度は，「位相 ϕ_0 の状態をとる位置 x が移りゆく速度」であり，これを波の「位相速度」と呼ぶことが多い．

なお，高校物理で「波の速さ」というときは，正弦波の「位相速度の大きさ」のことを指す．

【2】

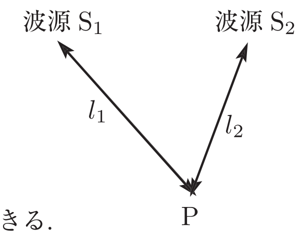
《ポイント》

合成波の式による考察

$t=0$ を適切に定めることにより，S_1，S_2 における水面の変位は次のように表せる．

$$\begin{cases} S_1\text{における変位} \ \cdots \ \psi_1(S_1,t)=a\sin(2\pi ft) \\ S_2\text{における変位} \ \cdots \ \psi_2(S_2,t)=a\sin(2\pi ft) \end{cases}$$

水面上の任意の点を P とし，$\overline{S_1P}=l_1$，$\overline{S_2P}=l_2$ とおくと，P に S_1，S_2 から届く波による変位はそれぞれ次のように表せる．



$$\begin{cases} \psi_1(P,\ t)=a\sin\left(2\pi ft-\dfrac{2\pi}{\lambda}l_1\right) \\ \psi_2(P,\ t)=a\sin\left(2\pi ft-\dfrac{2\pi}{\lambda}l_2\right) \end{cases}$$

和積公式を用いることにより，P での合成変位は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} \psi(P,\ t)&=\psi_1(P,\ t)+\psi_2(P,\ t) \\ &=2a\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l_1-\frac{2\pi}{\lambda}l_2\right)\right\}\sin\left\{2\pi ft-\frac{\pi}{\lambda}(l_1+l_2)\right\} \end{aligned}$$

時刻 t を含んでいない部分に注目することにより，P での合成振幅が得られ，

$$A(P)=2a\left|\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}l_1-\frac{2\pi}{\lambda}l_2\right)\right\}\right|$$

ψ_1，ψ_2 が強め合って $A(P)=2a$ となる位置では，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_1-\dfrac{2\pi}{\lambda}l_2\right)=\dfrac{\pi}{2}\times(\text{偶数})$ なので，

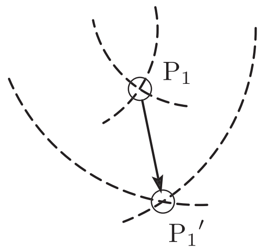
$$\frac{2\pi(l_1-l_2)}{\lambda}=\pi\times(\text{偶数}) \qquad \therefore \quad l_1-l_2=\frac{\lambda}{2}\times(\text{偶数})$$

ψ_1，ψ_2 が弱め合って $A(P)=0$ となる位置では，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}l_1-\dfrac{2\pi}{\lambda}l_2\right)=\dfrac{\pi}{2}\times(\text{奇数})$ なので，

$$\frac{2\pi(l_1-l_2)}{\lambda}=\pi\times(\text{奇数}) \qquad \therefore \quad l_1-l_2=\frac{\lambda}{2}\times(\text{奇数})$$

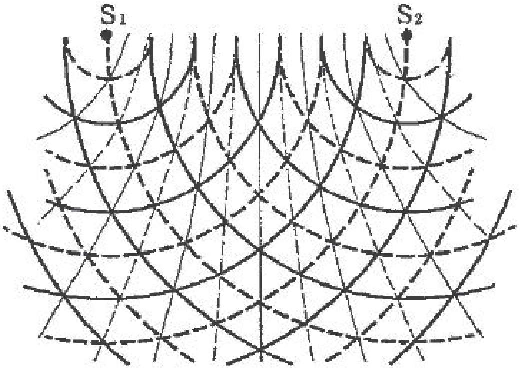
《解答》

(1) $\lambda = \dfrac{c}{f}$



(2) 右図に示すように，谷を表す各破線は，1 周期の間にひとつ外側にある破線の位置まで伝わるので，交点は $P_1{}'$ まで移動する．

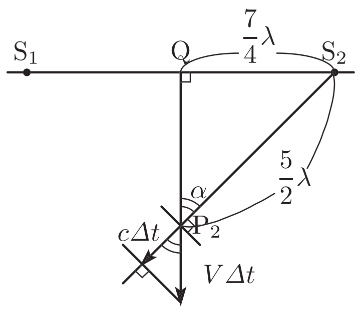
(3) 下図に示す．



(4) 交点 P_2 の進む速さを V とすると，微小時間 $\varDelta t$ の間に S_2 からの波が右下図のように伝わるので，

$$V\varDelta t\cos\alpha = c\varDelta t \qquad \therefore \quad V\cos\alpha = c \quad \cdots(*)$$

また，P_2 から線分 S_1，S_2 に下ろした垂線の足を Q とすると，



$$\cos\alpha = \frac{\overline{QP_2}}{\overline{P_2S_2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\lambda\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\lambda\right)^2}}{\frac{5}{2}\lambda} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

これを $(*)$ に代入すると，

$$V\cdot\frac{\sqrt{51}}{10} = c \qquad \therefore \quad V = \frac{10}{\sqrt{51}}c$$

(5) $\overline{S_2R} = x$ とすると，

$$\overline{S_1R} = \sqrt{(\overline{S_1S_2})^2 + x^2} = \sqrt{(\frac{7}{2}\lambda)^2 + x^2}$$

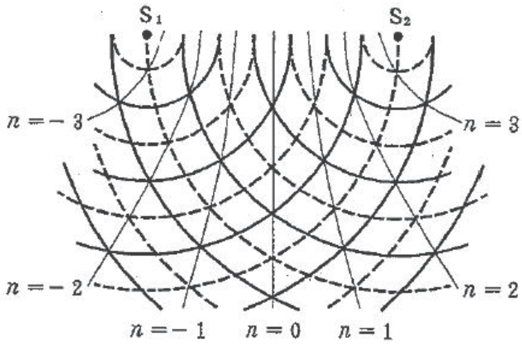
R では，S_1，S_2 からの経路差が $\dfrac{5}{2}\lambda$ なので，

$$\sqrt{(\frac{7}{2}\lambda)^2 + x^2} - x = \frac{5}{2}\lambda \qquad \therefore \quad x = \frac{6}{5}\lambda$$

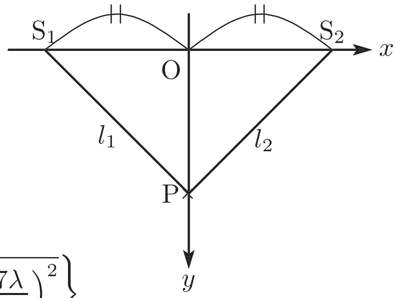
（注）(3) の図で，$\overline{S_1S_2} = \dfrac{7}{2}\lambda$ なので，強め合う条件は

$$l_1 - l_2 = n\lambda \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3)$$

これらの実線は，2 点からの距離の差が一定の点の集合だから，$n = 0$ のもの以外はすべて双曲線である．



《解説》



(4) を波の式にもとづいて求めてみる．右図のように座標軸を設定すると，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ y)$ に対して，

$$l_1 = l_2 = \sqrt{y^2 + \left(\frac{7\lambda/2}{2}\right)^2}$$

と表すことができるので，合成変位は，

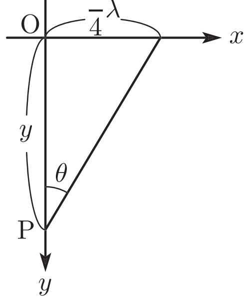
$$\psi(\mathrm{P},\ t) = 2a\sin\left\{2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{y^2 + \left(\frac{7\lambda}{4}\right)^2}\right\}$$

同一位相の状態に注目すると，

$$2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{y^2 + \left(\frac{7\lambda}{4}\right)^2} = \phi_0(\text{定数})$$

両辺を t で微分すると，

$$2\pi f - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2 + \left(\frac{7\lambda}{4}\right)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$



ここで，右図をふまえると，

$$2\pi f - \frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{f\lambda}{\cos\theta} = \frac{c}{\cos\theta}$$

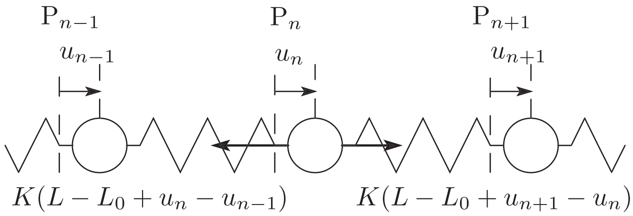
特に，P_2 では，$\theta = \alpha$ なので，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{\cos\alpha} = \frac{10}{\sqrt{51}}c$$

【3】

《解答》

(1) n 番目の小物体を P_n とすると，P_n の左側のばねの伸びは $L-L_0+u_n-u_{n-1}$，右側のばねの伸びは $L-L_0+u_{n+1}-u_n$ と表すことができ，P_n に作用する力は下図のようになる．



よって，P_n の運動方程式は，

$$\begin{aligned} Ma_n &= K(L-L_0+u_{n+1}-u_n)-K(L-L_0+u_n-u_{n-1}) \\ &= K(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}) \end{aligned}$$

(2) 与えられた二つの進行波を合成すると，

$$u_n = A\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nL}{\lambda}\right)\right\}+B\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{nL}{\lambda}\right)\right\}\cdots(*)$$

左の壁面が固定端で，$u_0=0$ に保たれるので，

$$A\cos 2\pi\frac{t}{T}+B\cos 2\pi\frac{t}{T}=0 \qquad \therefore \quad B=-A$$

これをふまえて，合成波の式 $(*)$ を変形すると，

$$\begin{aligned} u_n &= A\left[\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{nL}{\lambda}\right)\right\}-\cos\left\{2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{nL}{\lambda}\right)\right\}\right] \\ &= 2A\sin 2\pi\frac{nL}{\lambda}\cdot\sin 2\pi\frac{t}{T} \end{aligned}$$

(3) (2) より，u_{n-1} および u_{n+1} を求めて，u_n とともに (1) に代入すると，

$$\begin{aligned} Ma_n &= 2AK\left\{\sin 2\pi\frac{(n+1)L}{\lambda}-2\sin 2\pi\frac{nL}{\lambda}+\sin 2\pi\frac{(n-1)L}{\lambda}\right\}\sin 2\pi\frac{t}{T} \\ &= 4AK\sin 2\pi\frac{nL}{\lambda}\left(\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}-1\right)\sin 2\pi\frac{t}{T} \end{aligned}$$

(2) をふまえると，

$$Ma_n = -2K\left(1-\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}\right)u_n \qquad \therefore \quad a_n = -\frac{2K}{M}\left(1-\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}\right)u_n$$

P_n の運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{2K}{M}\left(1-\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}\right)}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K\left(1-\cos 2\pi\frac{L}{\lambda}\right)}}$$

【4】

《解答》

(イ)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \therefore \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

(ロ)

$$y = y_1 + y_2 = -2A \sin kx \cos \omega t$$

(ハ)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

(ニ)

$$2l$$

(ホ)

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

(ヘ)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{l}$$

(ト)

$$\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{OP}}} \fallingdotseq A\left\{-\frac{k^2 \cdot \Delta x}{2}\sin(kx) + k\cos(kx)\right\}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{QD}}}{\overline{\mathrm{OQ}}} \fallingdotseq A\left\{\frac{k^2 \cdot \Delta x}{2}\sin(kx) + k\cos(kx)\right\}$$

$$\therefore \quad F = -k^2 \cdot \Delta x \cdot TA\sin(kx)$$

(チ)

$$(\rho \cdot \Delta x)a = F$$

$$\therefore \quad a = -\frac{k^2}{\rho}Ty(x)$$

(リ)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k^2}{\rho}T} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

■自習

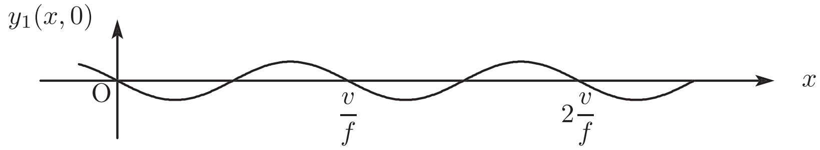
【1】

《解答》

以下の解答においては，位置 x での時刻 t における変位を $y(x,\ t)$ と表すことにする．

(1) (a) $$\begin{aligned} y_1(x,\ t) &= y_1\left(0,\ t-\frac{x}{v}\right) \\ &= A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\} \end{aligned}$$

(b) $y_1(x,\ 0) = -A\sin\left(2\pi f\dfrac{x}{v}\right)$ を図示すると下図のようになり，$\lambda = \dfrac{v}{f}$ と分かる．



(2) (a) 固定端反射がおこるので，

$$y_1(0,t)+y_2(0,t)=0 \qquad \therefore\quad y_2(0,\ t) = -A\sin(2\pi ft)$$

(b) $$\begin{aligned} y_2(x,\ t) &= y_2\left(0,\ t-\frac{0-x}{v}\right) \\ &= -A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\} \end{aligned}$$

(c) 合成波を表す式は，

$$\begin{aligned} y(x,\ t) &= y_1(x,\ t)+y_2(x,\ t) \\ &= A\left[\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}-\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\}\right] \\ &= -2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos(2\pi ft) \end{aligned}$$

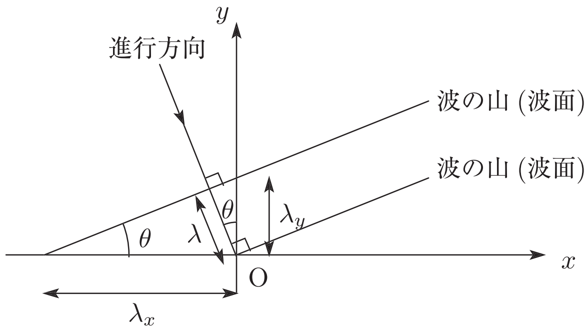
振幅が最大である腹の位置では，

$$\left|\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x_{\mathrm{B}}\right)\right| = 1 \qquad \therefore\quad x_{\mathrm{B}} = \frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{2}\cdot m \quad (m\text{ は自然数})$$

【2】

《解答》

(1) 波面が進行方向と垂直であることに注意すると，O に波の山が入射した時刻での波面は下図のようになる．



(ア) x 軸上での見かけの波長は，$\lambda_x = \dfrac{\lambda}{\sin\theta}$

(イ) y 軸上での見かけの波長は，$\lambda_y = \dfrac{\lambda}{\cos\theta}$

(ウ) 波は時間 T で進行方向に λ だけ進むので，$v = \dfrac{\lambda}{T}$

(エ) x 軸上で，波は時間 T で λ_x 進むので $v_x = \dfrac{\lambda_x}{T} = \dfrac{\lambda}{T\sin\theta}$

(オ) y 軸上で，波は時間 T で λ_y 進むので $v_y = \dfrac{\lambda_y}{T} = \dfrac{\lambda}{T\cos\theta}$

(2) (カ) 反射の法則より，$\theta' = \theta$

(キ) 入射波の変位 a と反射波の変位 a が重なるので，合成変位は $2a$

(ク) 入射波と反射波で, y 軸上でのみかけの波長は等しいので, 山と山の距離は $\lambda_y = \dfrac{\lambda}{\cos\theta}$

(ケ) 腹と腹の間隔は $\dfrac{1}{2}$ 波長なので，$\dfrac{\lambda_y}{2} = \dfrac{\lambda}{2\cos\theta}$

(コ) 入射波の変位と反射波の変位が打ち消し合うので，合成変位は 0

(サ) 壁面は自由端で腹となるので，0 に最も近い節の位置は,

$$y = \frac{\lambda_y}{4} = \frac{\lambda}{4\cos\theta}$$

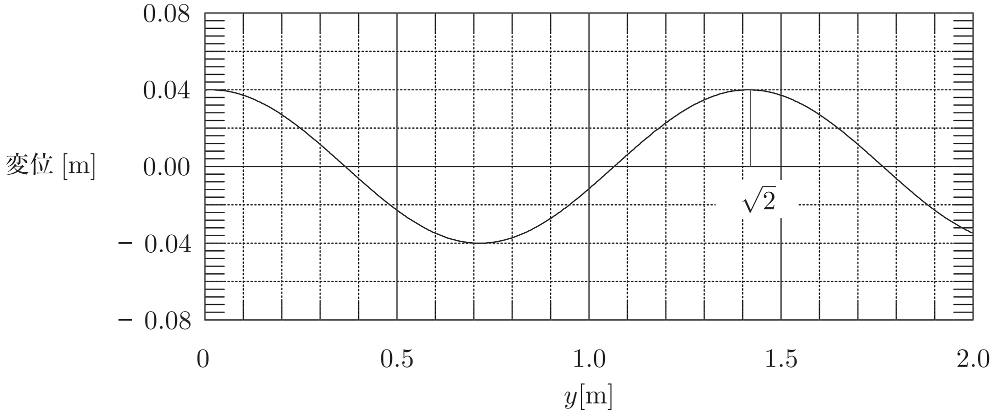
(3) y 軸上でのみかけの波長は,

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$$

また，y 軸上に生じる定常波の腹における合成変位は

$$2a = 0.04\,\mathrm{m}$$

よって，y 軸上の合成波形は次ページの図のようになる．


0.08
0.04
変位 [m]
0.00
− 0.04
− 0.08
$\sqrt{2}$
0
0.5
1.0
1.5
2.0
y[m]

1章－2　力学演習（1）

問題

■演習

【1】

《解答》

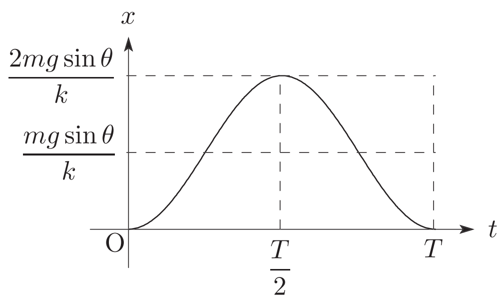
自然長位置を原点に，斜面平行下向きに x 軸，斜面垂直上向きに y 軸を設定する．

(1) 運動方程式は，

$$m \cdot 0 = -kx_1 + mg\sin\theta \qquad \therefore \quad x_1 = \frac{mg\sin\theta}{k}$$

(2) 運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + mg\sin\theta \\ &= -k\left(x - \frac{mg\sin\theta}{k}\right) \end{aligned}$$



これと初期条件より，

$$x(t) = \frac{mg\sin\theta}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

$$\therefore \quad \dot{x}(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta \cdot \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

以上より，$x = x_1$ での速さは，

$$v_1 = \sqrt{\frac{m}{k}}g\sin\theta$$

(3) $x_{\max} = \dfrac{2mg\sin\theta}{k}$

(4) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(5) 摩擦力，垂直抗力を R，N とすると，静止を保つときの運動方程式は，

$$\begin{cases} 0 = -kx + mg\sin\theta + R \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} R = kx - mg\sin\theta \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

滑り出さないための条件 $\left|\dfrac{R}{N}\right| \leqq \mu_0$ より，

$$-\mu_0 N \leqq R \leqq \mu_0 N$$

R，N を代入して解くと，

$$\frac{(\sin\theta - \mu_0\cos\theta)mg}{k} \leqq x \leqq \frac{(\sin\theta + \mu_0\cos\theta)mg}{k}$$

x の下限が x_2，上限が x_3 なので，

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{(\sin\theta - \mu_0\cos\theta)mg}{k} \\[2ex] x_3 = \dfrac{(\sin\theta + \mu_0\cos\theta)mg}{k} \end{cases}$$

(6) 下へ滑るときの運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \\ &= -k\left\{x - \frac{mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k}\right\} \end{aligned}$$

ここで $\dfrac{mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k} = x_0$ とおき，初期条件を考慮すると，

$$x = x_0\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \qquad \therefore\quad x_{\max} = 2x_0 = \frac{2mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k}$$

(7) 最下点で静止を保つとき，運動方程式は，

$$\begin{cases} 0 = -k\cdot 2x_0 + mg\sin\theta + R \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore\quad R = 2kx_0 - mg\sin\theta$$

滑り出さないための条件 $\dfrac{R}{N} \leqq \mu_0$ より，

$$\frac{2kx_0 - mg\sin\theta}{mg\cos\theta} \leqq \mu_0 \qquad \therefore\quad 2kx_0 \leqq mg(\sin\theta + \mu_0\cos\theta)$$

x_0 を代入して整理すると，

$$2mg(\sin\theta - \mu\cos\theta) \leqq mg(\sin\theta + \mu_0\cos\theta) \qquad \therefore\quad \tan\theta \leqq 2\mu + \mu_0$$

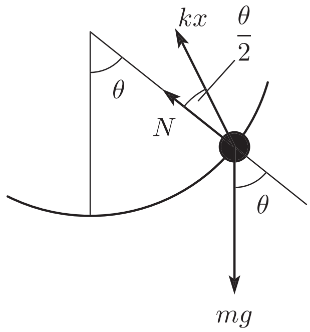
これは静止を保つための条件だから，上昇するための条件は，

$$\tan\theta > 2\mu + \mu_0$$

【2】

《解答》

(1) (a) ゴムひもの伸びを x とすると，$x = 2r\cos\dfrac{\theta}{2}$ と表せる．これを用いると, 力の接線成分 F_θ は,



$$\begin{aligned} F_\theta &= kx\sin\frac{\theta}{2} - mg\sin\theta \\ &= kr\sin\theta - mg\sin\theta \end{aligned}$$

$mg = kr$ の場合は，θ によらず $F_\theta = 0$ となる．

(b) (a) より，運動方程式の接線成分は,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

よって，小球は速さ v_0 のままで反時計回りに等速円運動をする．

(c) 垂直抗力の大きさを N とすると, 運動方程式の向心成分は,

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = N + kx\cos\frac{\theta}{2} - mg\cos\theta$$

x を代入して整理すると,

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = N + kr(1+\cos\theta) - mg\cos\theta$$

$mg = kr$ の場合は,

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = N + mg \qquad \therefore \quad N = m\left(\frac{{v_0}^2}{r} - g\right)$$

(2) (a) 弾性エネルギーは,

$$U_1(\theta) = \frac{1}{2}kx^2 = kr^2(1+\cos\theta)$$

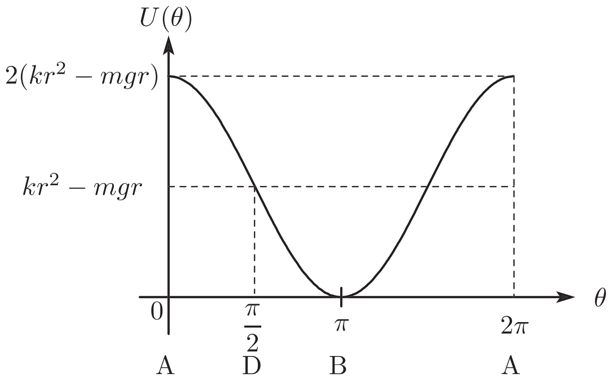
重力による位置エネルギーは, B を基準にとると,

$$U_2(\theta) = -mgr(1+\cos\theta)$$

これらより,

$$\begin{aligned} U(\theta) &= U_1(\theta) + U_2(\theta) \\ &= (kr^2 - mgr)(1+\cos\theta) \end{aligned}$$

$mg < kr$ の場合の $U(\theta)$ は，次ページの図のようになる．



(b) 1 回転するためには, 途中で速さが 0 にならなければよい．また，エネルギーの保存より, $U(\theta)$ が最大になる位置で速さは最小になる．図 2 では, $\theta=0$ となる A で $U(\theta)$ は最大なので，A と D に注目して,

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2+U\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2+U(0)$$
$$\therefore\quad \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2=\frac{1}{2}m{v_1}^2+mgr-kr^2$$

A を通過するとき，$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2>0$ より,

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2+mgr-kr^2>0 \qquad \therefore\quad v_1>\sqrt{2r\left(\frac{kr}{m}-g\right)}$$

(3) 運動方程式の接線成分は,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=kr\sin\theta-mg\sin\theta$$

ここで, $v=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ を代入すると,

$$mr\ddot{\theta}=-(mg-kr)\sin\theta$$

$mg>kr$ の場合は，$\theta=0$ で $U(\theta)$ が極小となるので，$\theta=0$ の近傍に注目して,

$$mr\ddot{\theta}\fallingdotseq-(mg-kr)\theta \qquad \therefore\quad \ddot{\theta}=-\frac{mg-kr}{mr}\theta$$

よって, 運動は角振動数 $\omega=\sqrt{\frac{mg-kr}{mr}}$ の単振動とわかり, 周期を T とすると,

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{mr}{mg-kr}}$$

【3】
《解答》

(ア) $2 \times \dfrac{l}{v_0}$

(イ) $1 \times v_0$

(ウ) 動摩擦係数を μ_1 とすると，動摩擦力は大きさが $\mu_1 mg$ で，滑る向きと反対向きに作用する．運動エネルギー変化と仕事の関係より，

$$0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\mu_1 mg \cdot 2l \qquad \therefore \quad \mu_1 = \frac{1}{4} \times \frac{{v_0}^2}{gl}$$

(エ) 滑る向きを正とした加速度を a とおくと，運動方程式の水平成分は，

$$\begin{aligned} ma &= -\mu_1 mg \\ &= -\frac{{v_0}^2}{4gl} \cdot mg \qquad \therefore \quad a = -\frac{{v_0}^2}{4l} \end{aligned}$$

元の位置に戻って静止するまでの時間を t_1 とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= at_1 + v_0 \\ &= -\frac{{v_0}^2}{4l}t_1 + v_0 \qquad \therefore \quad t_1 = 4 \times \frac{l}{v_0} \end{aligned}$$

(オ) $\dfrac{1}{2} \times m{v_0}^2$

(カ) 1 回目の衝突を終えたときの，小球の速度を v_1，台の速度を V_1 とおく．
反発係数が 1 なので，

$$1 = -\frac{v_1 - V_1}{v_0} \quad \cdots ①$$

運動量の保存より，

$$mv_1 + MV_1 = mv_0 \quad \cdots ②$$

①，②より，v_1 を消去すると，

$$m(V_1 - v_0) + MV_1 = mv_0 \qquad \therefore \quad V_1 = \frac{2m}{M+m} \times v_0$$

(キ) 2 回目の衝突を終えたときの，小球の速度を v_2，台の速度を V_2 とおく．
反発係数が 1 なので，

$$1 = -\frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} \quad \cdots ③$$

①，③より，

$$1 = +\frac{v_2 - V_2}{v_0} \quad \cdots ④$$

運動量の保存より，

$$mv_2 + MV_2 = mv_0 \quad \cdots ⑤$$

④，⑤より，v_2 を消去すると，

$$m(V_2 + v_0) + MV_2 = mv_0 \qquad \therefore \quad V_2 = 0 \times v_0$$

(ク) 小球の相対速度の大きさは v_0 で一定なので，所要時間は $2 \times \dfrac{l}{v_0}$

(ケ) ④，⑤より，V_2 を消去すると，

$$mv_2 + M(v_2 - v_0) = mv_0 \qquad \therefore \quad v_2 = 1 \times v_0$$

(コ) 台と小球が一体化したときの速度を v_3 として，運動量の保存より，

$$(M+m)v_3 = mv_0 \qquad \therefore \quad v_3 = \frac{m}{M+m} \times v_0$$

(サ) 系全体の運動エネルギー変化は，

$$\frac{1}{2}(M+m){v_3}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\frac{Mm{v_0}^2}{2(M+m)} \qquad \therefore \quad (\text{減少分}) = \frac{M}{2(M+m)} \times m{v_0}^2$$

(シ) 動摩擦係数を μ_2 とすると，動摩擦力は大きさが $\mu_2 mg$ で，滑る向きと反対向きに作用する．系全体について，運動エネルギー変化と仕事の関係より，

$$-\frac{Mm{v_0}^2}{2(M+m)} = -\mu_2 mg \cdot 2l \qquad \therefore \quad \mu_2 = \frac{M}{4(M+m)} \times \frac{{v_0}^2}{gl}$$

(ス) 小球が滑る向きを正として，小球の加速度を a_m，台の加速度を a_M とおくと，運動方程式の水平成分は，

$$\begin{cases} ma_m = -\mu_2 mg \\ Ma_M = \mu_2 mg \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a_m = -\mu_2 g \\ a_M = \dfrac{\mu_2 mg}{M} \end{cases}$$

小球が滑る向きを正として小球の相対加速度を a' とおくと，$a' = a_m - a_M$ と表せるので，

$$\begin{aligned} a' &= (-\mu_2 g) - \frac{\mu_2 mg}{M} \\ &= -\frac{\mu_2 g(M+m)}{M} \\ &= -\frac{{v_0}^2}{4l} \end{aligned}$$

小球が台に対して静止するまでの時間を t_2 とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= a't_2 + v_0 \\ &= -\frac{{v_0}^2}{4l}t_2 + v_0 \qquad \therefore \quad t_2 = 4 \times \frac{l}{v_0} \end{aligned}$$

【4】

《解答》

(1) 運動方程式の軌道接線成分より，

$$ml\ddot{\theta} = -2kl\theta$$
$$\therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{2k}{m}\theta = -{\omega_1}^2\theta$$
$$\therefore \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

(2)

$$U_1 = k(l\theta)^2$$

(3)

$$U_0 = -mgl(1-\cos\theta)$$

(4a)，(4b)　与えられた近似式を用いると

$$U_0 = -mgl\left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\right)$$
$$\therefore \quad U = U_1 + U_0 = \frac{ml^2}{2}\left\{\left(\frac{2k}{m} - \frac{g}{l}\right)\theta^2 + \frac{g}{12l}\theta^4\right\}$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$, $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ を代入すると

$$U = \frac{ml^2}{2}\left\{({\omega_1}^2 - {\omega_0}^2)\theta^2 + \frac{{\omega_0}^2}{12}\theta^4\right\} \cdots ①$$

ゆえに

$$a = {\omega_1}^2 - {\omega_0}^2 \cdots \text{答 (4a)}$$
$$b = \frac{{\omega_0}^2}{12} \cdots \text{答 (4b)}$$

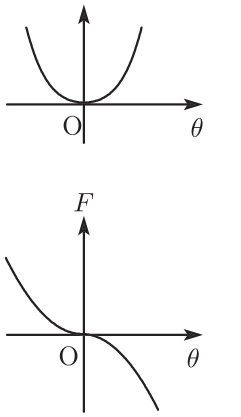
(5)

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(l\theta)}U(\theta)$$
$$= -ml\left\{({\omega_1}^2 - {\omega_0}^2)\theta + \frac{{\omega_0}^2}{6}\theta^3\right\} \cdots ②$$

答は $({\omega_1}^2 - {\omega_0}^2)\theta + \dfrac{{\omega_0}^2}{6}\theta^3$

(図イ)　①，② 式より，答は図イ

(図イ)

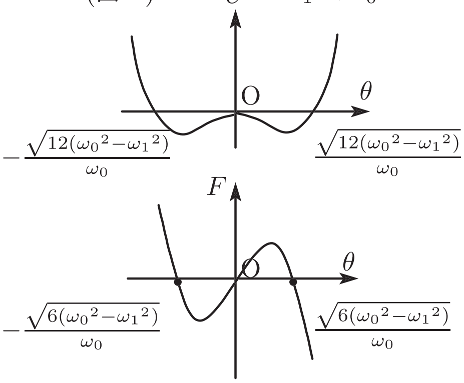


(図ロ) $\omega_1 < \omega_0$ を考慮して，

$$U = \frac{ml^2}{2}\left\{-({\omega_0}^2 - {\omega_1}^2) + \frac{{\omega_0}^2}{12}\theta^2\right\}\theta^2$$

$$F = -ml\left\{-({\omega_0}^2 - {\omega_1}^2) + \frac{{\omega_0}^2}{6}\theta^2\right\}\theta$$

(図ロ)



横軸との交点は $U = 0$ より

$$\theta = 0, \qquad \theta_0 = \pm\frac{\sqrt{12({\omega_0}^2 - {\omega_1}^2)}}{\omega_0}$$

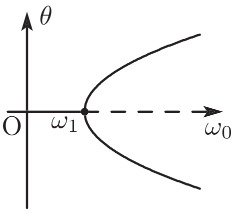
$F = 0$ より $\theta = 0$

$$\theta_1 = \pm\frac{\sqrt{6({\omega_0}^2 - {\omega_1}^2)}}{\omega_0} \cdots ③$$

よって，図ロを得る．答えは図ロ

(図ハ)　$\omega_1 > \omega_0$ では，図イより，$\theta = 0$ が安定なつり合いの位置．不安定なつり合いの位置はない．　$\omega_1 < \omega_0$ では，図ロより，$\theta = 0$ が不安定，$\pm\theta_1$ が安定なつり合いの位置．③ 式で ω_0 を変数とみて，図ハを得る．答えは図ハ

(図ハ)



(6) θ が小さいから，$\theta^3 = 0$ としてよい．② 式より

$$ml\ddot{\theta} \fallingdotseq -m({\omega_1}^2 - {\omega_0}^2)l\theta$$

$$\therefore \quad \ddot{\theta} = -({\omega_1}^2 - {\omega_0}^2)\theta = -\varOmega^2\theta$$

$$\therefore \quad \varOmega = \sqrt{{\omega_1}^2 - {\omega_0}^2}$$

添削課題

《解答》

(1) (a) 運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

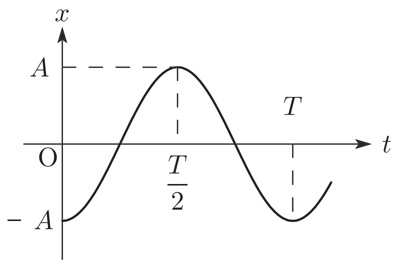
運動は単振動とわかり,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(b) 初期条件をふまえると,

$$x = -A\cos(\omega t) = -A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

これをグラフにすると右図のようになる.



(2) (a) エネルギー保存より,

$$\frac{m}{2}{v_1}^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{k}{2}A^2 \qquad \therefore \quad v_1 = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(b) 運動量と力積の関係より，向きを含めた力積は,

$$I = m(-v_1) - mv_1 = -2mv_1 = -A\sqrt{3mk}$$

よって，力積の向きは $-x$ 方向で，大きさは $A\sqrt{3mk}$ とわかる.

(c) 衝突の時刻を $t = t_1$ とすると，$x(t_1) = \dfrac{A}{2}$ なので,

$$-A\cos(\omega t_1) = \frac{A}{2} \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

衝突してから再び $x = -A$ となるまでにさらに t_1 かかる．手をはなしてからの時間を t_0 とすると,

$$t_0 = 2t_1 = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) (a) 衝突直前のおもりの速さを v_2 として，エネルギー保存より,

$$\frac{m}{2}{v_2}^2 = \frac{k}{2}A^2 \qquad \therefore \quad v_2 = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

衝突直後のおもりと台車の速度を v_3，V_3 として，運動量の保存と反発係数の定義より,

$$\begin{cases} mv_3 + 2mV_3 = mv_2 \\ \dfrac{V_3 - v_3}{v_2} = 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} v_3 = -\dfrac{1}{3}v_2 \\ V_3 = +\dfrac{2}{3}v_2 \end{cases}$$

以上より，

$$\begin{cases} \text{おもりの速度} \cdots -x\text{ 向きで大きさ } \dfrac{A}{3}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \text{台車の速度} \cdots +x\text{ 向きで大きさ } \dfrac{2A}{3}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

(b) エネルギー保存より，

$$\frac{k}{2}A'^2 = \frac{m}{2}{v_3}^2 \qquad \therefore \quad A' = |v_3|\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{3}A$$

(c) それぞれの力学的エネルギーの変化は，

$$\begin{cases} \text{おもり} \cdots \mathit{\Delta} E_1 = \dfrac{m}{2}{v_3}^2 - \dfrac{m}{2}{v_2}^2 = -\dfrac{4}{9}kA^2 \\ \text{台車} \cdots \mathit{\Delta} E_2 = \dfrac{2m}{2}{V_3}^2 - 0 = \dfrac{4}{9}kA^2 \end{cases}$$

これらより，系全体での力学的エネルギーの変化は，

$$\mathit{\Delta} E_1 + \mathit{\Delta} E_2 = 0$$

配点

100 点

(1)(a)5 点，(b)15 点，(2)(a),(b) 各 10 点，(c)20 点

(3)(a)20 点，(b)10 点，(c)10 点

２章－１　波長と振動数

問題

■演習

【１】

《解答》

以下では，重力加速度の大きさを g とする．力のつりあいより，おもりの質量が m のときの張力は大きさが mg となる．図 1 のとき，波の基本式より，

$$\sqrt{\frac{4M \cdot g}{\rho}} = fl \qquad \therefore \quad 2\sqrt{\frac{Mg}{\rho}} = fl \ \cdots ①$$

(1) おもりの質量を M にしたときの波長を λ_1 とすると，

$$\sqrt{\frac{Mg}{\rho}} = f\lambda_1 \ \cdots ②$$

①，②より，

$$2 \times f\lambda_1 = fl \qquad \therefore \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}l$$

これは，腹が 4 個の定常波を生じることを表している．(図は省略)

n 個の腹が生じるときの波長を λ とすると，

$$\frac{\lambda}{2} \times n = l \qquad \therefore \quad \lambda = \frac{2l}{n}$$

このとき，おもりの質量を M' とすると，

$$\sqrt{\frac{M'g}{\rho}} = f \cdot \frac{2l}{n} \ \cdots ③$$

①，③より，

$$\sqrt{\frac{M'g}{\rho}} = \frac{2}{n} \times 2\sqrt{\frac{Mg}{\rho}} \qquad \therefore \quad M' = \frac{16}{n^2}M$$

(2) 糸の線密度を 4ρ としたときの波長を λ_2 とすると，

$$\sqrt{\frac{4M \cdot g}{4\rho}} = f\lambda_2 \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} = f\lambda_2 \ \cdots ④$$

①，④より，

$$2 \times f\lambda_2 = fl \qquad \therefore \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}l$$

これは，腹が 4 個の定常波を生じることを表している．(図は省略)

n 個の腹が生じるとき，糸の線密度を ρ' とすると，

$$\sqrt{\frac{4M \cdot g}{\rho'}} = f \cdot \frac{2l}{n} \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{Mg}{\rho'}} = \frac{fl}{n} \ \cdots ⑤$$

①，⑤より，

$$\sqrt{\frac{Mg}{\rho'}} = \frac{1}{n} \times 2\sqrt{\frac{Mg}{\rho}} \qquad \therefore \quad \rho' = \frac{n^2}{4}\rho$$

(3) 音叉の振動数を $4f$ としたときの波長を λ_3 とすると，

$$\sqrt{\frac{4M\cdot g}{\rho}} = 4f\cdot\lambda_3 \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} = 2f\lambda_3 \quad \cdots ⑥$$

①，⑥より，

$$2\times 2f\lambda_3 = fl \qquad \therefore \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}l$$

これは，腹が 8 個の定常波を生じることを表している．(図は省略)

n 個の腹が生じるとき，音叉の振動数を f' とすると，

$$\sqrt{\frac{4M\cdot g}{\rho}} = f'\cdot\frac{2l}{n} \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} = \frac{f'l}{n} \quad \cdots ⑦$$

①，⑦より，

$$2\times\frac{f'l}{n} = fl \qquad \therefore \quad f' = \frac{n}{2}f$$

(4) 音叉を縦にすると，音叉が 2 回振動する間に糸が 1 回振動する．このため，糸の振動数は $\frac{1}{2}f$ となる．このときの波長を λ_4 とすると，

$$\sqrt{\frac{4M\cdot g}{\rho}} = \frac{1}{2}f\cdot\lambda_4 \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{Mg}{\rho}} = \frac{1}{4}f\lambda_4 \quad \cdots ⑧$$

①，⑧より，

$$2\times\frac{1}{4}f\lambda_4 = fl \qquad \therefore \quad \lambda_4 = 2l$$

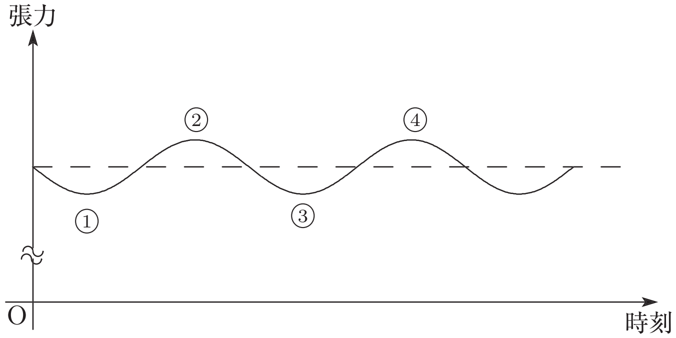
これは，腹が 1 個の定常波を生じることを表している．(図は省略)

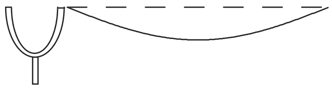
《解説》

音叉を縦にした (4) では，糸の振動数が音叉の振動数の半分になる．これを理解するためには，音叉の振動が糸の張力に与える影響を考えてみるのがよい．

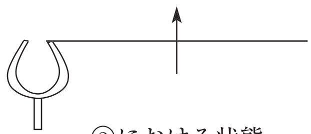
①，③のように音叉が開いたときは，張力がすこし小さくなり，糸は幾分たるみ気味の状態になる．これに対して，②，④のように音叉が閉じたときは，張力がすこし大きくなり，糸は強くピンと張った状態になる．このため，音叉が振動して張力がわずかな増加と減少を繰り返すと，糸にはたるみ気味の状態とピンと張った状態が交互に現れる．

以上のことをふまえて，音叉の振動と糸の振動の関係について考えてみよう．時間が経過して①→②→③と変化すると音叉は 1 回振動するが，糸はまだ半分しか振動していない．糸がさらに半分振動して 1 回の振動を終えるためには，音叉がさらに 1 回振動して 2 回の振動を終えなければならない．このため，音叉を縦にした場合には糸の振動数が音叉の振動数の半分になる．

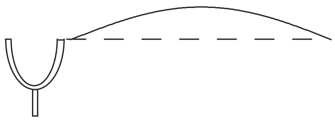




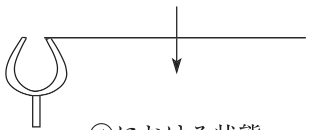
①における状態



②における状態



③における状態



④における状態

【2】

《解答》

(1) 音が大きくなるのは，気柱の固有振動数が送り込む音波の振動数と一致して共鳴したときで，このとき，気柱にはピストンの位置を節，管口の位置を腹とする定常波が生じているので，管口からピストンまでの長さ l は $\dfrac{1}{4}$ 波長の奇数倍となっている．

(2) 定常波の節に近い位置では，空気がほとんど振動をしないので微粒子はほとんど動かない．定常波の腹に近い位置では，空気が大きく振動をしているので，微粒子は舞っている．

(3) 音の波長は，

$$\lambda = \frac{340\,\mathrm{m/s}}{1.65\times10^{3}\,\mathrm{Hz}} \fallingdotseq 0.206\,\mathrm{m}$$

ピストンの位置が 5 番目の節となる定常波では，図 1 より，

$$\begin{cases} l = \dfrac{\lambda}{4}\cdot 9 \fallingdotseq 0.464\,\mathrm{m} \\ a = \dfrac{\lambda}{4}\cdot 2 \fallingdotseq 0.103\,\mathrm{m} \end{cases}$$

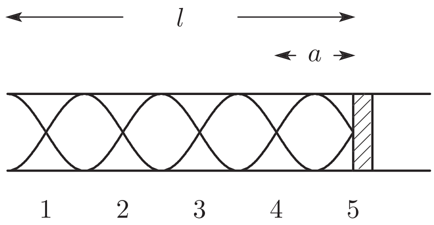


図 1

(4) 1 で密度が最大のとき，3，5 でも密度は最大になる．このとき，2，4 では密度が最小になる．(図は省略)

《解説》

y は空気の右方向への変位を正として表すものとする．

1 の部分の密度が最大の瞬間，空気の変位は，図 2(a) で表される．1 の両側の空気は 1 に近づく向きに変位して密度が高くなっている．一方，2 では両側の空気は 2 から離れる向きに変位して密度は低くなっている．

このため，場所による密度の違いは図 2(b) のようになる．(4) では，この密度の違いを濃淡として表せばよい．

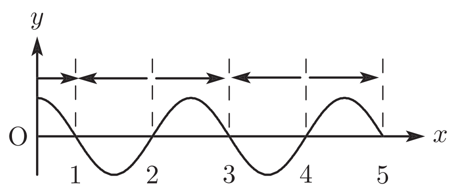


図 2(a)

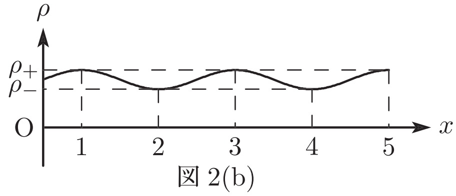


図 2(b)

【3】

《解答》

(1) 流れの速さを含めた音速は $V-u$ になるので，

$$V-u=f_0\lambda \qquad \therefore \quad \lambda=\frac{V-u}{f_0}$$

また，粒子からみたみかけの音速は $(V-u)+u=V$ なので，

$$f_1=\frac{V}{\lambda}=\frac{V}{V-u}f_0$$

(2) 流れの速さを含めた音速は $V+u$ になり，粒子からみたみかけの音速は $(V+u)-u=V$ なので，

$$\lambda'=\frac{V}{f_1} \qquad \therefore \quad f_2=\frac{V+u}{\lambda'}=\frac{V+u}{V-u}f_0$$

(3) 合成変位は，

$$y=y_0+y_2=2A\cos\left(2\pi\frac{f_2-f_0}{2}t\right)\times\cos\left(2\pi\frac{f_0+f_2}{2}t\right)$$

よって，合成振幅は $2A\left|\cos\left(2\pi\frac{f_2-f_0}{2}t\right)\right|$ となり，ゆっくり変動することが分かる．振幅の変動周期を T とすると，

$$\left|2\pi\frac{f_2-f_0}{2}T\right|=\pi \qquad \therefore \quad T=\frac{1}{|f_2-f_0|}$$

よって，うなりの振動数は，

$$\frac{1}{T}=|f_2-f_0|=\varDelta f$$

(4) (2) より，

$$\varDelta f=\left|\frac{V+u}{V-u}f_0-f_0\right|=\frac{2u}{V-u}f_0$$

(5) (4) より，

$$\varDelta f\fallingdotseq\frac{2u}{V}f_0 \qquad \therefore \quad u=\frac{\varDelta f}{2f_0}V$$

(6) $u=\dfrac{5.0\times10\,\mathrm{Hz}}{2\times3.0\times10^4\,\mathrm{Hz}}\times1.5\times10^3\,\mathrm{m/s}\fallingdotseq1.3\,\mathrm{m/s}$

(7) $u=1\times10^{-2}\,\mathrm{m/s}$ のとき，

$$\varDelta f=\frac{2u}{V}f_0=4\times10^{-1}\,\mathrm{Hz}$$

よって，$\varDelta f$ を $1\times10^{-1}\,\mathrm{Hz}$ の精度で検出する必要がある．

【4】

《解答》

(1) 仕事

(2) 内部エネルギー

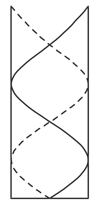
(3) ピストンの運動方程式 (鉛直上向き正) より，

$$0 = PS - P_0S - Mg \qquad \therefore \quad P = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

(4) ピストンに作用する力は (3) と不変ゆえ定圧変化.

(5) $V = f_0\lambda_0 \qquad \therefore \quad \lambda_0 = \dfrac{V}{f_0}$

(6) $\dfrac{\lambda_0}{4} \times (2n-1) = L_0 \qquad \therefore \quad \lambda_0 = \dfrac{4}{2n-1}L_0$



$n = 3$ の場合

$$\begin{aligned} L_0 &= (n-1)\frac{\lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0}{4} \\ &= \frac{2n-1}{4}\lambda_0 \end{aligned}$$

(7) 次の共鳴が起こる波長 λ_1 は，(6) と同様にして，

$$\lambda_1 = \frac{4}{2n+1}L_0$$

ここで $V = f_0\lambda_0 = f_1\lambda_1$ より，

$$f_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}f_0 = \frac{2n+1}{2n-1}f_0$$

(8) 気体が膨張して気柱の長さが $\dfrac{\lambda_0}{2}$ だけ短くなったとき再び共鳴する．このときピストンの底面からの高さが $L_0 + \dfrac{\lambda_0}{2}$ となるから，

$$\begin{aligned} PS\left(L_0 + \frac{\lambda_0}{2}\right) &= nRT_1 \\ PSL_0 &= nRT_0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_0} = 1 + \frac{\lambda_0}{2L_0} = 1 + \frac{V}{2f_0L_0}$$

(9) (8) と同様に，

$$\frac{T}{T_0} = \frac{L_0 + L}{L_0}$$

(10) 気柱の長さを $L_0 - L$ とし，波長を短くするから，共鳴したときの節の数は変わらない．このときの波長を λ_4 とすると，(6) と同様に，

$$\lambda_4 = \frac{4}{2n-1}(L_0 - L)$$

(7) と同様に，$V = f_0\lambda_0 = f\lambda_4$ と上式より，

$$\frac{f_0}{f} = \frac{\lambda_4}{\lambda_0} = \frac{L_0 - L}{L_0}$$

(11)　(9), (10) より $\dfrac{L}{L_0}$ を消去して,

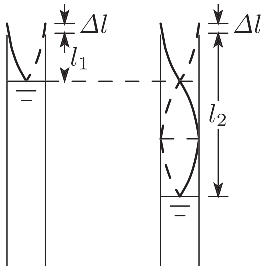
$$\frac{T}{T_0} = 2 - \frac{f_0}{f}$$

■自習

【1】

《解答》

(a) (i) 生じている定常波の様子を横波表示すると右図のようになるので,



$$\begin{cases} l_1 + \Delta l = \dfrac{1}{4}\lambda \\ l_2 + \Delta l = \dfrac{3}{4}\lambda \end{cases}$$

これらより,

$$l_2 - l_1 = \frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore \quad \lambda = 2(l_2 - l_1) = 1.15[\mathrm{m}]$$

(ii) $v = f\lambda = 3.45 \times 10^2[\mathrm{m/s}]$

(iii) $\Delta l = \dfrac{\lambda}{4} - l_1 = 2.75 \times 10^{-2}[\mathrm{m}]$

(b) 波長を λ' とすると,(a)(i) と同様に

$$\lambda' = 2(l_2 - l_1) = 6.90 \times 10^{-1}[\mathrm{m}] \qquad \therefore \quad f_\mathrm{b} = \frac{v}{\lambda'} = 5.00 \times 10^2[\mathrm{Hz}]$$

(c)

(i)

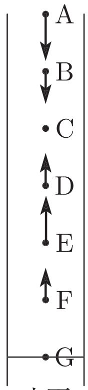


図 2

(ii)

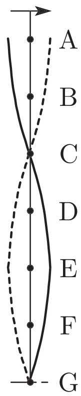


図 1

(iii) C 点と G 点

理由:定常波の節では媒質の変位が 0 だが,その上下の媒質は節に近づく変位と節から離れる変位を繰り返すため,節において密度変化の振幅が最大となる.

【2】

《解答》

I (1) $t_1 = \dfrac{l}{c}$

(2) $x_1 = l - vt_1 = \dfrac{c-v}{c}l$

(3) 観測者から見て，反射波のみかけの速さは $c+v$ なので，

$$t_2 = \frac{x_1}{c+v} = \frac{l}{c}\cdot\frac{c-v}{c+v}$$

(4) $\tau_1 = t_1 + t_2 = \dfrac{2l}{c+v}$

(5) $t=T$ において，車と物体との距離は $l' = l - vT$ だから，反射音が観測される時刻は

$$\tau_2 = T + \frac{2l'}{c+v} = \frac{2l}{c+v} + \frac{c-v}{c+v}T$$

(6) $T' = \tau_2 - \tau_1 = \dfrac{c-v}{c+v}T$

(7) 振動数を用いて (6) を書き換えると，

$$\frac{1}{f'} = \frac{c-v}{c+v}\cdot\frac{1}{f} \qquad \therefore \quad f' = \frac{c+v}{c-v}f$$

(8) $\mathit{\Delta} f = f' - f = \dfrac{2v}{c-v}f$

(9) うなり

(10) 高さ

(11) v が c よりも十分小さいとき，(8) より，

$$\frac{\mathit{\Delta} f}{f} = \frac{2v}{c-v} \fallingdotseq \frac{2v}{c}$$

$\dfrac{\mathit{\Delta} f}{f} \geqq 0.3$ % のとき，

$$\frac{2v}{c} \geqq 0.3\ \% \qquad \therefore \quad \frac{v}{c} \geqq 0.15\ \%$$

II (1)(ア) 高

(イ) ドップラー効果

(2) 音源の，P に近づく速度成分は $v\cos\theta$ だから，

$$f = \frac{V}{V - v\cos\theta}f_0$$

(3) $v = \dfrac{V}{2}$，$\theta = 60^\circ$ のとき，(2) より

$$f_1 = \frac{V}{V - \dfrac{V}{2}\cos 60^\circ} f_0 = \frac{4}{3} f_0$$

(4) $v = \dfrac{V}{2}$，$\theta = 90^\circ$ のとき，(2) より

$$f_2 = \frac{V}{V - \dfrac{V}{2}\cos 90^\circ} f_0 = f_0$$

(5) 音が O → P → R と伝わるのにかかる時間は，

$$t_1 = \frac{l}{V} + \frac{\sqrt{l^2 + r^2}}{V}$$

また，音源が O から R まで移動するのにかかる時間は

$$t_2 = \frac{r}{v} = \frac{2r}{V}$$

これらが一致するので，

$$\frac{2r}{V} = \frac{l}{V} + \frac{\sqrt{l^2 + r^2}}{V} \qquad \therefore \quad r = \frac{4}{3} l$$

(6) $\angle \mathrm{ORP} = \phi$ とおくと，列車上の観測者が，P から離れる速度成分は $v\cos\phi$ なので，

$$f_3 = \frac{V - v\cos\phi}{V} f_2$$

ここで (5) をふまえると，

$$\cos\phi = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{4}{5}$$

以上より，

$$f_3 = \frac{V - \dfrac{V}{2} \cdot \dfrac{4}{5}}{V} f_2 = \frac{3}{5} f_2$$

2章－2　力学演習（2）

問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) B に関する力のつり合いより，

$$0 = mg - k(S - L) \qquad \therefore \quad S = L + \frac{mg}{k}$$

(イ) $ma = mg + T \qquad \cdots①$

(ウ) $mb = mg - T \qquad \cdots②$

(エ) ①＋②より，

$$m(a + b) = 2mg \qquad \therefore \quad \frac{1}{2}(a + b) = g$$

(オ) ②－①より，

$$m(b - a) = -2 \cdot kx \qquad \therefore \quad b - a = -\frac{2k}{m}x$$

(カ) (オ) より，相対運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ の単振動とわかり，周期を τ とすると，

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(キ) 初期条件をふまえると，

$$x(t) = \frac{mg}{k}\cos(\omega t)$$

$x = \dfrac{mg}{k}$ に初めて戻るのは 1 周期後なので，

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(ク) 円板ばね系の重心は時間 t_0 で $H - S$ だけ自由落下したので，

$$H - S = \frac{1}{2}g{t_0}^2 \qquad \therefore \quad H = S + \frac{1}{2}g{t_0}^2 = L + (1 + \pi^2)\frac{mg}{k}$$

(ケ) $x = \dfrac{mg}{k}$ に戻ったとき，重心から見た A の相対速度は 0 なので，

$$v_{\mathrm{A}} - gt_0 = 0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{A}} = 2\pi g\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

(コ) $\dfrac{1}{2}k(S - L)^2 + mgS + \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2 = mgL + \left(\dfrac{3}{2} + \pi^2\right)\dfrac{m^2g^2}{k}$

(サ) $mgh + \dfrac{1}{2}k(L - h)^2$

(シ) エネルギー保存より，

$$mgh + \frac{1}{2}k(L-h)^2 = mgL + \left(\frac{3}{2} + \pi^2\right)\frac{m^2g^2}{k}$$

これを解いて $h < L$ を考慮すると，

$$h = L - \left\{1 + \sqrt{2(2+\pi^2)}\right\}\frac{mg}{k}$$

【2】

《解答》

(1) 右向き正として，衝突直後の物体 A，B の速度をそれぞれ v_A，v_B とする．運動量の保存より，

$$\frac{2}{3}mv_\mathrm{A} + mv_\mathrm{B} = \frac{2}{3}mv_0 \quad \cdots ①$$

また，弾性衝突なので，

$$\frac{v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}}{v_0} = 1 \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\begin{cases} v_\mathrm{A} = -\dfrac{1}{5}v_0 & \cdots \quad \text{左向きに}\dfrac{1}{5}v_0 \\ v_\mathrm{B} = +\dfrac{4}{5}v_0 & \cdots \quad \text{右向きに}\dfrac{4}{5}v_0 \end{cases}$$

(2) 重心の速さを v_G とすると，

$$v_\mathrm{G} = \frac{m \cdot v_\mathrm{B} + 3m \cdot 0}{m + 3m} = \frac{1}{5}v_0$$

(3) B，C の質量の比は $1:3$ なので，

$$l_\mathrm{B} = \frac{3}{4}l_0,\ l_\mathrm{C} = \frac{1}{4}l_0$$

(4) 長さ l_B の部分のばね定数を k_B とする．ばね全体での縮みが x のとき，長さ l_B の部分の縮みは $\dfrac{l_\mathrm{B}}{l_0}x$ なので，

$$k_\mathrm{B} \cdot \frac{l_\mathrm{B}}{l_0}x = kx \qquad \therefore \quad k_\mathrm{B} = \frac{l_0}{l_\mathrm{B}}k$$

(5) 物体 C，D の振動周期をそれぞれ T_B，T_C とする．(3)，(4) より，$k_\mathrm{B} = \dfrac{4}{3}k$ となるので，

$$T_\mathrm{B} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_\mathrm{B}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$$

また，長さ l_C の部分のばね定数を k_C とすると，$k_\mathrm{C} = 4k$ なので，

$$T_\mathrm{C} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k_\mathrm{C}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$$

(6) 重心から見たとき，物体 B，C の初速度を $v_\mathrm{B}{}'$，$v_\mathrm{C}{}'$ とすると，

$$\begin{cases} v_\mathrm{B}{}' = \dfrac{4}{5}v_0 - v_\mathrm{G} = \dfrac{3}{5}v_0 \\ v_\mathrm{C}{}' = 0 - v_\mathrm{G} = -\dfrac{1}{5}v_0 \end{cases}$$

求める距離を l_min として，重心から見たエネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}k(l_0 - l_\mathrm{min})^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{5}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 3m\left(\frac{1}{5}v_0\right)^2 \qquad \therefore \quad l_\mathrm{min} = l_0 - \frac{2v_0}{5}\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

【3】

《解答》

ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさ $|\overrightarrow{a}|$ を単に a と書くことにする．

(1) $\overrightarrow{v_\mathrm{C}} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{v}$ なので，

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_\mathrm{C}} = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0} - \overrightarrow{v_\mathrm{C}} = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{v} \end{cases}$$

(2) 重心系における，衝突後の物体 1，2 の速度を $\overrightarrow{V_1}'$，$\overrightarrow{V_2}'$ として，運動量の保存より，

$$m_1\overrightarrow{V_1}' + m_2\overrightarrow{V_2}' = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2} \qquad \therefore \quad m_1\overrightarrow{V_1}' + m_2\overrightarrow{V_2}' = \overrightarrow{0} \quad \cdots ①$$

エネルギーの保存より，

$$\frac{m_1}{2}{V_1}'^2 + \frac{m_2}{2}{V_2}'^2 = \frac{m_1}{2}{V_1}^2 + \frac{m_2}{2}{V_2}^2 \quad \cdots ②$$

ここで① より ${V_2}' = \dfrac{m_1}{m_2}{V_1}'$，また (1) より $V_2 = \dfrac{m_1}{m_2}V_1$ と表し，② に代入すると

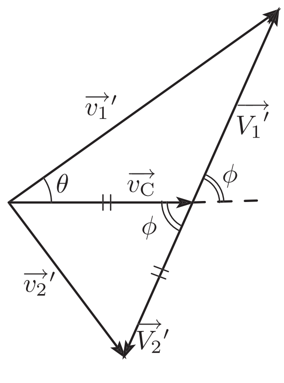
$$\frac{m_1}{2}{V_1}'^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{m_1}{2}{V_1}^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \qquad \therefore \quad {V_1}' = V_1$$

これと②より，

$$\frac{m_2}{2}{V_2}'^2 = \frac{m_2}{2}{V_2}^2 \qquad \therefore \quad {V_2}' = V_2$$

(3) 実験室系における，衝突後の物体 1，2 の速度を $\overrightarrow{v_1}'$，$\overrightarrow{v_2}'$ とすると，重心系における速度を用いて，

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1}' = \overrightarrow{v_\mathrm{C}} + \overrightarrow{V_1}' \\ \overrightarrow{v_2}' = \overrightarrow{v_\mathrm{C}} + \overrightarrow{V_2}' \end{cases}$$



よって，物体 1 の速度成分の関係式は，

$$\begin{cases} {v_1}'\sin\theta = {V_1}'\sin\phi \quad \cdots ③ \\ {v_1}'\cos\theta = v_\mathrm{C} + {V_1}'\cos\phi \quad \cdots ④ \end{cases}$$

これらより，

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{{V_1}'\sin\phi}{v_\mathrm{C} + {V_1}'\cos\phi} \qquad \therefore \quad \tan\theta = \frac{\dfrac{{V_1}'}{v_\mathrm{C}}\sin\phi}{1+\dfrac{{V_1}'}{v_\mathrm{C}}\cos\phi}$$

ここで (1)，(2) より，

$$\frac{{V_1}'}{v_\mathrm{C}} = \frac{V_1}{v_\mathrm{C}} = \frac{m_2}{m_1} \qquad \therefore \quad \frac{{V_1}'}{v_\mathrm{C}} = A \quad \cdots ⑤$$

以上より，

$$\tan\theta = \frac{A\sin\phi}{1 + A\cos\phi}$$

(4) 実験室系におけるエネルギーの保存より，

$$\frac{m_1}{2}{v_1}'^2 + E' = E \qquad \therefore \quad E' = E - \frac{m_1}{2}{v_1}'^2$$

ここで ③^2 + ④^2 より，

$$\begin{aligned}{v_1}'^2 &= ({V_1}'\sin\phi)^2 + (v_{\mathrm{C}} + {V_1}'\cos\phi)^2 \\ &= {v_{\mathrm{C}}}^2 + {V_1}'^2 + 2v_{\mathrm{C}}{V_1}'\cos\phi\end{aligned}$$

これらと⑤ より，

$$\begin{aligned}E' &= E - \frac{m_1}{2}{v_{\mathrm{C}}}^2(1 + A^2 + 2A\cos\phi) \\ &= E - \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}v\right)^2(1 + A^2 + 2A\cos\phi) \\ &= E - \frac{m_1}{2}v^2\left(\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right)^2(1 + A^2 + 2A\cos\phi) \\ &= E - E\cdot\frac{1 + A^2 + 2A\cos\phi}{(1 + A)^2} \\ &= \frac{2A(1 - \cos\phi)}{(1 + A)^2}E\end{aligned}$$

$\phi = \pi$ のとき E' は最大となり，

$${E_{\max}}' = \frac{2A(1 - \cos\pi)}{(1 + A)^2}E = \frac{4A}{(1 + A)^2}E$$

【4】

Ⅰ

《解答》

A 衝突直後の小球 A，小球 C の速度を右向き正として w_1，w_2 とすると，

$$\begin{cases} \text{運動量保存則} & Mw_1 + \alpha M w_2 = \alpha M w_0 \\ \text{はねかえり係数} & -\dfrac{w_1 - w_2}{0 - w_0} = e \end{cases}$$

以上より，

$$w_1 = \frac{\alpha(1+e)}{\alpha+1}w_0, \qquad w_2 = \frac{\alpha - e}{\alpha+1}w_0$$

(1)

$$|w_1| = \frac{\alpha(1+e)}{\alpha+1}w_0$$

(2) $w_2 > 0$ の条件は，$\alpha > e$

(3) (2) のとき $|w_2| = \dfrac{\alpha - e}{\alpha+1}w_0$

(4)

$$\begin{aligned}(\text{失われたエネルギー}) &= \frac{1}{2}\alpha M {w_0}^2 - \left(\frac{1}{2}M{w_1}^2 + \frac{1}{2}\alpha M {w_2}^2\right) \\ &= \frac{(1-e^2)\alpha M}{2(\alpha+1)}{w_0}^2\end{aligned}$$

B (5) 運動量保存則，

$$Mu + mv = Mu_0 \qquad ①$$

(6) ～(8) 求める速度成分を v' とすると，

$$v' = \frac{xu + (l-x)v}{l} \quad (\Leftarrow (6))$$

ここで ① より，$u = u_0 - \dfrac{m}{M}v$ だから，

$$v' = \frac{x\left(u_0 - \dfrac{m}{M}v\right) + (l-x)v}{l} = \frac{x}{l}u_0 + \frac{1}{l}\left\{l - \left(1 + \frac{m}{M}\right)x\right\}v$$

ゆえ，$l - \left(1 + \dfrac{m}{M}\right)x = 0, \qquad \therefore \quad x = \dfrac{M}{M+m}l \quad (\Leftarrow (7))$ のとき

$$v' = \frac{x}{l}u_0 = \frac{M}{M+m}u_0(\text{一定}) \quad (\Leftarrow (8))$$

となる．

C (9) 系が右向きに振れ切ったときの小球 A の速度を右向き正として u_1 とすると，このとき $v = u_1$ ゆえ ① は，

$$Mu_1 + mu_1 = Mu_0 \qquad \therefore \quad u_1 = \frac{M}{M+m}u_0$$

(10) エネルギー保存則より求める高さ h は,

$$\frac{M}{2}{u_1}^2+\frac{m}{2}{u_1}^2+Mgh=\frac{M}{2}{u_0}^2$$
$$\therefore \quad h=\frac{1}{Mg}\left(\frac{M}{2}{u_0}^2-\frac{M+m}{2}{u_1}^2\right)=\frac{{u_0}^2}{2g}\cdot\frac{m}{M+m}$$

(11) ～(13) はじめて系が鉛直となったときの，小球 A，小物体 B の速度を右向き正として，順に u_2，u_3 とすると，

$$\begin{cases}\text{運動量保存則} & : Mu_2+mu_3=Mu_0 \\ \text{エネルギー保存則} & : \dfrac{M}{2}{u_2}^2+\dfrac{m}{2}{u_3}^2=\dfrac{M}{2}{u_0}^2\end{cases}$$

$$\therefore \quad u_2=\frac{M-m}{M+m}u_0, \qquad u_3=\frac{2M}{M+m}u_0$$

(11) $u_2>0$ となる条件は，$M>m$

(12) (11) の条件のもと

$$|u_2|=\frac{M-m}{M+m}u_0$$

(13)

$$|u_3|=u_3=\frac{2M}{M+m}u_0$$

II

《ポイント》

運動量保存則の 2 成分と運動エネルギーの記述が必要な問題，相互作用を行う内界全体は容易に判断がつく．それらの各構成要素がどのように変位しようと，運動量の和は各成分ごと一定値をとる．そしてある成分に関しては，以下の瞬間における速度成分が瞬時に導ける．BD 衝突直後，AC 衝突直後の D+B の速度の D → B 向き成分をそれぞれ v_1，v_2，A の質量を m とおくと，運動量保存則の D → B 向き成分は，

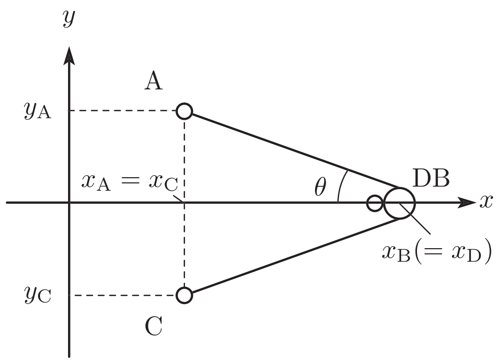
$$mv_0 = (m + \alpha m)v_1 = (3m + \alpha m)v_2 \qquad ①$$

《解答》

(1) 水平面上，D → B 向きに x 軸，C → A 向きに y 軸を設定し，原点を衝突前の B 点におく．① の未知量設定を踏襲すると，運動量保存則の x 成分は，

$$mv_0 = (m + \alpha m)v_1$$
$$v_1 = \frac{1}{1+\alpha}v_0$$

(2) 各物体の位置関係が右図のようになる場合，運動量保存則の x，y 成分は，図に設定した未知量を用いて次のように記述できる．



$$(\alpha m + m)\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = mv_0$$
$$m\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = 0$$

さらに，x 軸に対する運動の対称性より，未知量どうしに成り立つ関係は，

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$$

ここで，運動エネルギーに関する関係式を記述する．まず，D と B の衝突直後の，D+B の全運動エネルギー K は，

$$K = \frac{1}{2}(m + \alpha m){v_1}^2 = \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{2}m{v_0}^2$$

このエネルギーが，AC 衝突直前まで維持される (非弾性衝突より，衝突後はエネルギーは減少する)．AC 衝突直前の A，C の速度の x 成分を v_x，y 成分を $-v_y$，v_y，D+B の速度の x 成分を v' とすると，AC 衝突直前の A，B，C，D の全運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}(m + \alpha m){v'}^2 + \frac{1}{2}m\{{v_x}^2 + (-v_y)^2\} + \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2)(= K)$$

ここで，v' と v_x の関係について考える．糸の長さを r とするとき，図より，

$$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = r\cos\theta$$

よって，B に対する A の速度の x 成分は，上式両辺を時間で微分して，

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = -r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta$$

$\theta \to 0$ の極限，すなわち衝突直前で，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \therefore \quad \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} (= v') \end{aligned}$$

これより，衝突直前，A，B，C，D の速度の x 成分はある共通の値に落ちつく．さらに，① より，共通の速度成分は，衝突直後の各物体の速度の x 成分に等しく，

$$v' = v_2 = \frac{1}{3+\alpha}v_0$$

これより，求めるのは v_y のみとなる．全運動エネルギー保存の関係を整理して，v_y を求めると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m+\alpha m){v_2}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m({v_2}^2 + {v_y}^2) &= K \\ \therefore \quad v_y &= \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(3+\alpha)}}v_0 \end{aligned}$$

さて，A，C の衝突は完全非弾性衝突ゆえ，衝突直後の速度の y 成分は共通の値となる．それを v'' とおくと，運動量保存則の y 成分より，

$$(m+m)v'' = 0 \qquad \therefore \quad v'' = 0$$

以上をまとめると，衝突直前，直後の A，C の速度の x，y 成分は次のようになる．

	衝突直前	衝突直後
A	x 成分：$\dfrac{1}{3+\alpha}v_0$	x 成分：$\dfrac{1}{3+\alpha}v_0$
	y 成分：$-\dfrac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(3+\alpha)}}v_0$	y 成分：0
C	x 成分：$\dfrac{1}{3+\alpha}v_0$	x 成分：$\dfrac{1}{3+\alpha}v_0$
	y 成分：$\dfrac{1}{\sqrt{(1+\alpha)(3+\alpha)}}v_0$	y 成分：0

添削課題

《解答》

(1) 求める速度を V として，運動量保存より，

$$m \cdot 2v + 3m \cdot v = (m+3m)V \qquad \therefore \quad V = \frac{5}{4}v$$

(2) 運動量とエネルギーの保存より，

$$\begin{cases} mv_\mathrm{A} + 3mv_\mathrm{B} = m \cdot 2v + 3m \cdot v \\ \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 + \dfrac{1}{2} \cdot 3m \cdot {v_\mathrm{B}}^2 = \dfrac{1}{2}m \cdot (2v)^2 + \dfrac{1}{2} \cdot 3m \cdot v^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} v_\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}v \\ v_\mathrm{B} = \dfrac{3}{2}v \end{cases}$$

(3) (2) の速度を用いて，

$$e = -\frac{v_\mathrm{A} - v_\mathrm{B}}{2v - v} = 1$$

(4) 右向きを正として x 軸を設定し，A，B の座標を x_A，x_B とする．また，ばねの自然長を l とする．ばねの縮みは $l - (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})$ なので，A，B の運動方程式の x 成分は，

$$\begin{cases} m\ddot{x}_\mathrm{A} = -k\{l - (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})\} \\ 3m \cdot \ddot{x}_\mathrm{B} = k\{l - (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})\} \end{cases}$$

これらより，A に対する B の相対加速度は，

$$\ddot{x}_\mathrm{B} - \ddot{x}_\mathrm{A} = -\frac{4k}{3m}(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} - l)$$

これより，ばねの長さ $x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$ の変動は単振動とわかり，

$$\text{角振動数}\ \omega = 2\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

この単振動の一般解は，

$$x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} = l + A\sin(\omega t + \alpha)$$

B がばねに接触した時刻を $t = 0$ とすると，初期条件は，

$$\begin{cases} x_\mathrm{B}(0) - x_\mathrm{A}(0) = l \\ \dot{x}_\mathrm{B}(0) - \dot{x}_\mathrm{A}(0) = v - 2v \end{cases}$$

これを満たす解は，

$$x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} = l - \frac{v}{\omega}\sin(\omega t) \qquad \therefore \quad \dot{x}_\mathrm{B} - \dot{x}_\mathrm{A} = -v\cos(\omega t) \quad \cdots ①$$

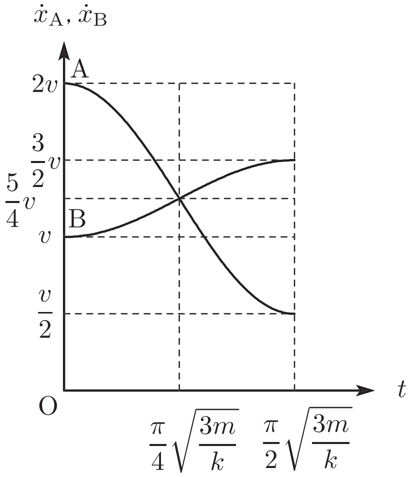
また，運動量保存より，

$$m\dot{x}_\mathrm{A} + 3m\dot{x}_\mathrm{B} = m \cdot 2v + 3m \cdot v \qquad \therefore \quad \dot{x}_\mathrm{A} + 3\dot{x}_\mathrm{B} = 5v \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\begin{cases} \dot{x}_{\mathrm{A}} = \dfrac{5}{4}v + \dfrac{3}{4}v\cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{3m}}t\right) \\ \dot{x}_{\mathrm{B}} = \dfrac{5}{4}v - \dfrac{1}{4}v\cos\left(2\sqrt{\dfrac{k}{3m}}t\right) \end{cases}$$

これらをグラフに表すと下図のようになる．



配点

100 点

(1)20 点，(2)20 点，(3)20 点，(4)40 点