3章－1　屈折と全反射

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 屈折の法則より，$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

(2) 真空中での波長を λ_0 とすると，

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\lambda_0}{n_1} \\ \lambda_2 = \dfrac{\lambda_0}{n_2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \lambda_2 = \frac{n_1}{n_2}\lambda_1$$

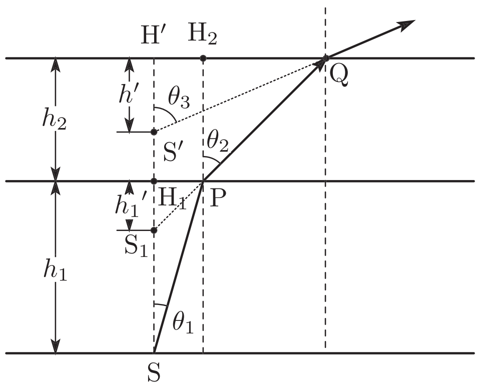
(3) (1) で $\theta_1 = \theta_C$ のとき，$\theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$n_1 \sin\theta_C = n_2 \qquad \therefore \quad \sin\theta_C = \frac{n_2}{n_1}$$

(4) 右図で，H_1P の長さに注目すると，

$$h_1{}' \tan\theta_2 = h_1 \tan\theta_1$$

$$\therefore \quad h_1{}' = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} h_1$$



(5) (1) と同様に，屈折の法則より，

$$\begin{cases} n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \\ n_2 \sin\theta_2 = n_3 \sin\theta_3 \end{cases}$$

(6) 円板の半径を最小にするためには，(5) で $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2}$ となるところまで円板で覆えばよいので，

$$\begin{cases} n_1 \sin\theta_{1C} = n_2 \sin\theta_{2C} \\ n_2 \sin\theta_{2C} = n_3 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \sin\theta_{1C} = \dfrac{n_3}{n_1} \\ \sin\theta_{2C} = \dfrac{n_3}{n_2} \end{cases}$$

これをふまえると，

$$\begin{aligned} R &= h_1 \tan\theta_{1C} + h_2 \tan\theta_{2C} \\ &= h_1 \frac{\sin\theta_{1C}}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{1C}}} + h_2 \frac{\sin\theta_{2C}}{\sqrt{1 - \sin^2\theta_{2C}}} \\ &= \frac{n_3}{\sqrt{{n_1}^2 - {n_3}^2}} h_1 + \frac{n_3}{\sqrt{{n_2}^2 - {n_3}^2}} h_2 \end{aligned}$$

(7) (4) の図で H′Q の長さに注目すると，

$$h' \tan\theta_3 = h_1 \tan\theta_1 + h_2 \tan\theta_2$$

与えられた近似式を用いると，

$$h' \sin\theta_3 \fallingdotseq h_1 \sin\theta_1 + h_2 \sin\theta_2 \qquad \therefore \quad h' = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_3}h_1 + \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}h_2$$

これと (5) より，

$$h' = \frac{n_3}{n_1}h_1 + \frac{n_3}{n_2}h_2$$

【2】

《解答》

(1) $\theta < \theta_0$ では点 O から屈折光が出ていくが，$\theta = \theta_0$ で全反射の臨界に達し，$\theta \geqq \theta_0$ では点 O で全反射するので，$\theta = \theta_0$ のときに輝点の強度が急に強くなった．$\theta = \theta_0$ のとき，屈折の法則より，

$$n_0 \sin\theta_0 = 1 \cdot \sin 90^\circ \qquad \therefore \quad \sin\theta_0 = \frac{1}{n_0}$$

(2) 面 AD での臨界角を θ_1 とすると，屈折の法則より，

$$n_0 \sin\theta_1 = n_1 \sin 90^\circ \qquad \therefore \quad \sin\theta_1 = \frac{n_1}{n_0}$$

$\theta \geqq \theta_1$ のときに面 AD で全反射が起きるので，そのための条件は，

$$\sin\theta \geqq \frac{n_1}{n_0} \quad \cdots ①$$

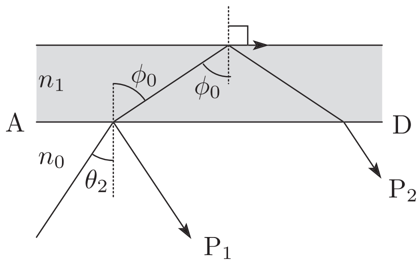


図 1

一方，図 1 で液体表面での臨界角を ϕ_0 とすると，屈折の法則より，

$$\begin{cases} n_0 \sin\theta_2 = n_1 \sin\phi_0 \\ n_1 \sin\phi_0 = 1 \cdot \sin 90^\circ \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \sin\phi_0 = \dfrac{1}{n_1} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{1}{n_0} \end{cases}$$

$\theta \geqq \theta_2$ のときに液体表面で全反射が起きるので，そのための条件は，

$$\sin\theta \geqq \frac{1}{n_0} \quad \cdots ②$$

θ を 0° から増加させていくと，初めに ② が満たされるようになって P_2 が明るくなり，その後 ① が満たされるようになって P_1 が明るくなる．

P_2 が明るくなる臨界では，

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_0 \qquad \therefore \quad \theta_2 = \theta_0$$

(3) $\theta = \theta_2$ としたとき，図 2 より，

$$\begin{aligned} x &= 2d\tan\phi_0 \\ &= 2d\frac{\sin\phi_0}{\cos\phi_0} \\ &= 2d\frac{\sin\phi_0}{\sqrt{1-\sin^2\phi_0}} \end{aligned}$$

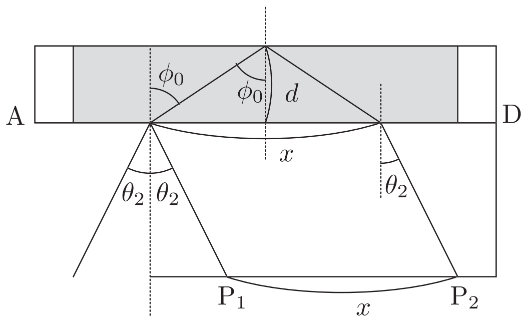


図 2

$\sin\phi_0 = \dfrac{1}{n_1}$ を代入すると，

$$x = 2d \cdot \frac{\dfrac{1}{n_1}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{{n_1}^2}}} = \frac{2d}{\sqrt{{n_1}^2 - 1}}$$

(4) $\theta \geqq \theta_1$ で ① が満たされ，$\dfrac{1}{n_0} = \sin\theta_0$ と表せるので，

$$\sin\theta_1 = n_1 \sin\theta_0 \qquad \therefore \quad n_1 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_0}$$

(5) 面 AD で全反射をする条件は，① の n_1 を n_2 で置き換えたものなので，

$$\sin\theta \geqq \frac{n_2}{n_0}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲に，これを満たす θ が存在しない場合に，面 AD での全反射が起きないので，

$$\frac{n_2}{n_0} \geqq 1 \qquad \therefore \quad n_2 \geqq n_0$$

【3】
《解答》

(ア) 屈折の法則より，$\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$

(イ) wt

(ウ) v_3t

(エ) v_2t

(オ) 図 2 より，

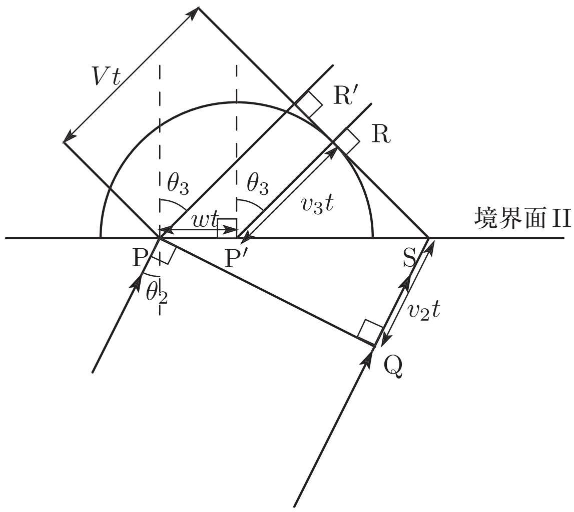
$$\begin{cases}\overline{\mathrm{PS}}\sin\theta_2=\overline{\mathrm{QS}} & \therefore\quad \overline{\mathrm{PS}}=\dfrac{v_2t}{\sin\theta_2}\\ \overline{\mathrm{P'S}}\sin\theta_3=\overline{\mathrm{P'R}} & \therefore\quad \overline{\mathrm{P'S}}=\dfrac{v_3t}{\sin\theta_3}\end{cases}$$

ここで，$\overline{\mathrm{PP'}}+\overline{\mathrm{P'S}}=\overline{\mathrm{PS}}$ なので，

$$wt+\frac{v_3t}{\sin\theta_3}=\frac{v_2t}{\sin\theta_2}\qquad\therefore\quad w=\frac{v_2}{\sin\theta_2}-\frac{v_3}{\sin\theta_3}$$

(カ) 屈折波の波面が進んでいく速さを V とおくと，境界面 II を通過する前後の波面は右図のようになる．$\overline{\mathrm{PR'}}=\overline{\mathrm{PP'}}\sin\theta_3+\overline{\mathrm{P'R}}$ が成立するので，

$$Vt=wt\sin\theta_3+v_3t$$
$$\therefore\quad V=v_3+w\sin\theta_3$$



(キ) 反射の法則より，$\theta_2=\theta_4$

(ク) (ア) より，

$$\sin\theta_1=\frac{v_1\sin\theta_2}{v_2}$$

$\theta_2=90^\circ$ のとき，これを満たす θ_1 が存在するためには，

$$\frac{v_1\sin 90^\circ}{v_2}<1\qquad\therefore\quad \frac{v_1}{v_2}<1$$

(ケ) 音速 v は温度 T の増加関数なので，①

(コ) (オ) より，

$$\sin\theta_2=\frac{v_2\sin\theta_3}{v_3+w\sin\theta_3}$$

$\theta_3=90^\circ$ のとき，これを満たす θ_2 が存在するためには，

$$\frac{v_2\sin 90^\circ}{v_3+w\sin 90^\circ}<1\qquad\therefore\quad \frac{v_2}{v_3+w}<1$$

(サ) $\theta_2 = \theta_\mathrm{B}$ のとき，(ア) より

$$\frac{\sin\theta_\mathrm{C}}{\sin\theta_\mathrm{B}} = \frac{v_1}{v_2} \qquad \therefore \quad \sin\theta_\mathrm{C} = \frac{v_1}{v_2}\sin\theta_\mathrm{B}$$

これと (2) より，

$$\sin\theta_\mathrm{C} = \frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_3+w} = \frac{v_1}{v_3+w}$$

(シ) θ_1 が増加すると θ_2 も増加するので，①

【4】

《解答》

(1) 屈折の法則より，

$$1 \cdot \sin\alpha = n_1 \sin(\alpha - \delta_1)$$

与えられた近似を用いて，

$$\sin\alpha \fallingdotseq n_1(\sin\alpha - \delta_1\cos\alpha)$$

$$\therefore \quad \delta_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1}\tan\alpha = \frac{N_1}{N_1 + 1}\tan\alpha$$

(2)

$$N_1 = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} N_2 \fallingdotseq 2.9 \times 10^{-4}$$

(3) (a)

$$n_1 \sin\beta = n_2 \sin(\beta - \delta_2)$$

与えられた近似を用いて，

$$n_1 \sin\beta \fallingdotseq n_2(\sin\beta - \delta_2\cos\beta)$$

$$\therefore \quad \delta_2 = \frac{n_2 - n_1}{n_2}\tan\beta = \frac{N_2 - N_1}{N_2 + 1}\tan\beta$$

(b) 題意より，

$$\tan\beta = -\frac{2\pi}{L}A_0 \sin 2\pi\left(\frac{x - vt}{L}\right)$$

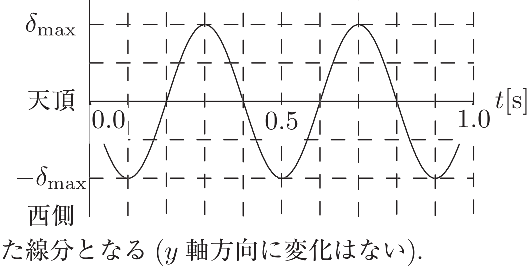
$x = 0$ での傾きは，v，L の値を代入し，

$$\tan\beta = \frac{\pi A_0}{2}\sin 5\pi t$$

δ は (星 S が天頂より) 東側に見える場合が正だから，$\delta = -\delta_2$．よって，

$$\delta = -\frac{N_2 - N_1}{N_2 + 1} \cdot \frac{\pi A_0}{2}\sin 5\pi t$$

グラフは以下．



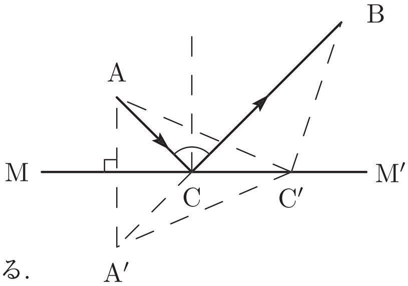
(c) x 方向 (東西方向) に伸びた線分となる (y 軸方向に変化はない)．

■自習

【1】

《解答》

(1) 光速が場所によらないので，経路の長さが最小の経路で所要時間が最小となる．ここで MM′ 上の任意の点を C′，MM′ に関して点 A と対称な点を A′ とすると，経路の長さは，



$$l = \overline{\mathrm{AC'}} + \overline{\mathrm{C'B}} = \overline{\mathrm{A'C'}} + \overline{\mathrm{C'B}}$$

この長さ l は点 C′ が線分 A′B 上にあるとき最小となる．
よって，反射の法則を満たす経路 A→C→B で経路の長さが最小となり，所要時間も最小である．

(2) (a) $t_0 = \dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{c} + \dfrac{\overline{\mathrm{CB}}}{c/n} = \dfrac{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2} + n\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}{c}$

(b) 与えられた近似式を用いて，

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{AC'}} &= \sqrt{(x-a_1)^2+{a_2}^2} \\
&\fallingdotseq \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2-2a_1x} \\
&= \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2} \times \sqrt{1+\frac{-2a_1x}{{a_1}^2+{a_2}^2}} \\
&\fallingdotseq \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2a_1x}{{a_1}^2+{a_2}^2}\right) \\
&= \sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2} + \frac{-a_1}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}x = \overline{\mathrm{AC}} + x\sin\theta \\
\overline{\mathrm{C'B}} &= \sqrt{(b_1-x)^2+{b_2}^2} \\
&\fallingdotseq \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2-2b_1x} \\
&= \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2} \times \sqrt{1+\frac{-2b_1x}{{b_1}^2+{b_2}^2}} \\
&\fallingdotseq \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2b_1x}{{b_1}^2+{b_2}^2}\right) \\
&= \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2} - \frac{b_1}{\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}x = \overline{\mathrm{CB}} - x\sin\phi
\end{aligned}$$

これらをふまえると，

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\overline{\mathrm{AC'}}}{c} + \frac{\overline{\mathrm{C'B}}}{c/n} \\
&= \frac{(\overline{\mathrm{AC}}+x\sin\theta)+n(\overline{\mathrm{CB}}-x\sin\phi)}{c} \\
&= \frac{\overline{\mathrm{AC}}+n\overline{\mathrm{CB}}}{c} + \frac{\sin\theta - n\sin\phi}{c}x
\end{aligned}$$

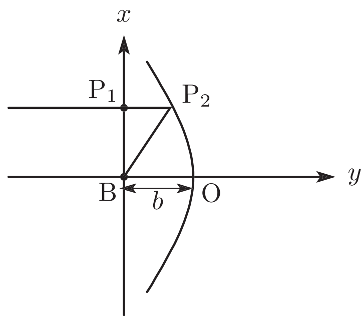
この t が (a) の t_0 と一致するので，

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}+n\overline{\mathrm{CB}}}{c}+\frac{\sin\theta-n\sin\phi}{c}x=\frac{\overline{\mathrm{AC}}+n\overline{\mathrm{CB}}}{c} \qquad \therefore \quad (\sin\theta-n\sin\phi)x=0$$

これが x によらずに成り立つためには，

$$\sin\theta-n\sin\phi=0 \qquad \therefore \quad \sin\theta=n\sin\phi$$

(3) B を原点として，右図のような直交座標系を設定する．フェルマーの原理より，右図の経路 $\mathrm{P_1}\to\mathrm{P_2}\to\mathrm{B}$，$\mathrm{B}\to\mathrm{O}\to\mathrm{B}$ について，



$$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}+\overline{\mathrm{P_2B}}}{c}=\frac{\overline{\mathrm{BO}}+\overline{\mathrm{OB}}}{c}$$

ここで，点 $\mathrm{P_2}$ の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$\begin{cases}\overline{\mathrm{P_1P_2}}=y\\ \overline{\mathrm{P_2B}}=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

以上より，

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=2b \qquad \therefore \quad y=b-\frac{x^2}{4b}$$

【2】

《解答》

(ア) 小さい

(イ) 1.00025

(ウ) 1.00017

(エ) 小さい

(オ) $\theta_0 = \theta_C$ のとき，$\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$n_0 \sin\theta_C = n_1 \qquad \therefore \quad \sin\theta_C = \frac{n_1}{n_0}$$

θ_0 が θ_C より大きいとき，

$$\sin\theta_0 > \frac{n_1}{n_0} \qquad \therefore \quad 1 < \frac{n_0}{n_1}\sin\theta_0 \quad \cdots\text{(b)}$$

(カ) n_0 と n_1 の比が 1 に近いとき，$\sin\theta_C$ は 1 に近いので，θ_C は $\dfrac{\pi}{2}$ に近く，θ_0 も $\dfrac{\pi}{2}$ に近い.

(キ) 問題に与えられた式より，$\tan\theta_0 = \dfrac{1}{t}$ なので，

$$\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{1-\sin^2\theta_0}} = \frac{1}{t} \qquad \therefore \quad \sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

これを (b) 式に代入すると，

$$1 < \frac{n_0}{n_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

(ク) (キ) に n_0，n_1 の値を代入して与えられた近似式 (c) を用いると，

$$1 < \frac{1.00025}{1.00017}\left(1-\frac{t^2}{2}\right) \qquad \therefore \quad t^2 < \frac{0.00016}{1.00025} \fallingdotseq 1.60\times10^{-4}$$

図 3 より，$\sqrt{1.60} \fallingdotseq 1.26$ と読み取ることができるので，$t < 1.3\times10^{-2}$ と分かる.

(ケ) $h = 1.0\,\mathrm{m}$ のとき，(ク) の条件より，

$$\frac{1.0\,\mathrm{m}}{L} < 1.26\times10^{-2} \qquad \therefore \quad L > 79.3\,\mathrm{m}$$

「逃げ水」が観測されるためには，L が $79\,\mathrm{m}$ 以上であればよい.

【3】

《解答》

(1) 屈折の法則より，

$$n\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta_{\mathrm{i}} \qquad \therefore \quad \cos\theta=\frac{1}{n}\sin\theta_{\mathrm{i}}$$

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=a\tan\theta$ なので，到達点の x 座標は

$$a\tan\theta=a\times\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}=a\sqrt{\left(\frac{n}{\sin\theta_{\mathrm{i}}}\right)^2-1}$$

(3) 側面 B(または C) での屈折角が $\pi/2$ になるとき屈折の法則より，

$$n\sin\theta_{\mathrm{C}}=1\times\sin\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \sin\theta_{\mathrm{C}}=\frac{1}{n}$$

全反射となるためには $\theta \geqq \theta_{\mathrm{C}}$ すなわち $\sin\theta \geqq \dfrac{1}{n}$ であればよいので，

$$n\sin\theta \geqq 1 \qquad \therefore \quad \sqrt{n^2-(n\cos\theta)^2} \geqq 1$$

これと (1) より，

$$\sqrt{n^2-\sin^2\theta_{\mathrm{i}}} \geqq 1 \qquad \therefore \quad \sin\theta_{\mathrm{i}} \leqq \sqrt{n^2-1}$$

$0<\theta_{\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある任意の θ_{i} でこれを満たすためには，

$$\sqrt{n^2-1} \geqq 1 \qquad \therefore \quad n \geqq \sqrt{2}$$

(4) $\lambda=5.30\times10^{-7}\,\mathrm{m}$ の光では，$n \fallingdotseq 1.52$ なので，

$$\begin{cases} \text{波長}\lambda'=\dfrac{\lambda}{n} \fallingdotseq 3.49\times10^{-7}\,\mathrm{m} \\ \text{光速 } v'=\dfrac{v}{n} \fallingdotseq 1.97\times10^{8}\,\mathrm{m/s} \end{cases}$$

3章－2　力学演習（3）

問題

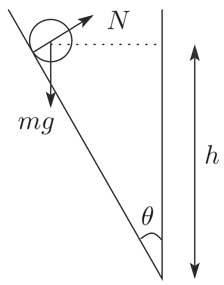
■演習

【1】

《解答》

(1) エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh \qquad \therefore \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$



(2) 右図より，運動方程式の向心成分と鉛直成分は，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_1}^2}{h\tan\theta} = N\cos\theta \\ m\cdot 0 = N\sin\theta - mg \end{cases}$$

これらより，N を消去すると，

$$m\frac{{v_1}^2}{h\tan\theta} = \frac{mg}{\sin\theta}\cdot\cos\theta \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{gh}$$

(3) エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_H}^2 + mg\cdot\frac{5}{4}h = \frac{1}{2}m\cdot 2gh + mgh \qquad \therefore \quad v_H = \sqrt{\frac{3}{2}gh}$$

ここで (2) より，$H = \dfrac{5}{4}h$ の高さを保って円運動をするときの速さは，

$$v_1{}' = \sqrt{gH} = \sqrt{\frac{5}{4}gh} \qquad \therefore \quad v_H > v_1{}'$$

よって，小球がふちをかすめて再び下りていくことはなく，必ず容器を飛び出す．

(4) z 軸のまわりの面積速度が一定より，

$$\frac{1}{2}h_\mathrm{m}\tan\theta\cdot v_\mathrm{m} = \frac{1}{2}h\tan\theta\cdot\sqrt{\frac{gh}{3}} \qquad \therefore \quad h_\mathrm{m}v_\mathrm{m} = h\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad \cdots(*)$$

またエネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{m}}^2 + mgh_\mathrm{m} = \frac{1}{2}m\cdot\frac{gh}{3} + mgh$$

これらより v_m を消去して整理すると，

$$(h_\mathrm{m} - h)(2h_\mathrm{m} - h)(3h_\mathrm{m} + h) = 0 \qquad \therefore \quad h_\mathrm{m} = \frac{1}{2}h$$

h_m を $(*)$ に代入すると，

$$\frac{h}{2}\cdot v_\mathrm{m} = h\sqrt{\frac{gh}{3}} \qquad \therefore \quad v_\mathrm{m} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

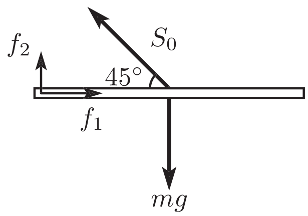
【2】

《解答》

(1) 力のモーメントのつりあいより，

$$0 = L \cdot S_0 \sin 45^\circ - L \cdot mg \qquad \therefore \quad S_0 = \sqrt{2}mg$$

力のつりあいより，



$$\begin{cases} 0 = f_1 - S_0 \cos 45^\circ \\ 0 = f_2 + S_0 \sin 45^\circ - mg \end{cases}$$

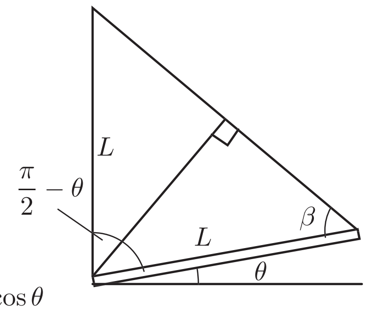
これらより，抗力の大きさは

$$F = \sqrt{{f_1}^2 + {f_2}^2} = mg$$

(2) 力のつりあいより，

$$0 = S_0 - Mg \qquad \therefore \quad M = \sqrt{2}m$$

(3) ① 右図より，



$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \beta = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$$

② $F_1 = S \sin\beta = S \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

③ $F_2 = mg\cos\theta$

④ 力のモーメントのつりあいより，

$$0 = L \cdot F_1 - L \cdot F_2 \qquad \therefore \quad S \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = mg\cos\theta$$

ここで，$\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ と変形し，2 倍角の公式を用いると，

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

これらより，

$$S \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = mg \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad f(\theta) = \frac{S}{S_0} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

(4) (a) $<$ (b) $<$ (c) $>$ (d) $>$

(5) $\theta > 0$ のとき，S_0 はつりあいを保つ S よりも大きいので，さらに上に傾く．$\theta < 0$ のとき，S_0 はつりあいを保つ S よりも小さいので，さらに下に傾く．

【3】

《解答》

(1) (a) すべり出す直前に A が底面から受ける摩擦力の大きさは $\mu_0(m+M)g$ と表せる．A と B が及ぼし合う摩擦力の大きさを F とすると，円板から見た力のつりあいより，

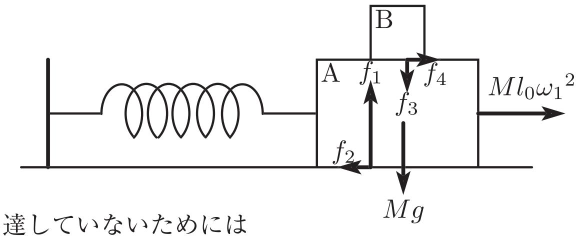
$$\begin{cases} 0 = Ml_0{\omega_1}^2 - \mu_0(m+M)g + F \\ 0 = ml_0{\omega_1}^2 - F \end{cases}$$

これらより，

$$0 = (m+M)l_0{\omega_1}^2 - \mu_0(m+M)g \qquad \therefore \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\mu_0 g}{l_0}}$$

(b) A に働く力は右図のようになる．ここでそれぞれの力の大きさは，

$$\begin{cases} f_1 = (m+M)g \\ f_2 = \mu_0(m+M)g \\ f_3 = mg \\ f_4 = ml_0{\omega_1}^2 \end{cases}$$



(c) (a) のとき，B がまだすべる限界に達していないためには

$$ml_0{\omega_1}^2 < \mu \cdot mg$$

ω_1 を代入すると，

$$ml_0 \cdot \frac{\mu_0 g}{l_0} < \mu mg \qquad \therefore \quad \mu_0 < \mu$$

(2) (a) B がすべり出す直前のばねの伸びを l_2 として，円板からみた力のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = m(l_0+l_2){\omega_2}^2 - \mu mg & \cdots ① \\ 0 = M(l_0+l_2){\omega_2}^2 + \mu mg - kl_2 \end{cases}$$

これらより，ω_2 を消去することにより，

$$l_2 = \frac{\mu(m+M)g}{k}$$

(b) ① より，

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu g}{l_0+l_2}} = \sqrt{\frac{\mu kg}{kl_0 + \mu(m+M)g}}$$

(c) ばねの長さが x のとき，A の運動方程式は，

$$M\ddot{x} = -k(x-l_0) + Mx{\omega_2}^2 \qquad \cdots ②$$

振動中心では $\ddot{x} = 0$ なので，

$$0 = -k(x_0-l_0) + Mx_0{\omega_2}^2 \qquad \therefore \quad x_0 = \frac{k}{k - M{\omega_2}^2}l_0$$

(d) ② より，

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -(k - M{\omega_2}^2)x + kl_0 \\
&= -(k - M{\omega_2}^2)x + (k - M{\omega_2}^2)x_0 \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k - M{\omega_2}^2}{M}(x - x_0)
\end{aligned}
$$

A の運動は単振動と分かり，

$$
(\text{角振動数}) = \sqrt{\frac{k - M{\omega_2}^2}{M}} \qquad \therefore \quad (\text{周期}) = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k - M{\omega_2}^2}}
$$

【4】

《解答》

(1) 電車の加速度を a とすると，おもりの運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx - ma \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{ma}{k}\right)$$

これより，運動は単振動とわかり，

$$\text{周期} \ \cdots \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad \text{振動の中心} \ \cdots \ x = -\frac{ma}{k}$$

(a) 振動の中心が $x = x_0$ のとき，

$$x_0 = -\frac{ma}{k} \qquad \therefore \quad a = -\frac{kx_0}{m}$$

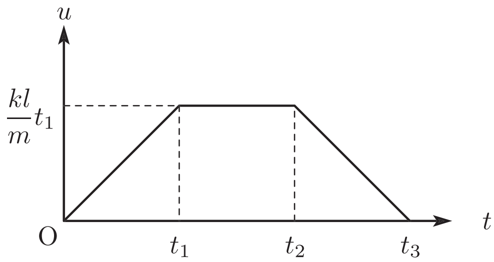
(b) 図 2 より，振動の中心は，

$$\begin{cases} t = 0 \sim t_1 & \cdots \quad x_0 = -l \\ t = t_1 \sim t_2 & \cdots \quad x_0 = 0 \\ t = t_2 \sim t_3 & \cdots \quad x_0 = l \end{cases}$$

これらと，(1)(a) より，

$$\begin{cases} t = 0 \sim t_1 & \cdots \quad a = \dfrac{kl}{m} \\ t = t_1 \sim t_2 & \cdots \quad a = 0 \\ t = t_2 \sim t_3 & \cdots \quad a = -\dfrac{kl}{m} \end{cases}$$

また，初速度は 0 なので下図を得る．



ここで図 2 より，それぞれの加速度で運動する時間は等しく，

$$t_1 - 0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \frac{5}{2}T$$

これをふまえて，$u - t$ グラフと t 軸の間の面積を求めると，

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}T + \frac{5}{2}T \times 3\right) \cdot \frac{kl}{m}t_1 = 50\pi^2 l$$

(c) 地面から見た，加速度計のエネルギー変化より，

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{kl}{m}t_1\right)^2 + \frac{1}{2}k(2l)^2 = \left\{1 + \frac{25}{4}\pi^2\left(1 + \frac{M}{m}\right)\right\}2kl^2$$

(d) 床と加速度計の間の静止摩擦力の x 成分を f とすると，枠の運動方程式の水平成分は，

$$0 = +kx + f - Ma \qquad \therefore \quad f = Ma - kx$$

$t = 0$ から t_3 の間では $-2l \leqq x \leqq 2l$ なので，$|f|_{\max} = M \cdot \dfrac{kl}{m} + k \cdot 2l$ となる．また，床から受ける垂直抗力は $N = (M + m)g$ と表せる．すべり出さないための条件 $|f|_{\max} \leqq \mu N$ より

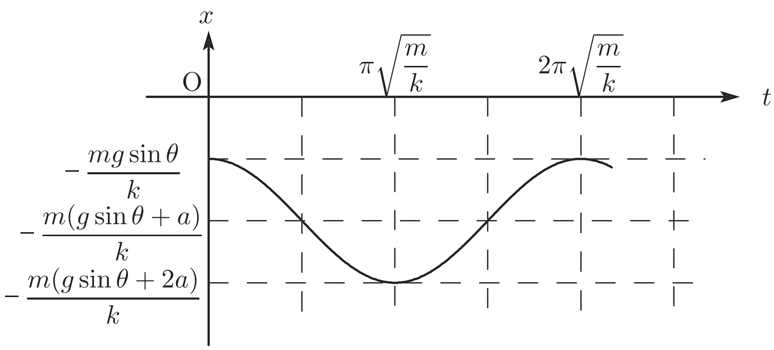
$$M \cdot \frac{kl}{m} + 2kl \leqq \mu(M + m)g \qquad \therefore \quad \mu \geqq \frac{kl}{(M+m)g}\left(2 + \frac{M}{m}\right)$$

(2) (a) 運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx - mg\sin\theta - ma \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left\{x + \frac{m(g\sin\theta + a)}{k}\right\}$$

これと初期条件 $x(0) = -\dfrac{mg\sin\theta}{k}$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$x(t) = -\frac{m(g\sin\theta + a)}{k} + \frac{ma}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$



(b) $a = 0$ の場合の振動中心は $x = -\dfrac{mg\sin\theta}{k}$．この位置で一瞬静止したときに $a = 0$ となれば，そのまま静止を続けるので，

$$t_4 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \times n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(3) 電車の天井からつるした振り子の微小振動の周期 T' を測定する．以下では，レールに対する電車の加速度を a とする．電車内の観測者からみると，みかけの重力加速度が $\sqrt{g^2 + a^2}$ となるので，長さ l の振り子の振動周期は

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \qquad \therefore \quad |a| = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^4 l^2 - g^2}$$

また，a の向きは振動中心がずれた向きと逆向きである．

添削課題

《解答》

(1) 万有引力の法則より，

$$f = -G\frac{mM}{x^2}$$

また，位置エネルギーは無限遠点を基準として，

$$U = -G\frac{mM}{x}$$

(2) エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + \left(-G\frac{mM}{R}\right) = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \left(-G\frac{mM}{3R}\right) \qquad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$$

(3) 半径 $|x|$ の球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi|x|^3$ なので，

$$M' = \frac{\frac{4}{3}\pi|x|^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}M = \frac{|x|^3}{R^3}M$$

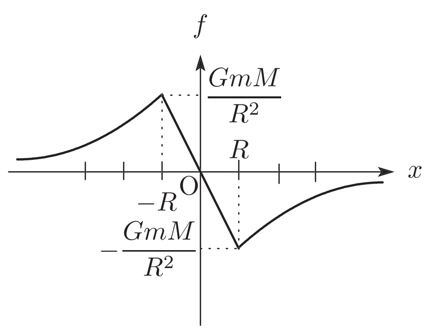
$0 \leqq x < R$ のときは，

$$f = -G\frac{mM'}{|x|^2} = -\frac{GmM}{R^3}|x| = -\frac{GmM}{R^3}x$$

$-R < x < 0$ のときは，

$$f = G\frac{mM'}{|x|^2} = \frac{GmM}{R^3}|x| = -\frac{GmM}{R^3}x$$

(4)



(5) 物体 A は $-R \leqq x \leqq R$ の範囲で運動し，この範囲では物体 A に働く力が $x = 0$ からの距離に比例する復元力となるため．

(6) 物体 A の $-R \leqq x \leqq R$ における運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -\frac{GmM}{R^3}x \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

上端から中心までの時間が t_1 なので，

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

また，初期条件を満たす解を求めると，

$$x(t) = R\cos(\omega t) \qquad \therefore \quad \dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$$

$x = 0$ における速さが v_1 なので，

$$v_1 = R\omega = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

配点

100 点

(1),(2),(4),(5) 各 15 点，(3),(6) 各 20 点

４章－１　光波の干渉（１）

問題

■演習

【１】

《解答》

(1)　P に届く 2 つの光の経路差 $\overline{\mathrm{S_2P}} - \overline{\mathrm{S_1P}}$ を Δl とおき，与えられた関係式を用いると，

$$(-\Delta l)\cdot 2R \fallingdotseq \left\{R^2+\left(x-\frac{d}{2}\right)^2\right\}-\left\{R^2+\left(x+\frac{d}{2}\right)^2\right\} \qquad \therefore \quad \Delta l=\frac{xd}{R}$$

明線となる条件は，

$$\frac{xd}{R}=\frac{\lambda}{2}\times 2m \qquad \therefore \quad x=\frac{R\lambda}{d}\cdot m$$

暗線となる条件は，

$$\frac{xd}{R}=\frac{\lambda}{2}\times(2m+1) \qquad \therefore \quad x=\frac{R\lambda}{d}\cdot\left(m+\frac{1}{2}\right)$$

(2)　光源が大きさをもつと，スクリーン C 上で位置を指定したとき，光が出てからこの位置に届くまでの経路差は定数とならず，光源のどの点から出たのかによって異なる．このため，スクリーン C 上の各点には様々な位相差の光が同時に届き，明瞭な干渉縞が見られなくなる．

(3)　スクリーン B に届くまでの経路差 $\overline{\mathrm{S_1S_0}} - \overline{\mathrm{S_2S_0}}$ を $\Delta l'$ とおくと，(1) と同様に，

$$\Delta l'\cdot 2L \fallingdotseq \left\{L^2+\left(h+\frac{d}{2}\right)^2\right\}-\left\{L^2+\left(h-\frac{d}{2}\right)^2\right\} \qquad \therefore \quad \Delta l'=\frac{hd}{L}$$

スクリーン A から C に届くまでの経路差は $\Delta l - \Delta l'$ なので，明線となる条件は，

$$\frac{xd}{R}-\frac{hd}{L}=\frac{\lambda}{2}\times 2m \qquad \therefore \quad x=\frac{Rh}{L}+\frac{R\lambda}{d}\cdot m$$

(4)　図 2 の (a) と (b) で共通の明線は，(3) において波長によらない $m=0$ の明線である．図 2(a) で $x=x_0$ の明線は，共通の明線から，左 ($-x$ 方向) へ 2 つ目の明線なので，$m=-2$ の明線とわかり，

$$x_0=\frac{Rh}{L}+\frac{R\lambda}{d}\times(-2) \qquad \therefore \quad h=\frac{L}{R}x_0+\frac{2L\lambda}{d}$$

(5)　スリット ${\mathrm{S_0}}'$ を通った光による明線位置は，(3) で h を $-h$ に置きかえて得られ，

$$x'=-\frac{Rh}{L}+\frac{R\lambda}{d}\cdot m'$$

$\mathrm{S_0}$ を通った光による干渉縞と ${\mathrm{S_0}}'$ を通った光による干渉縞で，明線どうしが重なるとき，暗線どうしも重なり，明暗が最も明瞭になる．よって，$x=x'$ とおいて，

$$\frac{Rh}{L}+\frac{R\lambda}{d}\cdot m=-\frac{Rh}{L}+\frac{R\lambda}{d}\cdot m' \qquad \therefore \quad h=(m'-m)\frac{L\lambda}{2d}$$

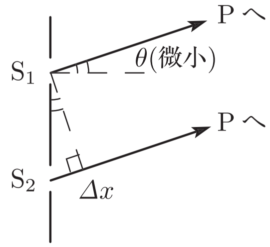
$m' - m$ は整数だから，これを n とおくと，

$$h = \frac{L\lambda}{2d} \cdot n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

【2】

《解答》

(1) 右図で，θ が微小なので，



$$\Delta x \fallingdotseq d\sin\theta \fallingdotseq d\times\theta$$

明線の条件は，

$$d\times\theta = n\lambda \qquad \therefore\quad \theta = \frac{n\lambda}{d}$$

(2) $\phi(t) = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x_0}{\lambda}\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned} U_{1+2}(\mathrm{P},\ t) &= A\sin\left\{\phi(t) + \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\Delta x}{2}\right\} + A\sin\left\{\phi(t) - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\Delta x}{2}\right\} \\ &= 2A\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)\sin\phi(t) \end{aligned}$$

$$\therefore\qquad B = 2A\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)$$

(3) 明線位置では振幅が最大なので，$|B| = 2A$

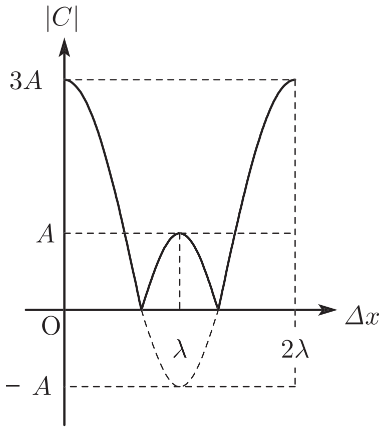
暗線位置では振幅が最小なので，$|B| = 0$

(4) $U_0(\mathrm{P},\ t) = A\sin\phi(t)$ と表すことができ，これを $U_{1+2}(\mathrm{P},\ t)$ と合成すると，

$$\begin{aligned} U_{0+1+2}(\mathrm{P},\ t) &= U_0(\mathrm{P},\ t) + U_{1+2}(\mathrm{P},\ t) \\ &= A\left\{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)\right\}\sin\phi(t) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad C = A\left\{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right)\right\}$$

(5) 経路差 Δx と振幅 $|C|$ の関係は右図のようになるので，



$$\begin{cases} \text{強い明線位置}\cdots |C| = 3A \\ \text{弱い明線位置}\cdots |C| = A \end{cases}$$

明るさは振幅の 2 乗に比例するので，強い方の明るさは弱い方の 9 倍．また，暗線の位置では $|C| = 0$ なので，

$$1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\Delta x\right) = 0 \qquad \therefore\quad \Delta x = \frac{2}{3}\lambda,\ \frac{4}{3}\lambda$$

(6) (a) 2π (b) 2λ (c) S_1 (d) S_2

(e) S_0 (f) π (g) 振幅

【3】

《解答》

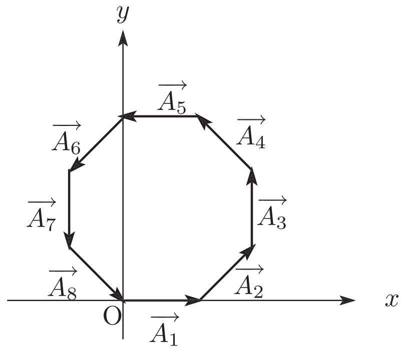
(1) $d\sin\theta$

(2) $\phi = 2\pi \cdot \dfrac{d\sin\theta}{\lambda} = \dfrac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}$

(3) 2π

(4) nA

(5) $n=8$ の場合,



$$\begin{aligned}\phi &= 2\pi\left(m+\frac{1}{8}\right)\\ &= 2\pi m + \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となるから，ベクトルの図は右図のような正八角形になる.

(6) 0

(7) 角 θ の方向に明線ができる条件は，$\phi = 2\pi m$ より，

$$\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} = 2\pi m \qquad \therefore \quad nd\sin\theta = nm\lambda$$

(8) 角 θ の方向に暗線ができる条件は，$\phi = 2\pi\left(m+\dfrac{1}{n}\right)$ より，

$$\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} = 2\pi\left(m+\frac{1}{n}\right) \qquad \therefore \quad nd\sin\theta = (nm+1)\lambda$$

(9) (8) より，波長 λ の単色光の暗線の位置は，

$$\sin\theta = \frac{(nm+1)\lambda}{nd}$$

また，(7) より，波長 $\lambda + \mathit{\Delta}\lambda$ の単色光の明線の位置は，

$$\sin\theta = \frac{m(\lambda+\mathit{\Delta}\lambda)}{d}$$

これらが一致すれば，波長 $\lambda + \mathit{\Delta}\lambda$ の単色光の m 次の明線が区別できるので，

$$\frac{(nm+1)\lambda}{nd} = \frac{m(\lambda+\mathit{\Delta}\lambda)}{d} \qquad \therefore \quad \frac{\mathit{\Delta}\lambda}{\lambda} = \frac{1}{nm}$$

(10) (9) より，回折格子の分解能は $\dfrac{\lambda}{\mathit{\Delta}\lambda} = nm$ となり，すじの本数 n が多いほど大きくなる.

【4】

《解答》

(1) スリット間隔を $2d$, スクリーン上に点 P を原点とする x 座標を設定して明線の座標を x_m とすると，干渉条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{2d}{l}x_m = 2\pi m \qquad \therefore \quad x_m = \frac{l\lambda}{2d}m$$

$$\therefore \quad \text{間隔}\mathit{\Delta} x = \frac{l\lambda}{2d}$$

よって間隔は波長に比例するから，波長の長い光の方が間隔は広い．($\Rightarrow$ b)

(2) 間隔は $2d$ に反比例する．($\Rightarrow$ b)

(3) 液体の屈折率を n とすると波長が $\dfrac{1}{n}(<1)$ 倍となるので，間隔は小さくなる．($\Rightarrow$ b)

(4) $\mathrm{S_1}$ と $\mathrm{S_{-1}}$ からの回折光は必ず強めあうから，$\mathrm{S_1}$ と $\mathrm{S_0}$ からの回折光の干渉を考えればよい．

$$\mathrm{S_1P} - \mathrm{S_0P} = \sqrt{l^2 + {d_1}^2} - l \fallingdotseq \frac{{d_1}^2}{2l}$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{{d_1}^2}{2l} = 2\pi \qquad \therefore \quad d_1 = \sqrt{2\lambda l}$$

(5) $\mathrm{S_2}$ と $\mathrm{S_0}$ からの回折光の位相差が $2\pi\times 2$(以下順に 2π ずれ) となればすべてのスリットからの回折光は強めあうことになるから，

$$d_m = \sqrt{2m\lambda l}, \qquad d_{m-1} = \sqrt{2(m-1)\lambda l}$$

$$\frac{d_m}{d_{m-1}} = \sqrt{\frac{m}{m-1}}$$

(6) ある整数を m' として，スリット間隔を表す d_m は，

$$d_m = \sqrt{2m\cdot m'\lambda l} \qquad \therefore \quad l = \frac{{d_m}^2}{2m\cdot m'\lambda}$$

d_m は変化させないので，l が最大となるのは $m'=1$ のとき．つまり $l_1 = 1\times l$.

(7) 前問より $m'=2 \qquad \therefore \quad \dfrac{l_1}{l_2} = 2.$

■自習

【1】

《解答》

(1) (ア) 回折

(イ) 干渉

(ウ) 位相

(エ) $m\lambda$

(2) (オ) π

(カ) 位相差 2π が 1 波長の経路差に相当するので，位相のずれ π は $\frac{1}{2}$ 波長分に相当する．

(キ) 2 つの経路の長さが等しいとき，2 つの光波の位相は等しいので，強め合う．

(3) (ク) $v_{\mathrm{F}} = \dfrac{c}{n}$

(ケ) $t_{\mathrm{F}} = \dfrac{a}{v_{\mathrm{F}}} = \dfrac{na}{c}$

(コ) $ct_{\mathrm{F}} = na$

(サ) 物質 F を通過する時間 t_{F} の間に生じる光学距離の差なので，

$$\varDelta L = na - a = (n-1)a$$

(シ) 点 P で重なる 2 つの光波が，強め合うための条件は，

$$(n-1)a = m\lambda \qquad \therefore \quad a = \frac{m\lambda}{n-1}$$

(4) (ス) 電圧 V_1 のときは強め合っているので，

$$\varDelta L_1 = m_1\lambda$$

また，与えられた関係式 $n = n_0 + kV$ で V が増加すると n も増加するので，$\varDelta L$ は大きくなる．電圧 V_2 のときは弱め合っているので，

$$\varDelta L_2 = m_1\lambda + \frac{\lambda}{2}$$

これらより，

$$\varDelta L_2 - \varDelta L_1 = \frac{\lambda}{2}$$

(セ) 光学距離の差の変化分は，

$$\begin{aligned}\varDelta L_2 - \varDelta L_1 =& (n_0 + kV_2 - 1)a - (n_0 + kV_1 - 1)a \\ =& ak(V_2 - V_1)\end{aligned}$$

これと (ス) より，

$$ak(V_2 - V_1) = \frac{\lambda}{2} \qquad \therefore \quad V_2 - V_1 = \frac{\lambda}{2ak}$$

【2】

《解答》

(a) $d\sin\theta$

(b) λ

(c) $n=1$ で強め合う方向では,

$$d\sin\theta=\lambda \qquad \therefore\quad d=\frac{\lambda}{\sin\theta}$$

図 2 より,

$$\tan\theta=\frac{6.5\times10^{-2}}{0.5}=0.13 \qquad \therefore\quad \sin\theta\fallingdotseq 0.13$$

これらより,

$$d=\frac{6.5\times10^{-7}}{0.13}=5.0\times10^{-6}\mathrm{m}$$

(d) $n=0$ で強め合う方向では,

$$d\sin\theta=0\times\lambda \qquad \therefore\quad \theta=0(\lambda\text{によらない})$$

また, $n\neq 0$ で強め合う方向では,

$$d\sin\theta=n\lambda \qquad \therefore\quad \sin\theta=\frac{n\lambda}{d}$$

λ が小さくなると, $n\neq 0$ の明点は $\theta=0$ に近い側にずれるので, 図 3② のようになる.

(e) $d\sin\theta_1=\lambda_1$

(f) $d\sin\theta_2=\lambda_2$

(g) $r(\theta_2-\theta_1)$

(h) 式 (イ)〜(エ) より

$$\begin{aligned} x_2-x_1 &\fallingdotseq r(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\\ &=r\left(\frac{\lambda_2}{d}-\frac{\lambda_1}{d}\right)=\frac{r}{d}(\lambda_2-\lambda_1)\end{aligned}$$

(i) $x_2-x_1\geqq 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ となるとき,

$$\frac{r}{d}(\lambda_2-\lambda_1)\geqq 1.0\times10^{-3} \qquad \therefore\quad r\geqq\frac{1.0\times10^{-3}\cdot5.0\times10^{-6}}{0.021\times10^{-7}}\fallingdotseq 2.4\,\mathrm{m}$$

これを満たす最小の半径は, $2.5\,\mathrm{m}$.

(j) $n=2$ で強め合う方向については,

$$\begin{aligned} x_2-x_1 &\fallingdotseq r(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\\ &=r\left(\frac{2\lambda_2}{d}-\frac{2\lambda_1}{d}\right)=\frac{2r}{d}(\lambda_2-\lambda_1)\end{aligned}$$

$x_2-x_1\geqq 1.0\times10^{-3}\,\mathrm{m}$ となるとき,

$$\frac{2r}{d}(\lambda_2-\lambda_1)\geqq 1.0\times10^{-3} \qquad \therefore\quad r\geqq\frac{1.0\times10^{-3}\cdot5.0\times10^{-6}}{2\cdot0.021\times10^{-7}}\fallingdotseq 1.2\,\mathrm{m}$$

与えられた 5 種類の中でこれを満たす最小の半径は, $1.5\,\mathrm{m}$ と分かる.

【3】

《解答》

(a) λ

(b) 強め合う条件は，

$$d\sin\phi - d\sin\theta = m\lambda \qquad \therefore \quad \sin\phi = \sin\theta + \frac{m\lambda}{d}$$

(c) $\sin\phi > -1$ より，

$$\sin\theta + \frac{m\lambda}{d} > -1 \qquad \therefore \quad m > -\frac{d}{\lambda}(1+\sin\theta)$$

(d) $\sin\phi < 1$ より，

$$\sin\theta + \frac{m\lambda}{d} < 1 \qquad \therefore \quad m < \frac{d}{\lambda}(1-\sin\theta)$$

(e) 全反射の臨界となるとき，屈折の法則より，

$$n_1\sin\theta_0 = n_2\sin\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \sin\theta_0 = \frac{n_2}{n_1}$$

屈折光が出ていくためには，$\theta < \theta_0$ すなわち $\sin\theta < \dfrac{n_2}{n_1}$ であればよい．

(f) 真空中の波長に換算すると，

$$n_2\lambda' = n_1\lambda \qquad \therefore \quad \lambda' = \frac{n_1}{n_2}\lambda$$

(g) 1

(h) $\dfrac{d}{\lambda}(1-\sin\theta) = 1$ となったときなので，$\lambda = d(1-\sin\theta)$ と表せる．

(i) (h) をふまえると，$m = -1$ の光については，

$$\sin\phi = \sin\theta + \frac{-1\times d(1-\sin\theta)}{d} = 2\sin\theta - 1$$

(j) $|\phi| \geqq \theta_0$ すなわち $-\sin\phi \geqq \dfrac{n_2}{n_1}$ であればよいので，

$$1 - 2\sin\theta \geqq \frac{n_2}{n_1} \qquad \therefore \quad \sin\theta \leqq \frac{n_1-n_2}{2n_1}$$

(k) (c) をふまえると，$m = -1$ の回折光がなくなる条件は，

$$-\frac{d}{\lambda}(1+\sin\theta) \geqq -1 \qquad \therefore \quad \lambda \geqq d(1+\sin\theta)$$

これが入射角 θ によらず成り立つためには，$\lambda \geqq 2d$ を満たしていればよい．

4章－2　熱力学演習

問題

■演習

【1】

《解答》

(1)　(a) 力のつりあいより，

$$0 = p_1 S - p_0 S - mg \qquad \therefore \quad p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$$

(b) 等温変化での内部エネルギー変化は 0 なので，外部からされた仕事と等しい大きさの熱量を放出する．よって，熱が移動する向きは，シリンダー内の空気から大気への向き．

(c) ピストンを降ろす前後の状態方程式は，封入空気のモル数を n として，

$$\begin{cases} p_1 S L_1 = nRT_0 \\ p_0 S L_0 = nRT_0 \end{cases}$$

これらより，

$$p_1 S L_1 = p_0 S L_0 \qquad \therefore \quad L_1 = \frac{p_0}{p_1} L_0 = \frac{p_0 S}{p_0 S + mg} L_0$$

(2)　(a) 定圧変化なので，

$$W = p_1 S (L_0 - L_1) = mgL_0$$

(b) 熱力学第 1 法則より，

$$nC_{\mathrm{V}} \mathit{\Delta} T = Q - W \qquad \therefore \quad Q = nC_{\mathrm{V}} \mathit{\Delta} T + W \qquad \cdots (*)$$

ここで，図 2 およびピストンの高さが L_0 に達したときの状態方程式は，

$$\begin{cases} p_1 S L_1 = nRT_0 \\ p_1 S L_0 = nR(T_0 + \mathit{\Delta} T) \end{cases}$$

これらより，

$$p_1 S (L_0 - L_1) = nR \cdot \mathit{\Delta} T \qquad \therefore \quad \mathit{\Delta} T = \frac{p_1 S (L_0 - L_1)}{nR} = \frac{mgL_0}{nR}$$

これと W を $(*)$ に代入すると，

$$Q = nC_{\mathrm{V}} \cdot \frac{mgL_0}{nR} + mgL_0 \qquad \therefore \quad C_{\mathrm{V}} = \left(\frac{Q}{mgL_0} - 1 \right) R$$

(3)　(a) 断熱圧縮では温度が上昇するため，同じ圧力 p_1 まで増加したときの体積は断熱変化のときの方が大きく，L_2 は L_1 よりも大きい．

(b) 熱力学第 1 法則より，

$$nC_\mathrm{V}\mathit{\Delta}T = 0 - pS\mathit{\Delta}L \qquad \therefore \quad pS\mathit{\Delta}L = -nC_\mathrm{V}\mathit{\Delta}T$$

(c) 状態方程式を用いて問 (3)(b) の p を消去すると，

$$\frac{nRT}{SL}\cdot S\mathit{\Delta}L = -nC_\mathrm{V}\mathit{\Delta}T \qquad \therefore \quad \frac{\mathit{\Delta}T}{\mathit{\Delta}L} = -\frac{R}{C_\mathrm{V}}\cdot\frac{T}{L}$$

傾きが負で，L が小さく T が大きいと傾きの大きさが大きくなるので，適切なものは①.

【2】

《解答》

深さ z での静水圧は $P(z) = P(0) + \rho g z$ と表せる.

(a) ピストンに関する力のつりあいより,

$$0 = \{P_0 + \rho(d+h)g\}S - PS \qquad \therefore \quad P = P_0 + \rho(d+h)g$$

また，状態方程式は,

$$PSh = nRT \qquad \therefore \quad T = \frac{\{P_0 + \rho(d+h)g\}Sh}{nR}$$

(b) シリンダーに関する力のつりあいより,

$$0 = PS - (P_0 + \rho dg)S - Mg \qquad \therefore \quad M = \rho Sh$$

(c) 容器のピストンに接する液面の圧力を $P_0{}'$ として，シリンダーのピストンとシリンダーに関する力のつりあいより,

$$\begin{cases} 0 = \{P_0{}' + \rho(d' + h')g\}S - P_1 S & \cdots ① \\ 0 = P_1 S - (P_0{}' + \rho d' g)S - Mg & \cdots ② \end{cases}$$

①+② より,

$$0 = \rho g h' S - Mg \qquad \therefore \quad h' = h$$

これと状態方程式より,

$$V_1 = Sh' = Sh, \qquad P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_1}{Sh}$$

(d) 容器のピストンとおもり全体に関する力のつりあいより,

$$0 = P_0{}' S_0 - Wg - P_0 S_0$$

また，(c) よりピストンとシリンダーの配置は〔A〕のときと同じとわかり，① で $d' = d$ なので,

$$0 = \{P_0{}' + \rho(d+h)g\}S - P_1 S \qquad \therefore \quad P_0{}' = P_1 - \rho(d+h)g$$

これらより,

$$0 = \{P_1 - \rho(d+h)g\}S_0 - Wg - P_0 S_0$$

$$\therefore \quad W = \frac{S_0}{g}\left\{\frac{nRT_1}{Sh} - P_0 - \rho(d+h)g\right\}$$

(e) (a) で得た P の表式より，ピストンが y 上昇したときの圧力は,

$$P_y = P_0 + \rho(d + h - y)g = P - \rho g y$$

上昇する前後の状態方程式は,

$$\begin{cases} P \cdot Sh = nRT \\ P_y \cdot S(h + x - y) = nRT \end{cases}$$

以上より，

$$P_y S(h+x-y) = PSh \qquad \therefore \quad (P-\rho g y)(h+x-y) = Ph$$

左辺を展開し xy と y^2 の項を無視すると

$$Ph + P(x-y) - \rho g y \cdot h = Ph \qquad \therefore \quad x = \frac{P+\rho g h}{P} y$$

(f) x，y を用いて表すと，合力は

$$\begin{aligned} F &= P_y S - Mg - \{P_0 + \rho(d-x)g\}S \\ &= \{P_0 + \rho(d+h)g - \rho g y\}S - \rho S h \cdot g - \{P_0 + \rho(d-x)g\}S \\ &= \rho g S(x-y) \end{aligned}$$

(e) を用いて y を消去すると

$$F = \rho g S\left(x - \frac{P}{P+\rho g h}x\right) = \frac{\rho^2 g^2 S h}{P+\rho g h}x$$

F と x が同符号で，つりあいからのずれと同じ向きの合力が作用するので，上下方向の変位に対して不安定となる．

【3】

《解答》

(い) $-P\Delta V$

(ろ) $\Delta U = Q - P\Delta V \qquad \therefore \quad Q = \Delta U + P\Delta V$

(は) 変化前後の状態方程式は,

$$\begin{cases} PV = RT \\ P(V+\Delta V) = R(T+\Delta T) \end{cases}$$

これらより,

$$P\Delta V = R\Delta T \qquad \therefore \quad \Delta V = \frac{R}{P}\Delta T$$

(に) 同じ温度変化 ΔT を生じさせるのに必要な熱量を定積過程では Q_{V}, 定圧過程では Q_{P} とすると,

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{V}} = \Delta U \\ Q_{\mathrm{P}} = \Delta U + R\Delta T \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} C_{\mathrm{V}} = \dfrac{Q_{\mathrm{V}}}{\Delta T} = \dfrac{\Delta U}{\Delta T} \\ C_{\mathrm{P}} = \dfrac{Q_{\mathrm{P}}}{\Delta T} = \dfrac{\Delta U}{\Delta T} + R \end{cases}$$

これらより,

$$C_{\mathrm{P}} = C_{\mathrm{V}} + R \qquad \therefore \quad C_{\mathrm{P}} - C_{\mathrm{V}} = R$$

(ほ) $C_{\mathrm{P}} = \gamma C_{\mathrm{V}}$ と表せるので,

$$\gamma C_{\mathrm{V}} - C_{\mathrm{V}} = R \qquad \therefore \quad C_{\mathrm{V}} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

断熱変化なので, (ろ) で $Q = 0$ とおくと,

$$0 = C_{\mathrm{V}}\Delta T + P\Delta V \qquad \therefore \quad \frac{R\Delta T}{\gamma - 1} = -P\Delta V$$

これを状態方程式 $RT = PV$ で割ることにより,

$$\frac{\Delta T}{T(\gamma-1)} = -\frac{\Delta V}{V} \qquad \therefore \quad \frac{\Delta T}{T} = -(\gamma - 1) \times \frac{\Delta V}{V}$$

(へ) 変化前後の状態方程式は,

$$\begin{cases} PV = RT \\ (P+\Delta P)(V+\Delta V) = R(T+\Delta T) \end{cases}$$

これらより,

$$\left(1 + \frac{\Delta P}{P}\right)\left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right) = 1 + \frac{\Delta T}{T}$$

左辺を展開して, $\dfrac{\Delta P}{P} \cdot \dfrac{\Delta V}{V}$ を無視すると,

$$1 + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} = 1 + \frac{\Delta T}{T} \qquad \therefore \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta P}{P}$$

(と) (へ), (ほ) より,

$$\frac{\Delta T}{T} = -(\gamma - 1)\left(\frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta P}{P}\right) \qquad \therefore \quad \frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \times \frac{\Delta P}{P}$$

(ち) 密度 ρ のとき,

$$\frac{M}{V} = \rho \qquad \therefore \quad V = \frac{M}{\rho}$$

これをふまえて, 状態方程式は,

$$P \cdot \frac{M}{\rho} = RT \qquad \therefore \quad \rho = \frac{PM}{RT}$$

(り) (ち) より, 圧力変化は,

$$\Delta P = -\rho g \Delta z = -\frac{PMg}{RT}\Delta z \qquad \therefore \quad \frac{\Delta P}{P} = -\frac{Mg}{RT} \times \Delta z$$

(ぬ) (と), (り) より,

$$\frac{\Delta T}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{Mg}{RT}\Delta z\right) \qquad \therefore \quad \frac{\Delta T}{\Delta z} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R}$$

【4】

《解答》

I　(1) 低い

(2) $p_1V_1 = p_2V_2$

(3)

$$与式 = \gamma(\log_{10} V_2 - \log_{10} V_1) = \gamma \log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$

(4)

$$\log_{10} \frac{V_2}{V_1}$$

(5)

$$\gamma = \frac{\log_{10} \dfrac{p_1}{p_0}}{\log_{10} \dfrac{p_1}{p_2}}$$

(6)

$$0 = p_0S + \rho Sh_1g - p_1S \qquad \therefore \quad p_1 = p_0 + \rho h_1 g$$

(7)

$$\gamma \fallingdotseq \frac{\dfrac{\rho h_1 g}{p_0}}{\dfrac{\rho h_1 g}{p_0} - \dfrac{\rho h_2 g}{p_0}} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}$$

(8)

$$TV^{\gamma-1} = 一定$$

(9)

$$273V^{0.5} = T'' \left(\frac{V}{100}\right)^{0.5}$$

$$T'' = \frac{273V^{0.5}}{\left(\dfrac{V}{100}\right)^{0.5}} = 2730\,\mathrm{K}$$

II (イ)

$$pV = RT$$

(ロ)

$$p_{\mathrm{A}} = \alpha - \beta V_{\mathrm{A}}, \qquad p_{\mathrm{B}} = \alpha - \beta V_{\mathrm{B}}$$

より，

$$\alpha = \frac{V_{\mathrm{B}} p_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{A}} p_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}}, \qquad \beta = -\frac{p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}}$$

(ハ) (イ) の結論より，

$$T = \frac{pV}{R} = \frac{1}{R} V(\alpha - \beta V)$$

(ニ)

$$\begin{aligned} T + \Delta T &= \frac{1}{R}(V + \Delta V)\{\alpha - \beta(V + \Delta V)\} \\ &\fallingdotseq \frac{1}{R}\{V(\alpha - \beta V) + \alpha \cdot \Delta V - 2\beta V \cdot \Delta V\} \end{aligned}$$

よって，

$$\Delta T = \frac{\alpha - 2\beta V}{R}\Delta V \qquad \therefore \quad \Delta V = \frac{R}{\alpha - 2\beta V}\Delta T$$

(ホ)

$$\Delta U = -p\Delta V + \Delta Q$$

(ヘ)

$$C_V \cdot \Delta T = C(V) \cdot \Delta T - (\alpha - \beta V)\frac{R}{\alpha - 2\beta V}\Delta T$$

$$\therefore \quad C(V) = C_V + \frac{\alpha - \beta V}{\alpha - 2\beta V} R$$

(ト) (ヘ) において，$\beta = 0$ とおけば，

$$C_p = C_V + R$$

添削課題

《解答》

(1) 各状態の温度を T_{A}，T_{B}，T_{C}，T_{D} とすると，状態方程式は，

$$\begin{cases} p_{\mathrm{H}}V_0 = nRT_{\mathrm{A}} \\ p_{\mathrm{H}}\cdot 2V_0 = nRT_{\mathrm{B}} \\ p_{\mathrm{L}}\cdot 4V_0 = nRT_{\mathrm{C}} \\ p_{\mathrm{L}}\cdot 2V_0 = nRT_{\mathrm{D}} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} T_{\mathrm{A}} = \dfrac{p_{\mathrm{H}}V_0}{nR} \\ T_{\mathrm{B}} = \dfrac{2p_{\mathrm{H}}V_0}{nR} \\ T_{\mathrm{C}} = \dfrac{4p_{\mathrm{L}}V_0}{nR} \\ T_{\mathrm{D}} = \dfrac{2p_{\mathrm{L}}V_0}{nR} \end{cases}$$

(2) A → B での温度変化は $\mathit{\Delta}T_{\mathrm{AB}} = \dfrac{p_{\mathrm{H}}V_0}{nR}$，体積変化は $\mathit{\Delta}V_{\mathrm{AB}} = V_0$ なので，

$$\begin{cases} \mathit{\Delta}U_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}nR\mathit{\Delta}T_{\mathrm{AB}} = \dfrac{3}{2}p_{\mathrm{H}}V_0 \\ W_{\mathrm{AB}} = p_{\mathrm{H}}\mathit{\Delta}V_{\mathrm{AB}} = p_{\mathrm{H}}V_0 \end{cases}$$

(3) 熱力学第 1 法則より，

$$\mathit{\Delta}U_{\mathrm{AB}} = +Q_{\mathrm{AB}} - W_{\mathrm{AB}} \qquad \therefore \quad Q_{\mathrm{AB}} = \frac{5}{2}p_{\mathrm{H}}V_0$$

(4) B → C での温度変化は $\mathit{\Delta}T_{\mathrm{BC}} = \dfrac{2V_0(2p_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{H}})}{nR}$ なので，

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta}U_{\mathrm{BC}} &= \frac{3}{2}nR\mathit{\Delta}T_{\mathrm{BC}} \\ &= 3V_0(2p_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{H}}) \end{aligned}$$

熱力学第 1 法則より，

$$\mathit{\Delta}U_{\mathrm{BC}} = 0 - W_{\mathrm{BC}} \qquad \therefore \quad W_{\mathrm{BC}} = 3V_0(p_{\mathrm{H}} - 2p_{\mathrm{L}})$$

(5) C → D での温度変化は $\mathit{\Delta}T_{\mathrm{CD}} = -\dfrac{2p_{\mathrm{L}}V_0}{nR}$，体積変化は $\mathit{\Delta}V_{\mathrm{CD}} = -2V_0$ なので，

$$\begin{cases} \mathit{\Delta}U_{\mathrm{CD}} = \dfrac{3}{2}nR\mathit{\Delta}T_{\mathrm{CD}} = -3p_{\mathrm{L}}V_0 \\ W_{\mathrm{CD}} = p_{\mathrm{L}}\mathit{\Delta}V_{\mathrm{CD}} = -2p_{\mathrm{L}}V_0 \end{cases}$$

熱力学第 1 法則より，

$$\mathit{\Delta}U_{\mathrm{CD}} = +Q_{\mathrm{CD}} - W_{\mathrm{CD}} \qquad \therefore \quad Q_{\mathrm{CD}} = -5p_{\mathrm{L}}V_0$$

1 サイクルで吸収する正味の熱量を Q_{T} とすると，

$$Q_{\mathrm{T}} = Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{CD}} = \left(\frac{5}{2}p_{\mathrm{H}} - 5p_{\mathrm{L}}\right)V_0$$

(6) 1 サイクルでする正味の仕事を W_{T} として，熱力学第 1 法則より，

$$0 = +Q_{\mathrm{T}} - W_{\mathrm{T}} \qquad \therefore \quad W_{\mathrm{T}} = \left(\frac{5}{2}p_{\mathrm{H}} - 5p_{\mathrm{L}}\right)V_0$$

(7) 熱効率を e とすると，

$$e = \frac{W_{\mathrm{T}}}{Q_{\mathrm{AB}}} = 1 - \frac{2p_{\mathrm{L}}}{p_{\mathrm{H}}}$$

(8) B → C と D → A で，それぞれ $pV^{\frac{5}{3}}$ が一定なので，

$$\begin{cases} p_{\mathrm{H}}(2V_0)^{\frac{5}{3}} = p_{\mathrm{L}}(4V_0)^{\frac{5}{3}} \\ p_{\mathrm{L}}(2V_0)^{\frac{5}{3}} = p_{\mathrm{H}}{V_0}^{\frac{5}{3}} \end{cases} \qquad \therefore \quad p_{\mathrm{H}} = 2^{\frac{5}{3}}p_{\mathrm{L}}$$

(9) (7)，(8) より，

$$e = 1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \fallingdotseq 0.37$$

配点

100 点

(1)5 点 ×4　(2)5 点 ×2　(3)10 点　(4)5 点 ×2

(5)10 点　(6)10 点　(7)10 点　(8)10 点　(9)10 点

５章－１　光波の干渉（２）

問題

■演習

【１】

《解答》

A (1) 図 4 より，第 2 の明線は，$|x| \fallingdotseq 1.4$ の所に生じる．よって，この明線が観察されるためには，測定される x の値の範囲に $x = 1.4$ が含まれている必要がある．また，$|\sin\theta| < 1$ なので $|x| < \dfrac{a}{\lambda}$ であることをふまえると，

$$\frac{a}{\lambda} > 1.4 \qquad \therefore \quad \frac{\lambda}{a} < 0.7$$

(2) x の値により明るさが決まっていて，$x = m(m = \pm1,\ \pm 2,\ \cdots)$ では明るさ 0 となる．この暗線に注目すると，

$$\frac{a}{\lambda}\sin\theta = m \qquad \therefore \quad \sin\theta = \frac{m\lambda}{a}$$

a が大きくなると，$|\theta|$ が小さくなるので縞の間隔は狭くなり，a が小さくなると，$|\theta|$ が大きくなるので縞の間隔は広くなる．

(3) $x = 1$ となる方向では，

$$\frac{a}{\lambda}\sin\theta = 1 \qquad \therefore \quad \frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$

この式は，スリット内の $\dfrac{a}{2}$ だけ離れた 2 点を通った光が打ち消しあうことを表している．スリット全体では，中央よりも右側を通った光が左側を通った光と打ち消しあうため暗くなる．

B (4) $x = \dfrac{1}{8}$ となる方向では，

$$\frac{a}{\lambda}\sin\theta = \frac{1}{8} \qquad \therefore \quad 4a\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$

この式は，2 つのスリットの $4a$ だけ離れた 2 点を通った光が打ち消しあうことを表している．スリット全体では，右側のスリットを通った光が左側のスリットを通った光と打ち消し合うため暗くなる．

(5) 整数 k を用いると，2 つのスリットの na だけ離れた 2 点を通った光が打ち消しあう条件は，

$$na\sin\theta = \frac{\lambda}{2}\cdot(2k+1) \qquad \therefore \quad \frac{a}{\lambda}\sin\theta = \frac{2k+1}{2n}$$

$0 < x < 1$ の範囲にあるのは，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に相当する暗線なので，n 本．

《解説》

(3) の条件を位相差の観点で考えてみよう．$x=1$ となる方向では，

$$\frac{a}{\lambda}\sin\theta = 1 \qquad \therefore \quad \frac{2\pi}{\lambda}\times a\sin\theta = 2\pi$$

これは，スリットの両端を通る光が位相差 2π で届くことを意味している．このため，スリットを通って届く光には位相差 0 から 2π までのものが均等に含まれていて，そのすべてを合成すると振動が起こらなくなっている．

あるいは，スリットを通る光を仮想的に分割すると，位相差 π となる組み合わせを作ることができ，これらが打ち消しあうと考えることもできる．

【2】

《解答》

(1) 光の <u>波動</u> 性により，異なる経路をたどった光を再び重ね合わせると <u>干渉</u> し，<u>位相</u> 差に応じて明から暗までの状態を生じる．図 1 では，隙間の上下面で <u>反射</u> した光が <u>干渉</u> するが，隙間は左から右へ広がっていくから生じる <u>位相</u> 差も増加していき，縞模様が見える．

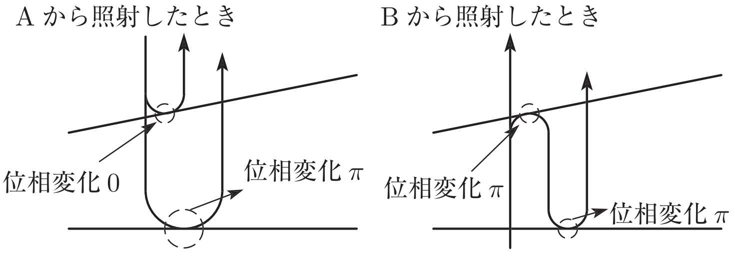
(2) 明るい縞の間隔を Δx，ガラス面のなす微小角を α とおく．隣り合う明るい縞では，経路差が 1 波長だけ異なるので，$\tan\alpha \fallingdotseq \alpha$ より，

$$2 \times \alpha \Delta x \fallingdotseq \lambda \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{\lambda}{2\Delta x}$$

また，ガラスの板の長さ l と，髪の毛の太さ R を用いると $\alpha \fallingdotseq \dfrac{R}{l}$ と表せるので，

$$\frac{R}{l} = \frac{\lambda}{2\Delta x} \qquad \therefore \quad R = \frac{l\lambda}{2\Delta x} = 68\mu\mathrm{m}$$

(3)



A から照射した場合は，反射による位相変化の差が π なので，経路差が $\dfrac{1}{2}$ 波長の偶数倍である位置は暗く，$\dfrac{1}{2}$ 波長の奇数倍である位置は明るい．

B から照射した場合は，反射による位相変化の差が 2π なので，経路差が $\dfrac{1}{2}$ 波長の偶数倍である位置は明るく，$\dfrac{1}{2}$ 波長の奇数倍である位置は暗い．

このため明暗の縞の位置は入れかわる．

(4) 透過光が強め合う条件は，整数 m を用いて，

$$2d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{n} \times 2m \qquad \therefore \quad n \cdot 2d = \lambda m$$

λ_1(このとき $m = m_1$ であるとする) と λ_2(このとき $m = m_2$ であるとする) の明状態では，m が 1 だけ異なり，$\lambda_1 < \lambda_2$ なので，$m_1 = m_2 + 1$ と表せることをふまえると，

$$\begin{cases} 2nd = \lambda_1(m_2 + 1) \\ 2nd = \lambda_2 m_2 \end{cases}$$

これらより，m_2 を消去すると，

$$\frac{2nd}{\lambda_1} = \frac{2nd}{\lambda_2} + 1 \qquad \therefore \quad d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2n(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

【3】

《ポイント》

2 つの光の干渉で，強めあう条件・弱めあう条件を表すことが必要ない場合や，表しにくい場合がある．その場合は，次のように注目することが効果的となる．

① 隣り合った明と暗 $\cdots$ 位相差が π だけ異なる．
② 隣り合った明と明 (または暗と暗)$\cdots$ 位相差が 2π だけ異なる．

あるいは，位相差の代わりに経路差や光路差を用いることもでき，

① 隣り合った明と暗 $\cdots \dfrac{1}{2}$ 波長だけ異なる．
② 隣り合った明と明 (または暗と暗)$\cdots$1 波長だけ異なる．

《解答》

(1) 暗状態から明状態まで変化する間に，M で反射する光と M_0 で反射する光の経路差は $\dfrac{\lambda}{2}$ だけ変わるので，

$$2(\Delta x + 3\Delta x) = \frac{\lambda}{2} \qquad \therefore \quad \lambda = 16\Delta x$$

(2) Q 内の屈折率の減少にともない，Q を往復するときの光学的距離が減少するため，検出器に入る 2 つの光の光路差が変化する．この光路差の変化により，干渉する 2 つの光の位相差が変化するため，光の強さは強弱の変化を繰り返した．

(3) 明状態から暗状態を経て明状態に戻る間に，Q を往復する光の光学的距離は λ_0 だけ変わるので，

$$n \cdot 2l - 1 \cdot 2l = \lambda_0 \cdot N \qquad \therefore \quad n = 1 + \frac{N\lambda_0}{2l}$$

(4) (3) より

$$n = 1 + \frac{100 \cdot 580 \times 10^{-9}}{2 \cdot 0.10} = 1.00029$$

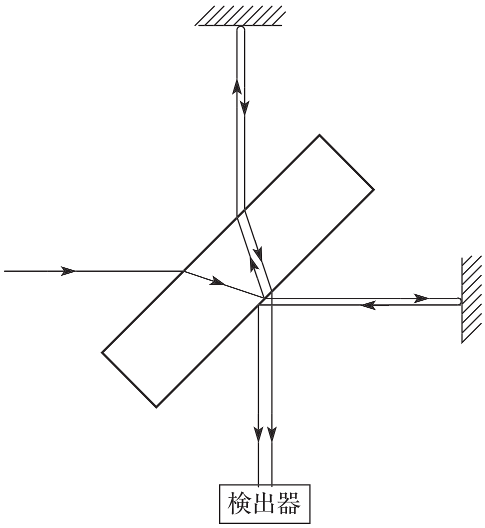
《解説》

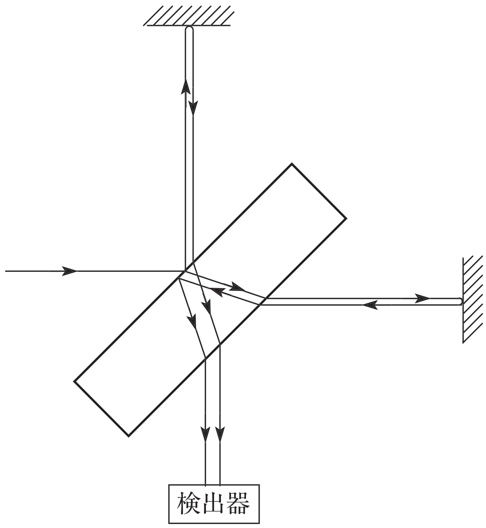
「半透明鏡 (ハーフ・ミラー) で反射する際に，2 つの経路でともに位相変化が π である」という考え方は正しくない．以下で詳しく考えてみよう．

光源の同じ位置から出されて検出器の同じ位置に届く2 つの経路は，次ページの図のいずれかのようになっている．いずれの図でも，2 つの経路の一方では半透明鏡で反射する際に位相が π だけ変化するが，他方の経路では変化しない．また，干渉条件式を書くときは半透明鏡内部の経路についても考慮に入れなければならない．

半透明鏡の厚さを無視した場合には次ページの図に含まれている 4 つの経路で届く光が重なることになり，この場合にも冒頭で述べた考えは誤りであることが分かる．

いずれにしろ，半透明鏡についての詳しい情報を与えられない限り，干渉条件式そのものは書くことができない のである．入試問題においては「半透明鏡で生じる位相差は無視してよい」とされることがあるが，これは上で述べた種々の厄介さを避けるための仮定であり，事実には反している．


検出器


検出器

【4】

《解答》

(1)

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta = 2\pi m \qquad \therefore \quad d\sin\theta = m\lambda$$

(2) $\sin\theta \fallingdotseq \theta, \quad m = 1$ より，

$$d = \frac{\lambda}{\theta} = 5.0 \times 10^{-5}[\mathrm{m}]$$

(3) しま A は白色に見える．しま B は A に近い側から遠くに向かって紫から赤の色が順に並び，虹のように色づいて見える．

(4) 近似処理を行って，

$$\overline{\mathrm{S_0S_2}} - \overline{\mathrm{S_0S_1}} \fallingdotseq \frac{d\Delta y}{a}$$

$m = 0$ 次明線の移動を考えて，位相差 0 を維持し続けていることから，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{d\Delta y}{a} + d\theta_{\mathrm{A}}\right) = 0 \qquad \therefore \quad \Delta y = -a\theta_{\mathrm{A}}$$

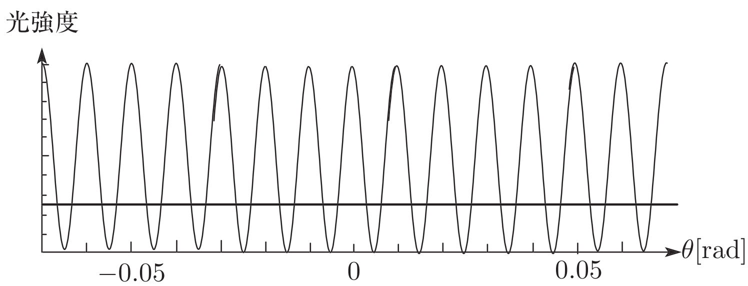
(5) 単スリット $\mathrm{S_0}$ の幅が W のとき，$\Delta y = \dfrac{W}{2}$ ということになる．(4) の結果より，

$$\frac{W}{2} = -a\theta_{\mathrm{A}} \qquad \therefore \quad |\theta_{\mathrm{A}}| = \frac{W}{2a}$$

また，明るい縞の間隔は $\Delta\theta = \dfrac{\lambda}{d}$ であることを考えて，問の定義のもとではっきり見えるための条件は，

$$2|\theta_{\mathrm{A}}| \leqq \frac{\Delta\theta}{2} \qquad \therefore \quad W \leqq \frac{a\lambda}{2d}$$

(6) スクリーン上での光の強度は合成波の振幅の 2 乗に比例する．強度最大の箇所は振幅が 2 倍となっているので一つの光が均一に届いた場合の 4 倍の強度ゆえ，下図のようになる．



(7) 強めあいの条件式を満たす θ において，スリット幅が半分になった 2 つのスリットからの光に対して，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{d}{2}\sin\theta=\pi m \qquad \therefore \quad \frac{d}{2}\sin\theta=\frac{m}{2}\lambda$$

が成立する．これは，$m=0$ ならびに偶数の場合は強めあいとなり奇数の場合は弱めあいの条件となる．よって，

A($m=0$): それぞれから位相差 0 の光が到達し，振幅は $3E$.

B($m=1$): S_1, S_3 から位相差 π(S_3, S_2 からも同様) つまり 2 つの波が弱めあうので
実質 1 つの波がやってくることになり E

C($m=2$): S_1, S_3 から位相差 2π(S_3, S_2 からも同様)S_1, S_2 から
位相差 4π の光が到達するので $3E$

■自習

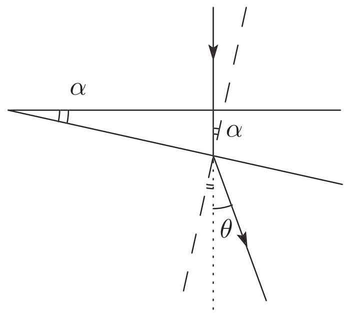
【1】

《解答》

(1) (a) (エ)

(b) プリズムの屈折率が1より大きいので，プリズムに入るとき，屈折角が入射角よりも小さくなり，光は屈折により左に曲がる．また，プリズムから出るとき，屈折角が入射角よりも大きくなるので，さらに左に曲がる．波面は波の進行方向に垂直であるから，波面の図は (エ) となる．

(2) (a) $\lambda_{\mathrm{P}} = \dfrac{\lambda}{n_{\mathrm{P}}}$



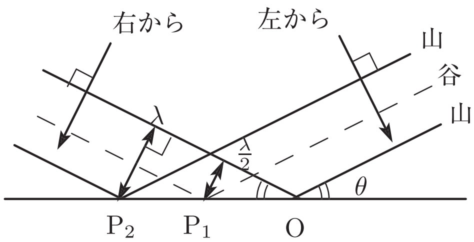
(b) 光がプリズムから出るときの屈折角は $\alpha + \theta$ と表せる．屈折の法則より，

$$n_{\mathrm{P}} \sin\alpha = \sin(\alpha + \theta)$$

近似式を用いると，

$$n_{\mathrm{P}}\alpha \fallingdotseq \alpha + \theta \qquad \therefore \quad \theta = (n_{\mathrm{P}} - 1)\alpha$$

(c) 点Oで波の山が重なっているとき，スクリーン付近の波面は右図のようになる．明線の間隔を d とすると，

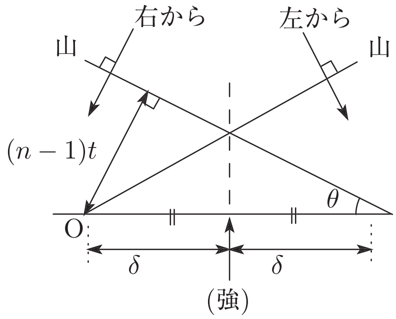


$$d\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \qquad \therefore \quad d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} \fallingdotseq \frac{\lambda}{2\theta}$$

点Oから点Pの明線までの距離は，

$$l = d \times k = \frac{\lambda}{2\theta} \cdot k$$

(d) プリズムに入射する前の光学的距離は，右側のプリズムに入射する光の方が $(n-1)t$ だけ長くなる．このため，点Oに左側から山が届いたとき，スクリーン付近の波面は右図のようになる．よって，干渉じまは右向きにずれ，



$$2\delta\sin\theta = (n-1)t$$

$$\therefore \quad n \fallingdotseq 1 + \frac{2\delta\theta}{t}$$

ここで (c) より $\theta = \dfrac{\lambda}{2d}$ と表せることをふまえると，

$$n = 1 + \frac{2\delta}{t} \cdot \frac{\lambda}{2d} = 1 + \frac{\delta\lambda}{td}$$

【2】

《解答》

(1) レンズと平板ガラスが接しているので，光はすべて透過し，反射光強度は 0 になる．

(2) 中心部では経路差 0 とみなせる 2 つの反射光が打ち消し合って暗くなっているので，各面での反射における位相変化の差は π である．

(3) 隣り合う暗線の位置では，経路差が 1 波長だけ異なるので，半径 y_m の位置では，

$$\frac{{y_m}^2}{2R} \times 2 = m\lambda \qquad \therefore \quad y_m = \sqrt{m\lambda R}$$

(4) 液体の屈折率 x が 1.5 で n と等しいときは，レンズ及び平板ガラスと液体の境界が反射端として機能せず，反射光は生じない．以下では $x \fallingdotseq 1.5$ の場合をまず考えて，必要があれば，$x = 1.5$ のとき反射光強度が 0 となることも考えることにする．

y_0 の位置では，2 つの反射光が打ち消しあう状態が保たれるので，適切なグラフは①．

y_1 の位置で，2 つの反射光が打ち消しあう条件は，

$$\frac{{y_1}^2}{2R} \times 2 = m' \times \frac{\lambda}{x} \qquad \therefore \quad x = m' \quad (m' = 1, 2, 3 \cdots)$$

また，$x = 1.5$ でも反射光強度が 0 となるので，適切なグラフは③．

(5) ホイヘンスの原理

(6) $l_m = \sqrt{{y_m}^2 + f^2} = \sqrt{m\lambda R + f^2}$

(7) (6) で，$f \gg y_m$ のとき，

$$\begin{aligned} l_m = f \times \sqrt{1 + \frac{m\lambda R}{f^2}} &\fallingdotseq f \times \left\{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m\lambda R}{f^2}\right\} \\ &= f + \frac{m\lambda R}{2f} \end{aligned}$$

$l_{m+1} - l_m = \lambda$ となるとき，

$$\left\{f + \frac{(m+1)\lambda R}{2f}\right\} - \left(f + \frac{m\lambda R}{2f}\right) = \lambda \qquad \therefore \quad f = \frac{1}{2}R$$

(8) 各開口部から点 F に届く光は，どの 2 つに注目しても経路差が波長の整数倍なので，その位相差は π の偶数倍となっていて，すべての光が点 F で強め合うから．

【3】

《解答》

(ア) ハーフミラーからミラー 1 までの距離を L_1 とおく．経路差が 1 波長だけ変化するとき，

$$2\varDelta L_1 = \lambda \qquad \therefore \quad \varDelta L_1 = \frac{\lambda}{2}$$

(イ) ミラー 1 は，単位時間に $V \cdot 1$ だけ近づく．検出器における光量変動の周波数を n とすると，

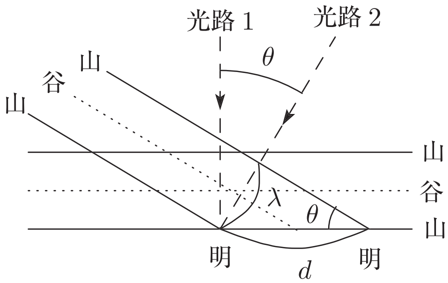
$$n\varDelta L_1 = V \qquad \therefore \quad n = \frac{2V}{\lambda}$$

(ウ) 経路差が 1 波長変化すると光量は 1 回変動し，経路差は単位時間に $(W \cdot 1 - V \cdot 1) \times 2$ だけ変化するので，

$$2(W - V) = n\lambda \qquad \therefore \quad n = \frac{2(W-V)}{\lambda}$$

(エ) 間隔を d とおくと，右図のようになるので，

$$d\sin\theta = \lambda \qquad \therefore \quad d = \frac{\lambda}{\sin\theta}$$



(オ) 光路 1 の長さがわずかに減少すると，光路 1 でスクリーンに届く山が (エ) の図のようになるとき，光路 2 で届く山は (エ) の図よりもわずかに戻った位置にある．このため，山と山の重なる位置は右に移動する．

(カ) ミラー 1 を $\dfrac{\lambda}{10}$ 近づけると光路 1 の長さが $\dfrac{\lambda}{10} \times 2$ だけ減少する．(エ) の図のようになるとき，光路 2 で届く山は $\dfrac{\lambda}{10} \times 2$ だけ戻った位置にあるので，

$$\varDelta x\sin\theta = \frac{\lambda}{10} \times 2 \qquad \therefore \quad \varDelta x = \frac{\lambda}{5\sin\theta}$$

(キ) 時間 $\varDelta t$ かかってミラー 1 が $V\varDelta t$ が近づいたとき，(カ) と同様に考えると，

$$\varDelta x\sin\theta = V\varDelta t \times 2 \qquad \therefore \quad \frac{\varDelta x}{\varDelta t} = \frac{2V}{\sin\theta}$$

(ク) (エ)，(キ) より，

$$n' \times d = \frac{2V}{\sin\theta} \qquad \therefore \quad n' = \frac{2V}{\lambda}$$

５章－２　静電場演習

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) $E = \dfrac{V}{d}$

(2) $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

(3) (1)，(2) より

$$\frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{V}{d} \qquad \therefore \quad Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} V$$

電気容量の定義より，

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

(4) $U = \dfrac{Q^2}{2C}$

(5) AB 間の電位差が V なので，

$$\frac{Q_{\rm A}}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{d}{2} + \frac{Q_{\rm B}}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{d}{4} = V \qquad \therefore \quad 2Q_{\rm A} + Q_{\rm B} = 4Q$$

M の電荷保存より，

$$-Q_{\rm A} + Q_{\rm B} = 2Q \qquad \therefore \quad Q_{\rm B} = 2Q + Q_{\rm A} \cdots (*)$$

これらより, $Q_{\rm B}$ を消去すると，

$$2Q_{\rm A} + (2Q + Q_{\rm A}) = 4Q \qquad \therefore \quad Q_{\rm A} = \frac{2}{3}Q$$

(6) (5) を $(*)$ に代入して，

$$Q_{\rm B} = 2Q + \frac{2}{3}Q = \frac{8}{3}Q$$

(7) AM 間の電気容量は $2C$，BM 間の電気容量は $4C$ なので，

$$\begin{cases} Q_{\rm A} = 2C \cdot V_{\rm AM} \\ Q_{\rm B} = 4C \cdot V_{\rm BM} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} V_{\rm AM} = \dfrac{Q}{3C} \\ V_{\rm BM} = \dfrac{2Q}{3C} \end{cases}$$

AM 間および BM 間の電界の大きさは，

$$\begin{cases} E_{\rm AM} = \dfrac{V_{\rm AM}}{d/2} = \dfrac{2Q}{3Cd} \\ E_{\rm BM} = \dfrac{V_{\rm BM}}{d/4} = \dfrac{8Q}{3Cd} \end{cases}$$

(8) 合計の静電エネルギーは，

$$U = \frac{1}{2}Q_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{AM}} + \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{BM}} = \frac{Q^2}{C}$$

(9) AM 間の電気容量は $4C$，BM 間の電気容量は $2C$ となったので，

$$\begin{cases} Q_{\mathrm{A}} = 4C \cdot V_{\mathrm{AM}}{}' \\ Q_{\mathrm{B}} = 2C \cdot V_{\mathrm{BM}}{}' \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} V_{\mathrm{AM}}{}' = \dfrac{Q}{6C} \\ V_{\mathrm{BM}}{}' = \dfrac{4Q}{3C} \end{cases}$$

合計の静電エネルギーは，

$$U' = \frac{1}{2}Q_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{AM}}{}' + \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{BM}}{}' = \frac{11Q^2}{6C}$$

金属板 M を移動させる外力の仕事は静電エネルギーの変化と一致するので，

$$W = \frac{11Q^2}{6C} - \frac{Q^2}{C} = \frac{5Q^2}{6C}$$

(10) $E_{\mathrm{AM}}{}' = \dfrac{V_{\mathrm{AM}}{}'}{d/4} = \dfrac{2Q}{3Cd} \cdots E_{\mathrm{AM}}$ と等しい．

(11) $V_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{BM}}{}' + V_{\mathrm{AM}}{}' = \dfrac{3}{2}V$

【2】

《解答》

(1) 重なっている部分の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ なので，

$$C=\varepsilon\frac{S}{d}=\frac{\varepsilon r^2\theta}{2d}$$

(2) コンデンサーの極板間の電位差は V になるので，静電エネルギーを U とすると，

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{\varepsilon r^2\theta V^2}{4d}$$

また，電池を通過する電荷は $Q=CV$ なので，電池のする仕事を W とすると，

$$W=CV\cdot V=\frac{\varepsilon r^2\theta V^2}{2d}$$

(3) スイッチを切ったのでコンデンサーが蓄えている電荷は変化しない．したがって，操作後のコンデンサーの極板間の電位差を V' とすると，

$$\frac{\varepsilon r^2(\theta+\mathit{\Delta}\theta)}{2d}\cdot V'=\frac{\varepsilon r^2\theta}{2d}\cdot V \qquad \therefore \quad V'=\frac{\theta}{\theta+\mathit{\Delta}\theta}V$$

操作後の電気容量を C'，操作後の静電エネルギーを U' とすると，

$$\begin{aligned}U'&=\frac{1}{2}C'V'^2\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon r^2(\theta+\mathit{\Delta}\theta)}{2d}\cdot\left(\frac{\theta}{\theta+\mathit{\Delta}\theta}V\right)^2=\frac{\varepsilon r^2\theta^2V^2}{4d(\theta+\mathit{\Delta}\theta)}\end{aligned}$$

よって，静電エネルギーの変化を $\mathit{\Delta}U'$ とすると，

$$\mathit{\Delta}U=U'-U=\frac{\varepsilon r^2\theta V^2}{4d}\left(\frac{\theta}{\theta+\mathit{\Delta}\theta}-1\right)$$

(4) 可動板の外周は，張力 T と逆向きに $r\mathit{\Delta}\theta$ だけ動くので，張力のする仕事は $-T\times r\mathit{\Delta}\theta$ と表される．この仕事が静電エネルギーの変化と等しいので，

$$\mathit{\Delta}U=-Tr\mathit{\Delta}\theta$$

ここで，$\mathit{\Delta}U$ に与えられた近似式を用いると，

$$\begin{aligned}\mathit{\Delta}U&=\frac{\varepsilon r^2\theta V^2}{4d}\left(\frac{1}{1+\dfrac{\mathit{\Delta}\theta}{\theta}}-1\right)\\&\fallingdotseq\frac{\varepsilon r^2\theta V^2}{4d}\left\{\left(1-\frac{\mathit{\Delta}\theta}{\theta}\right)-1\right\}=-\frac{\varepsilon r^2V^2}{4d}\mathit{\Delta}\theta\end{aligned}$$

よって，

$$-\frac{\varepsilon r^2V^2}{4d}\mathit{\Delta}\theta=-Tr\mathit{\Delta}\theta \qquad \therefore \quad T=\frac{\varepsilon rV^2}{4d}$$

(5) 電気力のモーメントが張力のモーメントとつりあっていたので,

$$rT = \frac{\varepsilon r^2 V^2}{4d}$$

(6) 電気容量 C のコンデンサーが $(n-1)$ 個並列になっていると考えることができるので,求める電気容量は,

$$(n-1) \times C = \frac{(n-1)\varepsilon r^2 \theta}{2d}$$

【3】

《解答》

(1)　電気容量は極板間隔に反比例するから，

$$C_{\mathrm{A}}=\frac{d}{d+x}C_0,\qquad C_{\mathrm{B}}=\frac{d}{d-x}C_0$$

(2)　板 A，B の電荷はともに負なので，

$$\begin{cases}Q_{\mathrm{A}}=-C_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{D}}=-\dfrac{d}{d+x}C_0V_{\mathrm{D}}\\[2ex] Q_{\mathrm{B}}=-C_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{D}}=-\dfrac{d}{d-x}C_0V_{\mathrm{D}}\end{cases}$$

また，電荷の保存より，

$$Q_{\mathrm{A}}+Q_{\mathrm{B}}=-2C_0V_0$$

これらより，

$$\begin{cases}V_{\mathrm{D}}=\dfrac{(d+x)(d-x)}{d^2}V_0\\[2ex] Q_{\mathrm{A}}=-\dfrac{d-x}{d}C_0V_0\\[2ex] Q_{\mathrm{B}}=-\dfrac{d+x}{d}C_0V_0\end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases}E_{\mathrm{A}}=\dfrac{V_{\mathrm{D}}}{d+x}=\dfrac{d-x}{d^2}V_0\\[2ex] E_{\mathrm{B}}=\dfrac{V_{\mathrm{D}}}{d-x}=\dfrac{d+x}{d^2}V_0\end{cases}$$

(4)
$$\begin{aligned}F&=-\frac{1}{2}\cdot(-Q_{\mathrm{A}})\cdot E_{\mathrm{A}}+\frac{1}{2}\cdot(-Q_{\mathrm{B}})\cdot E_{\mathrm{B}}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{d-x}{d}C_0V_0\cdot\frac{d-x}{d^2}V_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{d+x}{d}C_0V_0\cdot\frac{d+x}{d^2}V_0\\&=\frac{2C_0V_0^2x}{d^2}\end{aligned}$$

(5)　ばね定数を k とすると，運動方程式は，

$$m\ddot{x}=-kx+F\qquad\therefore\quad \ddot{x}=-\left(\frac{k}{m}-\frac{2C_0{V_0}^2}{md^2}\right)x$$

$V_0=0$ のときの単振動では，

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\qquad\therefore\quad k=m{\omega_0}^2$$

これを用いて，

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{2C_0{V_0}^2}{md^2}}=\sqrt{{\omega_0}^2-\frac{2C_0{V_0}^2}{md^2}}$$

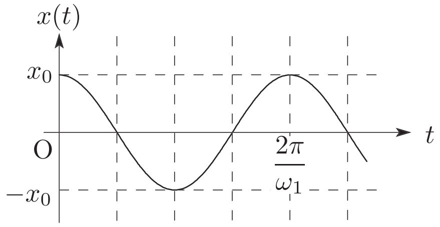
また，振動中心は $x_1=0$ なので，初期条件を満たす解は，

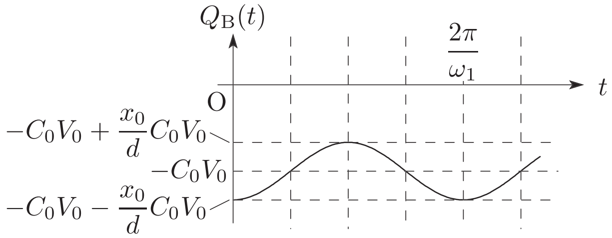
$$x(t)=x_0\cos(\omega_1 t)\qquad\therefore\quad a_1=x_0$$

(6)　$x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{B}}(t) &= -\frac{d + x(t)}{d} C_0 V_0 \\
&= -C_0 V_0 - \frac{x_0}{d} C_0 V_0 \cos(\omega_1 t)
\end{aligned}
$$

$Q_{\mathrm{B}}(t)$ は振動中心が $-C_0V_0$ ，振幅が $\dfrac{x_0}{d}C_0V_0$ で振動する．周期は共に $T = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ なので，グラフはそれぞれ下図のようになる．





【4】

《解答》

(1)

$$I = \frac{V}{R}$$

(2)

$$CV^2 - \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CV^2$$

(3) $Q = CV$ として，Q は一定より，

$$\frac{Q^2}{2\dfrac{d}{d-h}C} - \frac{Q^2}{2C} = -\frac{h}{2d}CV^2$$

(4)

$$\text{引力，大きさ } F = \frac{1}{2d}CV^2$$

(5)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k\left\{x - \left(d + \frac{mg}{k}\right)\right\} - \frac{CV^2}{2d} - mg \\ 0 &= k\frac{mg}{k} - mg \\ \therefore \quad m\ddot{x} &= -k\left\{x - \left(d - \frac{CV^2}{2kd}\right)\right\} = -k(x - x_0) \qquad \therefore \quad x_0 = d - \frac{CV^2}{2kd} \end{aligned}$$

$$\text{振幅} = \frac{CV^2}{2kd}, \quad \text{周期} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$V_{\max} = V, \qquad V_{\min} = V\left(1 - \frac{CV^2}{kd^2}\right)$$

(6)

$$\mathit{\Delta} Q = \mathit{\Delta} C \cdot V = \left(\frac{d}{2x_0 - d} - 1\right)CV$$

$$\therefore \quad W = \mathit{\Delta} Q \cdot V = \frac{C^2V^4}{kd^2 - CV^2}$$

(7)

$$\begin{aligned} 0 &= +k\left\{\frac{mg}{k} + 2(d - x_0)\right\} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{(2x_0 - d)^2}CV^2 - mg \\ 0 &= +k\frac{mg}{k} - mg \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}d$$

補充問題

■自習

【1】

《解答》

(ア) 屈折の法則より，

$$1 \cdot \sin\theta_{i1} = n \cdot \sin\theta_{r1} \qquad \therefore \quad \theta_{i1} = n\theta_{r1}$$

(イ) $\triangle \mathrm{P_1AC_1}$ に注目することにより，$\alpha + \gamma_1 = \theta_{i1}$

(ウ) $\triangle \mathrm{P_1C_1D}$ に注目することにより，$\delta_1 + \theta_{r1} = \gamma_1$

(エ) (ア)〜(ウ) より，θ_{i1} と θ_{r1} を消去すると，

$$\alpha + \gamma_1 = n(\gamma_1 - \delta_1) \qquad \therefore \quad \alpha + (1-n)\gamma_1 + n\delta_1 = 0$$

(オ) 与えられた式を (エ) に代入すると，

$$\frac{h_1}{a} + (1-n)\frac{h_1}{R_1} + n\frac{h_1}{d_1} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{1}{a} + \frac{1-n}{R_1} + \frac{n}{d_1} = 0$$

(カ) 屈折の法則より，

$$n \cdot \sin\theta_{i2} = 1 \cdot \sin\theta_{r2} \qquad \therefore \quad n\theta_{i2} = \theta_{r2}$$

(キ) $\triangle \mathrm{P_2C_2D}$ および $\triangle \mathrm{P_2C_2B}$ に注目することにより，

$$\gamma_2 + \delta_2 = \theta_{i2}, \qquad \gamma_2 + \beta = \theta_{r2}$$

これらと (カ) より，θ_{i2} と θ_{r2} を消去すると，

$$n(\gamma_2 + \delta_2) = \gamma_2 + \beta \qquad \therefore \quad \beta + (1-n)\gamma_2 - n\delta_2 = 0 \qquad \cdots(*)$$

ここで，図 3 より，

$$\begin{cases} \tan\beta = \dfrac{h_2}{b} \\ \sin\gamma_2 = \dfrac{h_2}{R_2} \\ \tan\delta_2 = \dfrac{h_2}{d_2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \beta = \dfrac{h_2}{b} \\ \gamma_2 = \dfrac{h_2}{R_2} \\ \delta_2 = \dfrac{h_2}{d_2} \end{cases}$$

これらを (∗) に代入すると，

$$\frac{h_2}{b} + (1-n)\frac{h_2}{R_2} - n\frac{h_2}{d_2} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{1}{b} + \frac{1-n}{R_2} - \frac{n}{d_2} = 0$$

(ク) $d_1 = d_2$ として，(オ) と (キ) を加えると，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + (1-n)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0 \qquad \therefore \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(n-1)(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

(ケ) $f = \dfrac{R_1R_2}{(n-1)(R_1+R_2)}$

【2】

《解答》

I (1) OA と OB を底辺とする 2 つの三角形における底辺の比と等しいので，

$$\frac{\triangle\mathrm{OAD}\text{ の面積}}{\triangle\mathrm{OBD}\text{ の面積}} = \frac{s-R}{s'-R}$$

(2) 屈折の法則より，

$$n\sin\theta = n'\sin\theta' \qquad \therefore \quad \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{n'}{n}$$

(3) 式 (ア) より，

$$\frac{n'}{n} \fallingdotseq \frac{s-R}{s'-R} \times \frac{s'}{s} \qquad \therefore \quad n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'}\right)$$

(4) 入射角 θ

II (5) 球面 CD で屈折した光が，C から距離 s'' の位置で光軸と交わるとすると，

$$n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s}\right) = n'\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s''}\right)$$

このとき，C$'$ からの距離も s'' とみなせることに注意すると，球面 C$'$D$'$ での屈折でも同様に，

$$n'\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{s''}\right) = n''\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{s'}\right)$$

これらから s'' を消去することにより，

$$\frac{n''}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n''-n'}{R'} + \frac{n'-n}{R}$$

(6) $n=1$，$n''=1$ のとき，

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1-n'}{R'} + \frac{n'-1}{R}$$

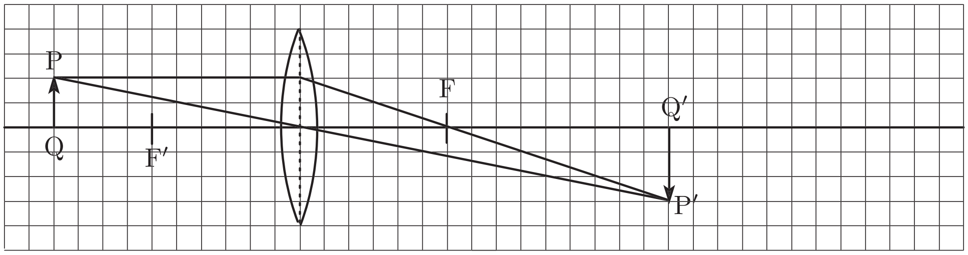
光軸に平行な光では $\dfrac{1}{s} \fallingdotseq 0$ とみなせるので，

$$\frac{1}{s'} \fallingdotseq \frac{1-n'}{R'} + \frac{n'-1}{R} \qquad \therefore \quad s' = \frac{RR'}{(n'-1)(R'-R)}$$

【3】

《解答》

(a)



(b) レンズから像までの距離を b_1 とすると，

$$\frac{1}{20\,\mathrm{cm}}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{12\,\mathrm{cm}} \qquad \therefore \quad b_1=30\,\mathrm{cm}$$

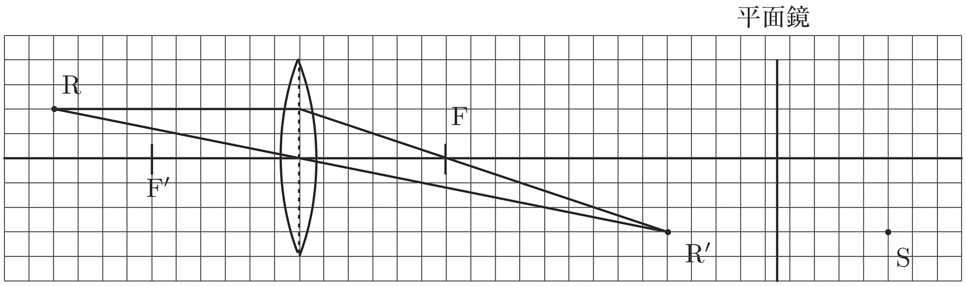
レンズの後方に 30 cm 離れたところに実像ができる．

(c) 結像の倍率は，

$$\frac{\overline{\mathrm{P'Q'}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{30}{20} \qquad \therefore \quad \overline{\mathrm{P'Q'}}=\frac{3}{2}\cdot 4\,\mathrm{cm}=6\,\mathrm{cm}$$

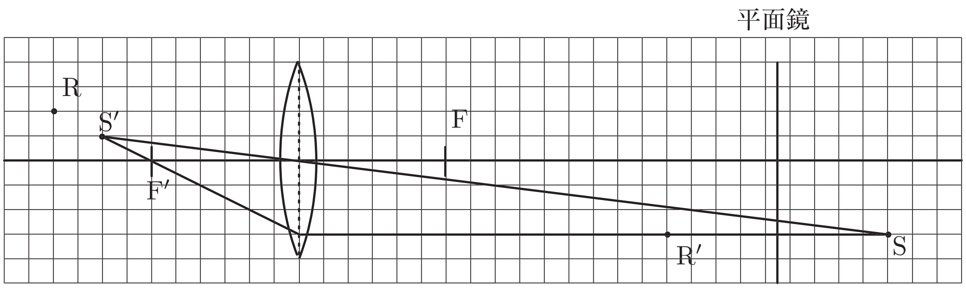
また，倒立像なので，光軸から下に 6 cm 離れたところにできる．

(d)



(e) レンズから S までの距離は，

$$39\,\mathrm{cm}+(39-30)\,\mathrm{cm}=48\,\mathrm{cm}$$



レンズから S′ までの距離を b_2 とすると，

$$\frac{1}{48\,\mathrm{cm}}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{12\,\mathrm{cm}} \qquad \therefore \quad b_2=16\,\mathrm{cm}$$

レンズの前方に 16 cm 離れた位置に実像ができる．

光軸から S，S′ までの距離をそれぞれ y_S，$y_\mathrm{S}{}'$ とすると，結像の倍率は，

$$\frac{y_\mathrm{S}{}'}{y_\mathrm{S}}=\frac{16}{48} \qquad \therefore \quad y_\mathrm{S}{}'=\frac{1}{3}\cdot 6\,\mathrm{cm}=2\,\mathrm{cm}$$

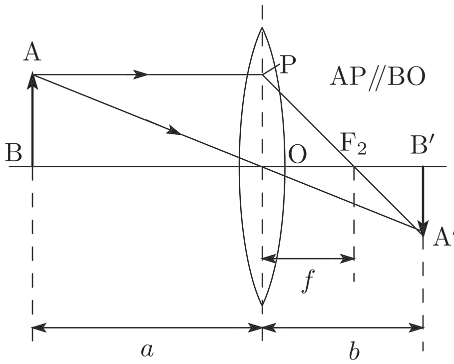
S′ は S の倒立像なので，光軸から上に 2 cm 離れた位置となる．

(f)　(ア)　実像　　(イ)　虚像　　(ウ)　実像

【4】

《解答》

(1)



$\triangle$ABO ∽ $\triangle$ A′B′O より，

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{b}{a} \qquad \therefore \quad \overline{\mathrm{A'B'}} = \frac{b}{a}\overline{\mathrm{AB}}$$

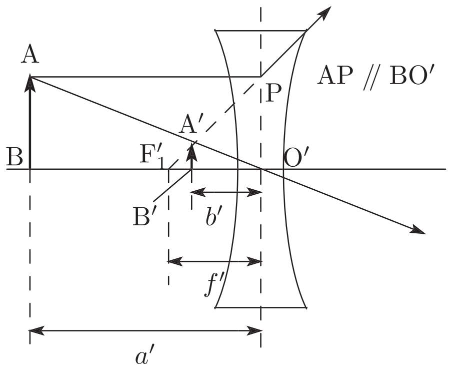
$\triangle$PF$_2$O ∽ $\triangle$ A′F$_2$B′ より，

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{PO}}} = \frac{b-f}{f} \qquad \therefore \quad \overline{\mathrm{A'B'}} = \frac{b-f}{f}\overline{\mathrm{PO}}$$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{PO}}$ をふまえると，

$$\frac{b}{a} = \frac{b-f}{f} \qquad \therefore \quad b = \frac{af}{a-f}$$

(2)



$\triangle$ABO′ ∽ $\triangle$ A′B′O′ より，

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{b'}{a'} \qquad \therefore \quad \overline{\mathrm{A'B'}} = \frac{b'}{a'}\overline{\mathrm{AB}}$$

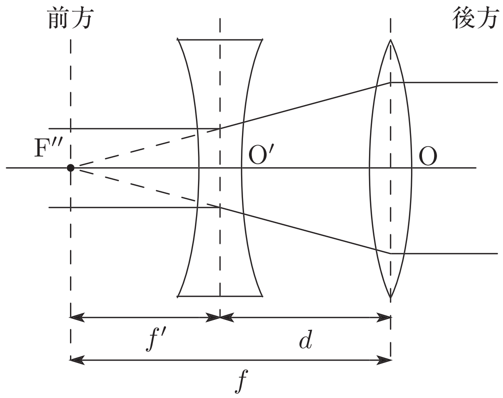
$\triangle \mathrm{PO'F'_1} \backsim \triangle \mathrm{A'B'F'_1}$ より，

$$\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}}{\overline{\mathrm{PO'}}} = \frac{f' - b'}{f'} \qquad \therefore \quad \overline{\mathrm{A'B'}} = \frac{f' - b'}{f'}\overline{\mathrm{PO'}}$$

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{PO'}}$ をふまえると，

$$\frac{b'}{a'} = \frac{f' - b'}{f'} \qquad \therefore \quad b' = \frac{a'f'}{a' + f'}$$

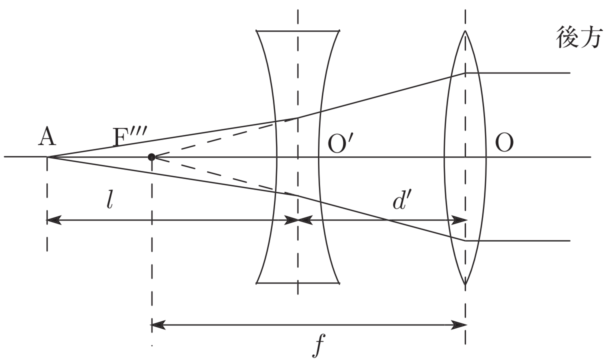
(3)



2 つのレンズの左側の焦点の位置が一致していればよいので，

$$f' + d = f \qquad \therefore \quad d = f - f'$$

(4)



凹レンズによる虚像の位置が凸レンズの左側の焦点の位置と一致していればよいので，

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{-(f - d')} = \frac{1}{-f'} \qquad \therefore \quad d' = f - \frac{lf'}{l + f'}$$

【5】

《解答》

(1) 図 1 より，$a > f_1$ の場合に実像ができ，この場合の結像公式は，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} \quad \cdots ①$$

(2) 図 1 より，結像倍率は $m_1 = \dfrac{b}{a}$ と表せる．
ここで①より b を求めると，

$$b = \frac{af_1}{a - f_1} \qquad \therefore \quad m_1 = \frac{f_1}{a - f_1}$$

(3) 図 2 より，$c < f_2$ の場合に虚像ができ，この場合の結像公式は，

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{-d} = \frac{1}{f_2} \quad \cdots ②$$

(4) 図 2 より，結像倍率は $m_2 = \dfrac{d}{c}$ と表せる．
ここで②より d を求めると，

$$d = \frac{cf_2}{f_2 - c} \qquad \therefore \quad m_2 = \frac{f_2}{f_2 - c}$$

(5) a と f_1 の数値を (2) に代入すると，

$$m_1 = \frac{50}{75 - 50} = 2$$

②に d と f_2 の数値を代入して c を求めると，$c = \dfrac{200}{3}$ mm となる．これと f_2 の数値を (4) に代入すると，

$$m_2 = \frac{100}{100 - \dfrac{200}{3}} = 3$$

よって，総合倍率は，

$$m_{\mathrm{total}} = m_1 m_2 = 6$$