P3JR

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

東大物理重要事項総整理

１章－１　運動の決定方法

問題

■演習

【１】

《解答》

初期条件は $x(0) = x_0$，$v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ で共通である．

(1) (a) 運動方程式 $m\ddot{x} = F$ より，

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \alpha(\text{一定})$$

初期条件を満たす解は，

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + \alpha t \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

(2) (a) 運動方程式 $m\ddot{x} = -f$ より，

$$\ddot{x} = -\frac{f}{m} = -\beta(\text{一定})$$

初期条件を満たす解は，

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - \beta t \\ x(t) = x_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2}\beta t^2 \end{cases}$$

(b) $v(t_1) = 0$ より，

$$v(t_1) = v_0 - \beta t_1 = 0 \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{v_0}{\beta}$$

このときの位置は，

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot \frac{v_0}{\beta} - \frac{1}{2}\beta\left(\frac{v_0}{\beta}\right)^2 = x_0 + \frac{{v_0}^2}{2\beta}$$

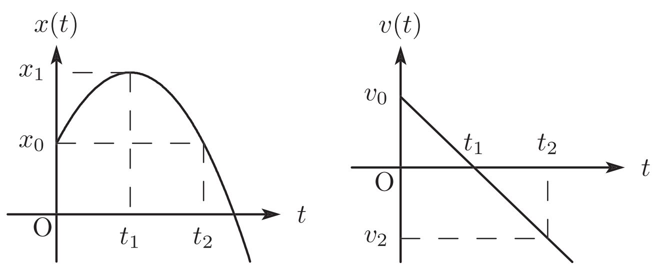
(c) $x(t_2) = x_0$ より，

$$x_0 + v_0 t_2 - \frac{\beta}{2}{t_2}^2 = x_0 \qquad \therefore \quad t_2 = \frac{2v_0}{\beta}$$

このときの速度は，

$$v_2 = v_0 - \beta \cdot \frac{2v_0}{\beta} = -v_0$$

(d)



(3) (a) 運動方程式 $m\ddot{x} = -kt$ より

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}t = -\gamma t$$

初期条件を満たす解は,

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - \dfrac{\gamma}{2}t^2 \\ x(t) = x_0 + v_0 t - \dfrac{\gamma}{6}t^3 \end{cases}$$

(b) $v(t_1) = 0$ より,

$$v_0 - \frac{\gamma}{2}{t_1}^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}}$$

このときの位置は,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + v_0 \cdot \sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}} - \frac{\gamma}{6}\left(\sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}}\right)^3 \\ &= x_0 + \frac{2}{3}v_0\sqrt{\frac{2v_0}{\gamma}} \end{aligned}$$

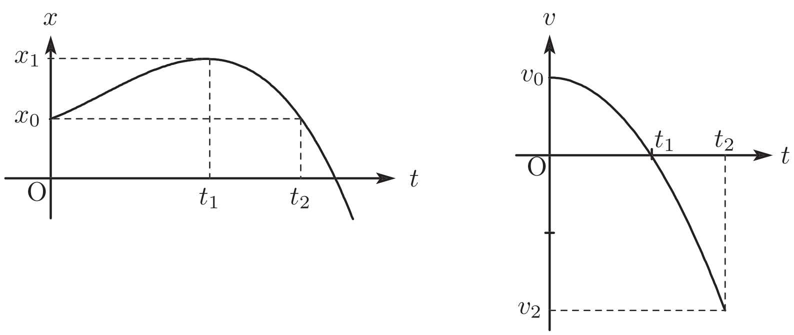
(c) $x(t_2) = x_0$ より,

$$x_0 + v_0 t_2 - \frac{\gamma}{6}{t_2}^3 = x_0 \qquad \therefore \quad t_2 = \sqrt{\frac{6v_0}{\gamma}}$$

このときの速度は,

$$v_2 = v_0 - \frac{\gamma}{2}\left(\sqrt{\frac{6v_0}{\gamma}}\right)^2 = -2v_0$$

(d)



(4) 求めた解で, t が $t - t_0$ に置き換わる.

【2】

《解答》

I (1) $-Bt=\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}\dot{v}(t)&=\frac{\mathrm{d}(Ae^{\theta})}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\\&=Ae^{\theta}\times(-B)\\&=-ABe^{-Bt}\end{aligned}$$

(2) $t=0$ のとき $v=v_0$ かつ $\dot{v}=-\dfrac{v_0}{T}$ なので，

$$\begin{cases}Ae^{0}=v_0\\-ABe^{0}=-\dfrac{v_0}{T}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}A=v_0\\B=\dfrac{1}{T}\end{cases}$$

(3) $v(t)$ を用いると，$\dot{v}(t)=-Bv(t)$ と表せる．よって，速度 v のときの運動方程式は，

$$m\dot{v}=-mBv\quad\cdots\quad \text{抵抗力は } v \text{ に比例している．}$$

II (1) 斜面に平行方向と垂直方向の運動方程式は，

$$\begin{cases}M\alpha=Mg\sin\theta-\mu N-kv\\M\cdot 0=N-Mg\cos\theta\end{cases}$$

これらより，N を消去すると，

$$M\alpha=Mg\sin\theta-\mu Mg\cos\theta-kv\qquad\cdots(*)$$

v が一定値 v_f に収束すると，$\alpha=0$ なので，

$$0=Mg\sin\theta-\mu Mg\cos\theta-kv_f\qquad\therefore\quad v_f=\frac{Mg(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{k}$$

(2) $(*)$ で $v=0\mathrm{m/s}$ のとき，$\alpha=2.5\mathrm{m/s^2}$ なので，

$$2.0\times2.5=2.0\times9.8\times\left(\frac{1}{2}-\mu\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad\therefore\quad\mu=\frac{8\sqrt{3}}{49}\fallingdotseq0.28$$

また，$v_f=2.0\mathrm{m/s}$ なので，

$$2.0=\frac{2.0\times9.8}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{8\sqrt{3}}{49}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad\therefore\quad k=2.5\mathrm{kg/s}$$

《解説》

本問でグラフとして与えられた $v(t)$ を具体的に求めるには次のようにすればよい．

まず，v_f を用いて $(*)$ を書き換えると，

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = kv_f - kv \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}(v - v_f)}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{M}(v - v_f)$$

この微分方程式の一般解は次式で与えられる．

$$v(t) - v_f = (\text{定数}\, C) \times e^{-\frac{k}{M}t} \qquad \therefore \quad v(t) = v_f + Ce^{-\frac{k}{M}t}$$

初期条件 $v(0) = 0$ より，

$$v_f + Ce^0 = 0 \qquad \therefore \quad C = -v_f$$

以上より，時刻 t における速度を表す式は次式となる．

$$\begin{aligned} v(t) &= v_f - v_f e^{-\frac{k}{M}t} \\ &= \frac{Mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k} \times (1 - e^{-\frac{k}{M}t}) \end{aligned}$$

１章－２　運動方程式と束縛条件

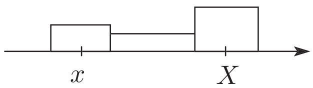
問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 糸の長さが一定なので，右図の座標について，



$$X - x = (\text{定数}) \qquad \therefore \quad \ddot{X} - \ddot{x} = 0$$

これは 2 つの物体の加速度が等しいことを表している．

(2) 糸の左端における張力の大きさを T_1，右端における張力の大きさを T_2 とおく．糸が軽いことをふまえて，糸の運動方程式を立てると，

$$0 = T_2 - T_1 \qquad \therefore \quad T_2 = T_1$$

(3) 加速度の大きさを a，張力の大きさを T とおいて運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} ma = T & \cdots ① \\ Ma = F - T & \cdots ② \end{cases}$$

①，② より，

$$(m+M)a = F \qquad \therefore \quad a = \frac{F}{M+m}$$

(4) a を ① に代入すると，

$$T = m \cdot \frac{F}{M+m} = \frac{m}{M+m}F$$

【2】

《解答》

(1) $\beta = 2\alpha \quad \cdots ①$

(2) 水平方向は右向きを正，鉛直方向は下向きを正とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} M \cdot \alpha = 2T - F \quad \cdots ② \\ M \cdot 0 = Mg + T - N \quad \cdots ③ \\ m \cdot \alpha = F \quad \cdots ④ \\ m \cdot \beta = mg - T \quad \cdots ⑤ \end{cases}$$

(3) ②+④で F を消去し，①を用いて α を消去すると，

$$(M+m) \cdot \frac{\beta}{2} = 2T \qquad \therefore \quad (M+m) \cdot \frac{\beta}{4} = T \quad \cdots ⑥$$

⑤+⑥で T を消去すると，

$$\frac{M+5m}{4}\beta = mg \qquad \therefore \quad \beta = \frac{4m}{M+5m}g$$

初速 0 でおもりが下がり始め，時間 t_0 で h だけ下がったので，

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4m}{M+5m}g \cdot {t_0}^2 = h \qquad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{h(M+5m)}{2mg}}$$

添削課題

《解答》

(イ) $ma_{\mathrm{A}} = mg - T$

(ロ) $Ma_{\mathrm{B}} = Mg - 2T$

(ハ) $2ma_{\mathrm{C}} = 2mg - T$

(ニ) $x_{\mathrm{A}} + 2x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{C}}$

(ホ) $a_{\mathrm{A}} + 2a_{\mathrm{B}} + a_{\mathrm{C}}$

(ヘ) $a_{\mathrm{A}} = \dfrac{8m - 5M}{3M + 8m}g$

(ト) $a_{\mathrm{B}} = \dfrac{3M - 8m}{3M + 8m}g$

(チ) $a_{\mathrm{C}} = \dfrac{8m - M}{3M + 8m}g$

(リ) $T = \dfrac{8Mm}{3M + 8m}g$

(ヌ) B が静止したままのとき，$a_{\mathrm{B}} = 0$ なので，

$$3M - 8m = 0 \qquad \therefore \quad M = \frac{8}{3}m$$

(ル) $\dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{g}{3}\right) \cdot t^2 = -\dfrac{1}{6}gt^2$

(ヲ) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{g}{3} \cdot t^2 = \dfrac{1}{6}gt^2$

配点

(イ)〜(ホ)，(ヌ) 各 8 点

(ヘ)〜(リ) 各 10 点

(ル)，(ヲ) 各 6 点

問題

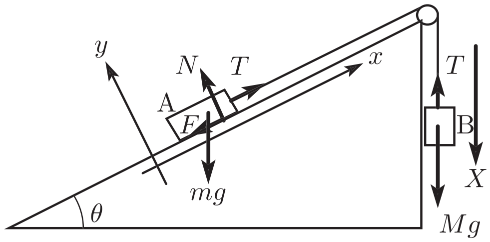
■演習

【1】

《解答》

(a) 下図のように座標と未知量を設定する．F は摩擦力で図の向きを正とし，図と逆向きのときに $F<0$ とする．運動方程式の各成分は，

$$\begin{cases} M\ddot{X} = Mg - T \quad \cdots ① \\ m\ddot{x} = T - F - mg\sin\theta \quad \cdots ② \\ m\cdot 0 = N - mg\cos\theta \qquad \therefore \quad N = mg\cos\theta \end{cases}$$



(b) 物体 A が静止を保つとき，$\ddot{X}=0$ かつ $\ddot{x}=0$．このとき ①，② より，

$$\begin{cases} 0 = Mg - T \\ 0 = T - F - mg\sin\theta \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} T = Mg \\ F = Mg - mg\sin\theta \end{cases}$$

また，F は静止摩擦力なので，

$$\left|\frac{F}{N}\right| \leqq \mu \qquad \therefore \quad -\mu N \leqq F \leqq \mu N$$

F，N を代入して，整理すると，

$$m(\sin\theta - \mu\cos\theta) \leqq M \leqq m(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

(c) B が下降して A が上昇するとき，$\ddot{X}=\alpha$ かつ $\ddot{x}=\alpha$．また F は動摩擦力なので，$F=\mu' N$ と表せる．このとき ①，② より，

$$\begin{cases} M\alpha = Mg - T \quad \cdots ①' \\ m\alpha = T - \mu' mg\cos\theta - mg\sin\theta \quad \cdots ②' \end{cases}$$

①′，②′ より，

$$(M+m)\alpha = (M - m\sin\theta - \mu' m\cos\theta)g \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{M - m(\sin\theta + \mu'\cos\theta)}{M+m}g$$

(d) ①′ を変形して，α を代入すると，

$$\begin{aligned} T &= Mg - M\alpha \\ &= \frac{(1+\sin\theta+\mu'\cos\theta)Mmg}{M+m} \end{aligned}$$

【2】

《解答》

(1) ばねの伸びを r_1，r_2 とおく．弾性力の大きさが F なので，

$$k(r_1+r_2)=F \qquad \therefore \quad r_1+r_2=\frac{F}{k}$$

ばねが均質のとき，伸びは自然長に比例するので，

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{r_2}{r_1} \qquad \therefore \quad \frac{r_1}{l_1}=\frac{r_2}{l_2}$$

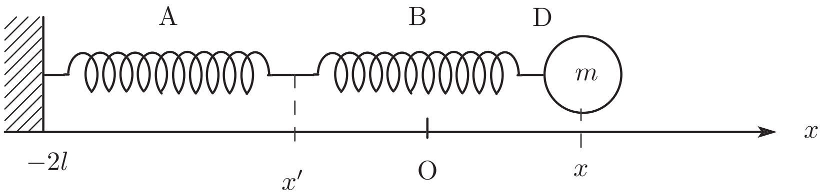
これらより，

$$r_1=\frac{l_1}{l_1+l_2}\cdot\frac{F}{k}, \qquad r_2=\frac{l_2}{l_1+l_2}\cdot\frac{F}{k}$$

ばね定数の定義より，

$$k_1=\frac{F}{r_1}=\frac{l_1+l_2}{l_1}k, \qquad k_2=\frac{F}{r_2}=\frac{l_1+l_2}{l_2}k$$

(2) 自然長のときの小球の位置を原点とした図の座標設定で，ばね A，B の伸びを r_A，r_B とおく．これらの値が負のとき，ばねは縮んでいる．



小球に作用する弾性力は，

$$F=-k_\mathrm{B}r_\mathrm{B} \quad \cdots①$$

ばね A，B の伸びの和が小球の座標 x と一致するので，

$$x=r_\mathrm{A}+r_\mathrm{B} \quad \cdots②$$

r_A を消去する目的で，A，B を接合する微小部分に注目する．この部分の質量を 0 とみなすと，運動方程式の x 成分は，

$$0\times\ddot{x'}=-k_\mathrm{A}r_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}r_\mathrm{B} \qquad \therefore \quad r_\mathrm{A}=\frac{k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}}r_\mathrm{B} \quad \cdots③$$

②，③より，

$$\frac{k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}}r_\mathrm{B}+r_\mathrm{B}=x \qquad \therefore \quad r_\mathrm{B}=\frac{k_\mathrm{A}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}x$$

①に代入すると，

$$F=-\frac{k_\mathrm{A}k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}x \qquad \therefore \quad k_\mathrm{C}=\frac{k_\mathrm{A}k_\mathrm{B}}{k_\mathrm{A}+k_\mathrm{B}}$$

(3) A，B の伸びを r_{A}，r_{B} とおく．XY 間の距離と $2l+R$ の差が伸びの和なので，

$$(2l+R+a)-(2l+R)=r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}} \qquad \therefore \quad r_{\mathrm{A}}+r_{\mathrm{B}}=a$$

小球の運動方程式の x 成分は，

$$m\cdot 0=-k_{\mathrm{A}}r_{\mathrm{A}}+k_{\mathrm{B}}r_{\mathrm{B}}$$

以上より，

$$r_{\mathrm{A}}=\frac{k_{\mathrm{B}}}{k_{\mathrm{A}}+k_{\mathrm{B}}}a, \qquad r_{\mathrm{B}}=\frac{k_{\mathrm{A}}}{k_{\mathrm{A}}+k_{\mathrm{B}}}a$$

(4) A，B の伸びを $r_{\mathrm{A}}{}'$，$r_{\mathrm{B}}{}'$ とおく．小球の運動方程式の x 成分および伸びと a の関係より，

$$\begin{cases} m\alpha=-k_{\mathrm{A}}r_{\mathrm{A}}{}'+k_{\mathrm{B}}r_{\mathrm{B}}{}' \\ r_{\mathrm{A}}{}'+r_{\mathrm{B}}{}'=a \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} r_{\mathrm{A}}{}'=\dfrac{k_{\mathrm{B}}a-m\alpha}{k_{\mathrm{A}}+k_{\mathrm{B}}} \\ r_{\mathrm{B}}{}'=\dfrac{k_{\mathrm{A}}a+m\alpha}{k_{\mathrm{A}}+k_{\mathrm{B}}} \end{cases}$$

２章－２　運動量，力学的エネルギー

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) 求める抵抗力の大きさを F として，運動エネルギー変化と仕事の関係より，

$$0-\frac{m}{2}{v_0}^2=-Fl \qquad \therefore \quad F=\frac{m{v_0}^2}{2l}$$

(2) 求める速さを v_1 として，運動エネルギー変化と仕事の関係より，

$$0-\frac{m}{2}{v_1}^2=-Fa \qquad \therefore \quad v_1=\sqrt{\frac{2Fa}{m}}=v_0\sqrt{\frac{a}{l}}$$

(3) 弾丸と木片が一体となった瞬間の速さを v_2 として，運動量保存より，

$$(m+M)v_2=mv_0 \qquad \therefore \quad v_2=\frac{m}{m+M}v_0$$

一体となるまでの木片の変位を L，弾丸が入り込んだ深さを s として，運動エネルギー変化と仕事の関係より，

$$\begin{cases} \dfrac{m}{2}{v_2}^2-\dfrac{m}{2}{v_0}^2=-F(L+s) \\ \dfrac{M}{2}{v_2}^2-0=F\cdot L \end{cases}$$

以上より，L を消去すると，

$$\frac{m+M}{2}{v_2}^2-\frac{m}{2}{v_0}^2=-Fs \qquad \therefore \quad s=\frac{M}{m+M}l$$

(4) 初速が求める速さ v_3 のとき，弾丸はちょうど a だけ入り込み，木片と一体となって動く．一体となったときの速さを v_4，一体となるまでの木片の変位を L' として，(3) と同様に，

$$\begin{cases} (m+M)v_4=mv_3 \\ \dfrac{m}{2}{v_4}^2-\dfrac{m}{2}{v_3}^2=-F(L'+a) \\ \dfrac{M}{2}{v_4}^2-0=F\cdot L' \end{cases}$$

以上より，v_4，L' を消去して v_3 を求めると，

$$v_3=v_0\sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{a}{l}}$$

《解説 1》運動方程式

II について，木片の進む向きを正とする x 軸を設定する．

木片と弾丸の x 座標を x_1，x_2 とすると，運動方程式の x 成分は，

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = F \\ m\ddot{x}_2 = -F \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{F}{M} \\ \ddot{x}_2 = -\dfrac{F}{m} \end{cases}$$

$F =$(一定) の仮定により，$\ddot{x}_1$，$\ddot{x}_2$ はともに定数となるため，時刻 t の関数として x_1，x_2 を決定することができ，その後で設問に答えることもできる．

《解説 2》運動方程式の変形

簡単のために，$u_1 = \dot{x}_1$，$u_2 = \dot{x}_2$ とおくと，運動方程式は，

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = F & \cdots\text{(a)} \\ m\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -F & \cdots\text{(b)} \end{cases}$$

(i) 運動量と力積

(a) をそれぞれ時刻 $t = t_1$ から t_2 まで積分すると，

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(M\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t \qquad \therefore \quad Mu_1(t_2) - Mu_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t$$

(b) についても同様に積分すると，

$$mu_2(t_2) - mu_2(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t$$

これらを加えて，時刻 t_2 の項を左辺に，時刻 t_1 の項を右辺にまとめると，運動量保存則が得られる．これは，(a)+(b) で F を消去して導くこともできる．

$$M\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mu_1 + mu_2) = 0$$

(ii) 運動エネルギーと仕事

(a) に $u_1 = \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$ をかけてから，$t = t_1$ から t_2 まで積分すると，

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(Mu_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(F\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad \int_{u_1(t_1)}^{u_1(t_2)} Mu_1 \mathrm{d}u_1 = \int_{x_1(t_1)}^{x_1(t_2)} F\mathrm{d}x_1$$

$$\therefore \quad \frac{M}{2}\{u_1(t_2)\}^2 - \frac{M}{2}\{u_1(t_1)\}^2 = \int_{x_1(t_1)}^{x_1(t_2)} F\mathrm{d}x_1$$

(b) についても同様に積分すると，

$$\frac{m}{2}\{u_2(t_2)\}^2 - \frac{m}{2}\{u_2(t_1)\}^2 = -\int_{x_2(t_1)}^{x_2(t_2)} F\mathrm{d}x_2$$

いま導いた 2 式を加えても，M と m では変位が異なり相対変位が 0 でないので，右辺の仕事は 0 とならない．すなわち，運動量とは異なり，系全体の運動エネルギーは変化している．

【2】

《解答》

(1) 水平成分について運動量の保存より，

$$(m+M)v_1 = mv_0 \qquad \therefore \quad v_1 = \frac{m}{m+M}v_0$$

(2) エネルギーの保存より，

$$\frac{m+M}{2}{v_1}^2 + mgh = \frac{m}{2}{v_0}^2 \qquad \therefore \quad h = \frac{{v_0}^2}{2g}\cdot\frac{M}{m+M}$$

(3) 水平方向の運動量の保存とエネルギーの保存より，

$$\begin{cases} mv_2 + MV_2 = mv_0 \\ \dfrac{m}{2}{v_2}^2 + \dfrac{M}{2}{V_2}^2 = \dfrac{m}{2}{v_0}^2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} v_2 = \dfrac{m-M}{m+M}v_0 \\ V_2 = \dfrac{2m}{m+M}v_0 \end{cases}$$

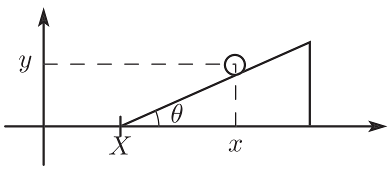
(4) 小物体は右向きに $\dfrac{M}{M+m}v_0$ の速さで，三角台は左向きに $\dfrac{m}{M+m}v_0$ の速さで近付いてきて，小物体が三角台を上っていくにつれてともに減速していき，小物体が最高点に達したときにともに速さ 0 となる．その後に小物体が三角台を下っていくにつれてともに加速していき，小物体は左向きに $\dfrac{M}{M+m}v_0$ の速さで，三角台は右向きに $\dfrac{m}{M+m}v_0$ の速さで遠ざかっていく．

《解説 1》運動方程式

水平右向き正の x 軸と鉛直上向き正の y 軸を床に固定して設定し，小物体の座標を $(x,\ y)$，台の左端の座標を $(X,\ Y)$ とする．台が小物体に及ぼす抗力を N，床が台に及ぼす抗力を P，斜面の傾きを θ とすると，小物体が三角台の斜面上にあるときの運動方程式は，

$$(\text{小物体})\begin{cases} m\ddot{x} = -N\sin\theta \quad \cdots ① \\ m\ddot{y} = N\cos\theta - mg \quad \cdots ② \end{cases}$$

$$(\text{三角台})\begin{cases} M\ddot{X} = N\sin\theta \quad \cdots ③ \\ M\ddot{Y} = P - N\cos\theta - Mg \quad \cdots ④ \end{cases}$$



図より，束縛条件は，

$$\begin{cases} Y = 0 \\ (x-X)\tan\theta = y \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \ddot{Y} = 0 \quad \cdots ⑤ \\ (\ddot{x}-\ddot{X})\tan\theta = \ddot{y} \quad \cdots ⑥ \end{cases}$$

以上の①〜⑥と初期条件より小球が三角台の上にある間の運動が確定する．

《解説 2》保存則の導出

(i) ① +③ より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}+M\dot{X})=0 \qquad \therefore \quad m\dot{x}+M\dot{X}=(一定)$$

これは，運動量の x 成分の保存則を表す．ここで，右辺の一定値が 0 の場合は次のように変形できる．

$$m\dot{x}+M\dot{X}=0 \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mx+MX)=0$$

よって，$mx+MX$ も変化しない保存量である．これは重心の x 座標が一定であることを表している．

(ii) ① $\times\,\dot{x}+$ ② $\times\,\dot{y}+$ ③ $\times\,\dot{X}$ より，

$$m\dot{x}\ddot{x}+m\dot{y}\ddot{y}+M\dot{X}\ddot{X}=-N\dot{x}\sin\theta+N\dot{y}\cos\theta-mg\dot{y}+N\dot{X}\sin\theta \quad \cdots(*)$$

ここで，右辺の N に比例する項は次のように整理できる．

$$-N\dot{x}\sin\theta+N\dot{y}\cos\theta+N\dot{X}\sin\theta=-N\cos\theta\{(\dot{x}-\dot{X})\tan\theta-\dot{y}\}$$

⑥ の束縛条件より，これは 0 となる．$(*)$ の左辺も書き換えていくと，力学的エネルギー保存則が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{M}{2}\dot{X}^2+mgy\right\}=0$$
$$\therefore \quad \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{M}{2}\dot{X}^2+mgy=(一定)$$

ただし，これは小物体が三角台の斜面上にある場合の運動方程式と束縛条件から導出したものなので，<u>小物体が三角台の左端を通過する過程は含まれていない</u>．このため，(2)，(3) で用いた力学的エネルギー保存則の導出としては不完全である．(導出を完全なものにするためにはどのようにすればよいのか考えてみよ．)

添削課題

《解答》

(1) (a) $\begin{cases} Mv - M\cdot 0 = +F\cdot T & \cdots(*) \\ mv - mv_0 = -F\cdot T \end{cases}$

(b) $\dfrac{M}{2}v^2 - \dfrac{M}{2}\cdot 0^2 = +F\cdot b$

(c) $\dfrac{m}{2}v^2 - \dfrac{m}{2}{v_0}^2 = -F(b+a)$

(d) (a) より,

$$(M+m)v - mv_0 = 0 \qquad \therefore \quad v = \frac{m}{M+m}v_0$$

これと (b) より,

$$\frac{M}{2}\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 = Fb \qquad \therefore \quad b = \frac{Mm^2{v_0}^2}{2F(M+m)^2}$$

また, (b)+(c) より,

$$\frac{M+m}{2}\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 - \frac{m}{2}{v_0}^2 = -Fa \qquad \therefore \quad a = \frac{Mm{v_0}^2}{2F(M+m)}$$

さらに $(*)$ より,

$$M\cdot\frac{m}{M+m}v_0 = FT \qquad \therefore \quad T = \frac{Mmv_0}{F(M+m)}$$

(2) A, B それぞれの左端の座標を $X(t)$, $x(t)$ とおくと, 運動方程式の x 成分は,

$$\begin{cases} M\ddot{X} = F \\ m\ddot{x} = -F \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \ddot{X} = \dfrac{F}{M} & (\text{一定}) \\ \ddot{x} = -\dfrac{F}{m} & (\text{一定}) \end{cases}$$

これと初期条件より, $t=t$ における速度と位置は,

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \dfrac{F}{M}t \\ \dot{x}(t) = v_0 - \dfrac{F}{m}t \end{cases}, \qquad \begin{cases} X(t) = \dfrac{F}{2M}t^2 \\ x(t) = v_0 t - \dfrac{F}{2m}t^2 \end{cases}$$

$t=T$ となったときに B は A に対して静止して, A と B の床から見た速度が一致するので,

$$\frac{F}{M}T = v_0 - \frac{F}{m}T \qquad \therefore \quad T = \frac{M}{M+m}\cdot\frac{mv_0}{F}$$

$\dot{X}(T) = v$, $X(T) = b$ なので,

$$v = \frac{F}{M}\times\frac{M}{M+m}\cdot\frac{mv_0}{F} = \frac{m}{M+m}v_0$$

$$b = \frac{F}{2M}\times\left(\frac{M}{M+m}\cdot\frac{mv_0}{F}\right)^2 = \frac{Mm^2{v_0}^2}{2F(M+m)^2}$$

また，$x(T) - X(T) = a$ なので，

$$
\begin{aligned}
a &= v_0 T - \frac{(M+m)F}{2Mm}T^2 \\
&= v_0 \times \frac{M}{M+m} \cdot \frac{mv_0}{F} - \frac{(M+m)F}{2Mm} \times \left(\frac{M}{M+m} \cdot \frac{mv_0}{F} \right)^2 \\
&= \frac{Mm{v_0}^2}{2F(M+m)}
\end{aligned}
$$

配点

(1)　(a)　6 点 ×2,　(b)　8 点,　(c)　8 点,　(d)　6 点 ×4,

(2)　6 点× 8

３章－１　復元力と単振動

問題

■演習

【１】

《解答》

座標軸設定①

ばねの自然長の位置を原点として，鉛直下向きに x 軸を設定する．この場合，物体の位置とばねの伸びは一致する．運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -kx + mg \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

これより，小球は中心が $x = \dfrac{mg}{k}$ で角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることが分かる．振幅を $A(>0)$，初期位相を α とすると，一般解は，

$$x = \frac{mg}{k} + A\sin(\omega t + \alpha) \qquad \therefore \quad \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

(1) 初期条件 $x(0) = \dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}(0) = -v_0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{k} = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ -v_0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{\omega} \\ \alpha = \pi \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \pi) = \frac{mg}{k} - v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) 初期条件 $x(0) = \dfrac{mg}{k} + a$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{k} + a = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = a \\ \alpha = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mg}{k} + a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3) 初期条件 $x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{mg}{k} + A\sin\alpha \\ 0 = A\omega\cos\alpha \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} A = \dfrac{mg}{k} \\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

座標軸設定②

つり合い位置を原点として，鉛直下向きに x 軸を設定する．この場合，ばねの伸びは，$\dfrac{mg}{k}+x$ と表せる．運動方程式は，

$$m\ddot{x}=-k\left(x+\frac{mg}{k}\right)+mg \qquad \therefore \quad \ddot{x}=-\frac{k}{m}x$$

これより，小球は中心が $x=0$ で角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動をすることが分かる．振幅を $A(>0)$，初期位相を α とすると，一般解は，

$$x=A\sin(\omega t+\alpha) \qquad \therefore \quad \dot{x}=A\omega\cos(\omega t+\alpha)$$

(1) 初期条件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=-v_0$ より，

$$\begin{cases}0=A\sin\alpha\\ -v_0=A\omega\cos\alpha\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}A=\dfrac{v_0}{\omega}\\ \alpha=\pi\end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x=\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t+\pi)=-v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(2) 初期条件 $x(0)=a$，$\dot{x}(0)=0$ より，

$$\begin{cases}a=A\sin\alpha\\ 0=A\omega\cos\alpha\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}A=a\\ \alpha=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

(3) 初期条件 $x(0)=-\dfrac{mg}{k}$，$\dot{x}(0)=0$ より，

$$\begin{cases}-\dfrac{mg}{k}=A\sin\alpha\\ 0=A\omega\cos\alpha\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}A=\dfrac{mg}{k}\\ \alpha=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

よって，初期条件を満たす解は，

$$x=\frac{mg}{k}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

【2】

《解答》

(1) ばね定数を k とすると，A の運動方程式は，

$$m\cdot 0=-ka+mg \qquad \therefore \quad k=\frac{mg}{a}$$

(2) 求める力の大きさを N_0 とすると，B が床から受ける力の大きさも N_0 である．(1) の状態における B の運動方程式は，

$$m\cdot 0=+ka-N_0+mg \qquad \therefore \quad N_0=2mg$$

(3) B が床から離れないと仮定すると，A，B の運動方程式は，

$$\begin{cases}\mathrm{A}：m\ddot{y}=-k(y+a)+mg=-ky \\ \mathrm{B}：m\cdot 0=+k(y+a)-N+mg\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases}\ddot{y}=-\dfrac{k}{m}y \\ N=k(y+a)+mg\end{cases}$$

(a) A の運動は，中心が $y=0$ で，角振動数 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動と分かる．初期条件 $y(0)=a$，$\dot{y}(0)=0$ を満たす解は，

$$y(t)=a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

(b) $y(t_0)=0$ となるとき，

$$\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t_0=0 \qquad \therefore \quad \sqrt{\frac{g}{a}}t_0=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n\text{ は 0 以上の整数})$$

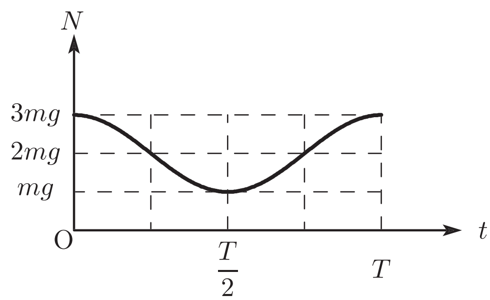
このときの速さは，

$$\left|\dot{y}(t_0)\right|=\left|-\sqrt{\frac{g}{a}}a\sin\sqrt{\frac{g}{a}}t_0\right|=\sqrt{ga}$$

(c) (a) をふまえると，

$$\begin{aligned}N&=k(a\cos\omega t+a)+mg \\ &=mg\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t+2mg\end{aligned}$$

これをグラフに描くと右図のようになる．



(4) b だけ縮めて静かに離した場合の解は，$y(t) = b\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}t$ なので，

$$
\begin{aligned}
N &= k(y+a) + mg = mg\left(2 + \frac{b}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t\right) \\
&= \frac{bmg}{a}\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t + 2mg
\end{aligned}
$$

B が床から離れないための条件 $N_{\min} \geqq 0$ より，

$$
\frac{bmg}{a}\cdot(-1) + 2mg \geqq 0 \qquad \therefore \quad b \leqq 2a
$$

３章－２　円軌道への束縛，剛体の運動

問題

■演習

【１】

《解答》

(1)　$r\dot{\theta}=v$ とおくと，小球の運動方程式は，

$$\begin{cases}\text{接線成分}: m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg\sin\theta & \cdots① \\ \text{向心成分}: m\dfrac{v^2}{r}=T-mg\cos\theta & \cdots② \end{cases}$$

(2)　①に $v=r\dot{\theta}$ をかけると，

$$mv\dot{v}=-mg\sin\theta\cdot r\dot{\theta}$$

ここで，合成関数の微分公式を利用すると，

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m}{2}v^2\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\dfrac{m}{2}v^2\right)\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mv\dot{v} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mgr\cos\theta)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(mgr\cos\theta)\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-mgr\sin\theta\cdot\dot{\theta}\end{cases}$$

以上より，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}v^2-mgr\cos\theta\right)=0 \qquad \therefore\quad \frac{m}{2}v^2-mgr\cos\theta=E_0(\text{定数})$$

さらに，初期条件 $\theta(0)=0$，$v(0)=v_0$ を考慮すると，

$$\frac{m}{2}v^2-mgr\cos\theta=\frac{m}{2}{v_0}^2-mgr \qquad \cdots③$$

(3)　②，③より v^2 を消去して整理すると，

$$T=m\frac{{v_0}^2}{r}+mg(3\cos\theta-2)$$

(4)　$\dfrac{m}{2}v^2=K$ とおくと，③より，

$$K=\frac{m}{2}{v_0}^2+mgr(\cos\theta-1)$$

小球が運動を続けるために必要な条件は，任意の θ で $K>0$ すなわち $K_{\min}>0$ なので，

$$\frac{m}{2}{v_0}^2+mgr(\cos\pi-1)>0 \qquad \therefore v_0>\sqrt{4gr}$$

また，糸の場合は任意の θ で $T\geqq 0$ すなわち $T_{\min}\geqq 0$ も必要なので，

$$m\frac{{v_0}^2}{r}+mg(3\cos\pi-2)\geqq 0 \qquad \therefore\quad v_0\geqq\sqrt{5gr}$$

これらより，糸の場合に円運動を続けるための条件は $v_0 \geqq \sqrt{5gr}$ となる．一方，棒の場合は $T < 0$ になり得るので， $K_{\rm min} > 0$ の条件だけでよい．

以上より，円運動を続けるための条件は，

$$\begin{cases} \text{糸の場合} & \cdots v_0 \geqq \sqrt{5gr} \\ \text{棒の場合} & \cdots v_0 > \sqrt{4gr} \end{cases}$$

(5) 微小振動では $|\theta| \ll 1$ なので，① で $\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できる．$v = r\dot{\theta}$ も用いると，

$$m \cdot r\ddot{\theta} = -mg\theta \qquad \therefore \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}\theta$$

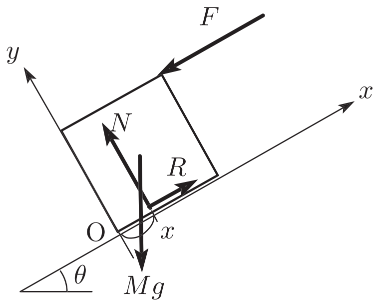
この微小振動は，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ の単振動と分かり，

$$(\text{周期}) = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

【2】

《解答》

(1) 斜面から直方体に働く垂直抗力を N[N]，摩擦力を R[N]，直方体の左下端から抗力の作用点までの距離を x[m] とする．静止を保つときの力のつり合いより，



$$R = Mg\sin\theta, \qquad N = Mg\cos\theta$$

また，O のまわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0 = Nx - Mg\cos\theta\cdot\frac{b}{2} + Mg\sin\theta\cdot\frac{h}{2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\dfrac{Mg}{2}(b\cos\theta - h\sin\theta)}{Mg\cos\theta}$$

(イ) 抗力が底面内で作用して，直方体が倒れ始めないための条件 $x \geqq 0$ より，

$$b\cos\theta - h\sin\theta \geqq 0 \qquad \therefore \quad \tan\theta \leqq \frac{b}{h}$$

(ロ) 滑り始めないための条件 $R \leqq \mu N$ より，

$$Mg\sin\theta \leqq \mu Mg\cos\theta \qquad \therefore \quad \tan\theta \leqq \mu$$

(2) 直方体の加速度の斜面下向き成分を a として，運動方程式は，

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - \mu' N \\ M\cdot 0 = N - Mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore \quad Ma = Mg\sin\theta - \mu' Mg\cos\theta$$

ここでは $\tan\theta = \mu$ なので，

$$\sin\theta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

以上より，

$$Ma = Mg\cdot\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} - \mu' Mg\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \qquad \therefore \quad a = \frac{\mu - \mu'}{\sqrt{1+\mu^2}}g$$

直方体はこの加速度を保って滑り下りていく．

(3) 静止を保つときの運動方程式は，

$$\begin{cases} 0 = Mg\sin\theta + F - R \\ 0 = N - Mg\cos\theta \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} R = Mg\sin\theta + F \\ N = Mg\cos\theta \end{cases}$$

また，O のまわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0 = Nx - Mg\cos\theta\cdot\frac{b}{2} + Mg\sin\theta\cdot\frac{h}{2} + Fh$$

$$\therefore \quad x = \frac{\dfrac{Mg}{2}(b\cos\theta - h\sin\theta) - Fh}{Mg\cos\theta}$$

(ハ) 直方体が倒れ始めないための条件 $x \geqq 0$ より，

$$F \leqq \frac{Mg}{2}\left(\frac{b}{h}\cos\theta - \sin\theta\right)$$

(ニ) 滑り始めないための条件が $R \leqq \mu N$ なので，滑り出してしまうための条件は形式上 $R > \mu N$ として与えられ，

$$Mg\sin\theta + F > \mu Mg\cos\theta \qquad \therefore \quad F > Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta)$$

(ホ) 倒れ始めることなく滑り出させるような F が存在するための条件は，

$$Mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) < \frac{Mg}{2}\left(\frac{b}{h}\cos\theta - \sin\theta\right) \qquad \therefore \quad \tan\theta > 2\mu - \frac{b}{h}$$

添削課題

《解答》

(1) 張力を T_0 として，運動方程式の鉛直上向き成分は，

$$\begin{cases} M\cdot 0 = kd - Mg - T_0 \\ m\cdot 0 = T_0 - mg \end{cases}$$

これらより T_0 を消去して，

$$0 = kd - (M+m)g \qquad \therefore \quad d = \frac{(M+m)g}{k}$$

(2) つりあいから x_{A} 上方で，ばねの伸びは $d - x_{\mathrm{A}}$ なので，

$$\begin{cases} Ma_{\mathrm{A}} = k\left\{\dfrac{(M+m)g}{k} - x_{\mathrm{A}}\right\} - T - Mg \quad \cdots ① \\ ma_{\mathrm{B}} = T - mg \quad \cdots ② \end{cases}$$

(3) 糸がたるまないとき $x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}}$ なので，$\ddot{x}_{\mathrm{B}} = \ddot{x}_{\mathrm{A}}$ すなわち $a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}}$ となる．
このとき，① +② より，

$$(M+m)\ddot{x}_{\mathrm{A}} = -kx_{\mathrm{A}} \qquad \therefore \quad \ddot{x}_{\mathrm{A}} = -\frac{k}{M+m}x_{\mathrm{A}}$$

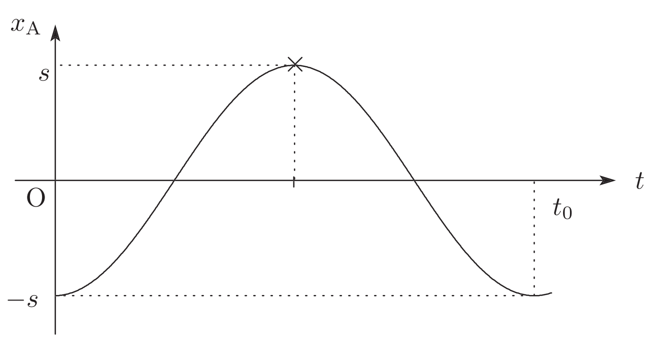
これより，A(及び B) の運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}$ の単振動で，

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

初期条件 $x_{\mathrm{A}}(0) = -s$，$\dot{x}_{\mathrm{A}}(0) = 0$ を考慮すると，

$$x_{\mathrm{A}}(t) = -s\cos(\omega t)$$

これを図示すると下図のようになる．



(4) 糸がたるまないで $a_\mathrm{A}=a_\mathrm{B}$ のとき，① $\times m-$ ② $\times M$ より，

$$0=m(mg-kx_\mathrm{A}-T)-M(T-mg) \qquad \therefore \quad T=m\left(g-\frac{kx_\mathrm{A}}{M+m}\right)$$

これより，x_A が最大のとき，T は最小とわかり，

$$t_\mathrm{m}=\frac{1}{2}t_0=\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

このとき，$x_\mathrm{A}=s$ なので，

$$T_\mathrm{m}=m\left(g-\frac{ks}{M+m}\right)$$

(5) $s=s_\mathrm{m}$ のとき $T_\mathrm{m}=0$ となるので，

$$m\left(g-\frac{ks_\mathrm{m}}{M+m}\right)=0 \qquad \therefore \quad s_\mathrm{m}=\frac{(M+m)g}{k}$$

(6) (5) の結果に数値を代入すると

$$\begin{aligned} s_\mathrm{m}&=\frac{(5.0\times10^{-2}[\mathrm{kg}]+5.0\times10^{-2}[\mathrm{kg}])\times9.8[\mathrm{m/s^2}]}{9.8[\mathrm{N/m}]}\\ &=1.0\times10^{-1}[\mathrm{m}]\end{aligned}$$

s が s_m より大きいのでたるむ.

配点

100 点

(1)10 点，(2)20 点，(3)30 点，(4)15 点，(5)15 点，(6)10 点

４章－１　理想気体，熱と仕事

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) $\varDelta p = mv_{\mathrm{d}} - m \cdot (-v_{\mathrm{d}}) = 2mv_{\mathrm{d}}$

(2) $v_{\mathrm{d}} = v_{\mathrm{d0}}$ のとき，エネルギーの保存より，

$$0 + mgh = \frac{m}{2}{v_{\mathrm{d0}}}^2 + 0 \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{d0}} = \sqrt{2gh}$$

下面に衝突してから速度の z 成分が 0 となるまでの時間が $\dfrac{1}{2}t_1$ なので，

$$0 = v_{\mathrm{d}} - g \cdot \frac{1}{2}t_1 \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{2v_{\mathrm{d}}}{g}$$

下面は分子から (1) の $\varDelta p$ と等しい大きさの力積を受け，時間 $\varDelta t$ の間の衝突回数は $\dfrac{\varDelta t}{t_1}$ なので，

$$w = \varDelta p \cdot \frac{\varDelta t}{t_1} = mg\varDelta t$$

(3) 下面と上面の間の往復時間を t とすると，下面から上面に到達するのに $\dfrac{1}{2}t$ かかるので，

$$h = v_{\mathrm{d}} \cdot \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}t\right)^2 \qquad \therefore \quad gt^2 - 4v_{\mathrm{d}}t + 8h = 0$$

これの小さい方の解が，ここで注目する時間なので，

$$t = \frac{2(v_{\mathrm{d}} - \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh})}{g}$$

これと (1) を用いて，

$$w_{\mathrm{d}} = \varDelta p \cdot \frac{\varDelta t}{t} = \frac{v_{\mathrm{d}}}{v_{\mathrm{d}} - \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}} \cdot mg\varDelta t$$

また，上面との衝突における分子の運動量の変化の大きさを $\varDelta p'$ とすると，

$$\varDelta p' = |m(-v_{\mathrm{u}}) - mv_{\mathrm{u}}| = 2mv_{\mathrm{u}} \quad \text{ただし} \quad v_{\mathrm{u}} = \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}$$

$$\therefore \quad w_{\mathrm{u}} = \varDelta p' \cdot \frac{\varDelta t}{t} = \frac{\sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}}{v_{\mathrm{d}} - \sqrt{{v_{\mathrm{d}}}^2 - 2gh}} \cdot mg\varDelta t$$

(4) (2) の場合，上面に加わる力積は 0 なので，

$$w' = w - 0 = mg\varDelta t$$

(3) の場合は，

$$w' = w_{\mathrm{d}} - w_{\mathrm{u}} = mg\mathit{\Delta} t$$

よって，上面に届くか否かによらずに，各分子が下面と上面に及ぼす力の差は mg となる．N 個の分子全体が下面と上面に及ぼす力の差は，

$$P'S = mg \cdot N \qquad \therefore \quad P' = \frac{Nmg}{S}$$

【2】

《解答》

(1) 気体からの力を受けたピストンが，力のつりあいを保ちつつ一定の大気圧に逆らって静かに上昇するから．

(2) 図 1 での状態方程式は，

$$p_0SL = nRT_0 \qquad \therefore \quad n = \frac{p_0SL}{RT_0}$$

(3) 図 2 での状態方程式と (2) より，

$$T_1 = \frac{p_0 \cdot 2SL}{nR} = 2T_0$$

(4) $W_1 = p_0SL$

(5) (2)，(3) に注意して，内部エネルギー変化は，

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}p_0SL$$

熱力学第 1 法則より，

$$\Delta U_1 = +Q_1 - W_1 \qquad \therefore \quad Q_1 = \frac{5}{2}p_0SL$$

(6) 力のつりあいより，

$$0 = p_2S - p_0S - mg \qquad \therefore \quad p_2 = p_0 + \frac{mg}{S}$$

(7) 図 3 の気体の状態方程式と (2)，(6) より，

$$T_2 = \frac{p_2SL}{nR} = \left(1 + \frac{mg}{p_0S}\right)T_0$$

(8) (2)，(7) に注意して，内部エネルギー変化は，

$$\Delta U_2 = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_0) = \frac{3}{2}mgL$$

また，定積変化で仕事は 0 なので，

$$\Delta U_2 = +Q_2 + 0 \qquad \therefore \quad Q_2 = \frac{3}{2}mgL$$

4章－2　熱サイクル

問題

■演習

【1】

《解答》

I (1) (a) 状態方程式より，

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{1\,\mathrm{mol} \times 8.3\,\mathrm{J/mol\cdot K} \times 300\,\mathrm{K}}{1\,\mathrm{m^3}}$$
$$= 2.5 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$$

(b) $\dfrac{3}{2}R = 12\,\mathrm{J/mol\cdot K}$

(c) 変化前後の状態方程式は，

$$\begin{cases} p_0 V_0 = nRT \\ (p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V) = nR(T_0 + \Delta T) \end{cases}$$

これらの差をとり，$\Delta V \Delta p$ を無視すると，

$$nR\Delta T = p_0 \Delta V + V_0 \Delta p \quad \cdots ①$$

(d) ①で $\Delta T = 0$ のとき，

$$\Delta p = -\frac{p_0}{V_0} \times \Delta V \quad \cdots ②$$

(e) 熱力学第 1 法則より，

$$nC_V \Delta T = 0 - p_0 \Delta V \qquad \therefore \quad \Delta T = -\frac{p_0}{nC_V}\Delta V$$

これを①に代入すると，

$$-\frac{R}{C_V}p_0 \Delta V = p_0 \Delta V + V_0 \Delta p \qquad \therefore \quad \Delta p = -\left(\frac{R}{C_V} + 1\right)\frac{p_0}{V_0}\Delta V \quad \cdots ③$$

これを，$\Delta p = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0}\Delta V$ と比べて，

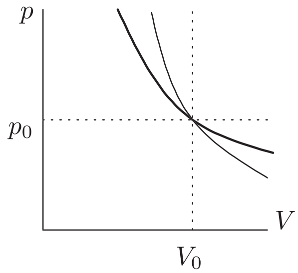
$$\gamma = \frac{R}{C_V} + 1 = \frac{C_V + R}{C_V}$$

(f) ①を $nRT_0 = p_0 V_0$ で割って，$\Delta p = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0}\Delta V$ を代入すると，

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta V}{V_0} - \gamma \frac{\Delta V}{V_0} \qquad \therefore \quad \Delta T = -(\gamma - 1)\frac{T_0}{V_0} \cdot \Delta V$$

(g) (f) で $\gamma - 1 > 0$ なので，容積が増えると温度は下がる．

(2) ②，③からわかるとおり，等温曲線よりも断熱曲線の方が傾きが急なので次図.



II (1) 左右の部屋の容積変化は，$\Delta V_{\mathrm{L}} = Sx$ および $\Delta V_{\mathrm{R}} = -Sx$ と表せるので，

$$\begin{cases} \Delta p_{\mathrm{L}} = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0} \Delta V_{\mathrm{L}} = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0} Sx \\ \Delta p_{\mathrm{R}} = -\gamma \dfrac{p_0}{V_0} \Delta V_{\mathrm{R}} = \gamma \dfrac{p_0}{V_0} Sx \end{cases}$$

(2) $F = (p_0 + \Delta p_{\mathrm{L}})S - (p_0 + \Delta p_{\mathrm{R}})S$
$\quad = -\dfrac{2\gamma p_0 S^2}{V_0} x$

(3) 運動方程式は，

$$M\ddot{x} = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{V_0} x \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{2\gamma p_0 S^2}{MV_0} x$$

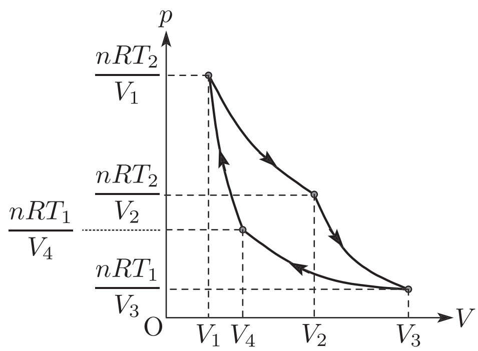
運動は，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{2\gamma p_0 S^2}{MV_0}}$ の単振動で，初期条件 $x(0) = A$，$\dot{x}(0) = 0$ を満たす解は，

$$x = A\cos(\omega t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2\gamma p_0 S^2}{MV_0}} t\right)$$

【2】

《解答》

(1)　過程①，③は等温曲線，過程②，④は断熱曲線となるので下図.



(2)　熱力学第 1 法則より，

$$0 = +Q_1 - W_1 \qquad \therefore \quad Q_1 = W_1$$

同様に，

$$0 = -Q_3 + W_3 \qquad \therefore \quad Q_3 = W_3$$

(3)　過程① の途中における圧力は，状態方程式より $p = \dfrac{nRT_2}{V}$ と表せることをふまえると，

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\mathrm{d}V \\ &= nRT_2(\log V_2 - \log V_1) \\ &= nRT_2 \log \frac{V_2}{V_1} \end{aligned}$$

同様に，過程③ の途中における圧力は，$p = \dfrac{nRT_1}{V}$ と表せるので，

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{V_3}^{V_4} (-p) \cdot \mathrm{d}V \\ &= \int_{V_4}^{V_3} \frac{nRT_1}{V}\mathrm{d}V \\ &= nRT_1(\log V_3 - \log V_4) \\ &= nRT_1 \log \frac{V_3}{V_4} \end{aligned}$$

(4)　断熱変化である過程②，④について，熱力学第 1 法則より，

$$\left\{ \begin{array}{l} nC_V(T_1 - T_2) = 0 - W_2 \\ nC_V(T_2 - T_1) = 0 + W_4 \end{array} \right. \qquad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} W_2 = nC_V(T_2 - T_1) \\ W_4 = nC_V(T_2 - T_1) \end{array} \right.$$

(5)　過程②，④について，

$$T_2{V_2}^{\gamma-1} = T_1{V_3}^{\gamma-1}, \qquad T_2{V_1}^{\gamma-1} = T_1{V_4}^{\gamma-1}$$

これらより，

$$\frac{T_2{V_2}^{\gamma-1}}{T_2{V_1}^{\gamma-1}} = \frac{T_1{V_3}^{\gamma-1}}{T_1{V_4}^{\gamma-1}} \qquad \therefore \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

(6)　(3)，(5) より，

$$\frac{W_3}{W_1} = \frac{nRT_1 \log \dfrac{V_3}{V_4}}{nRT_2 \log \dfrac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1}{T_2}$$

(7)　(4)，(6) の結果から，

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{T}} &= W_1 + W_2 - W_3 - W_4 \\ &= W_1 + nC_V(T_2 - T_1) - \frac{T_1}{T_2}W_1 - nC_V(T_2 - T_1) \\ &= W_1\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) \end{aligned}$$

(8)　(2)，(7) より，

$$\frac{W_{\mathrm{T}}}{Q_1} = \frac{W_1}{Q_1}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

添削課題

《解答》

(1) 気体のモル数を n とすると，温度が T_1 のときの状態方程式は，

$$P_1 \cdot lS = nRT_1 \qquad \therefore \quad n = \frac{P_1 Sl}{RT_1}$$

(2) ばね定数を k，B が K_1 を離れるときの気体の圧力を P_2 として，B と C が受ける力のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = P_2 S - kl \\ 0 = kl - P_0 S \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} k = \dfrac{P_0 S}{l} \\ P_2 = P_0 \end{cases}$$

このときの気体の温度を T_2 とすると，状態方程式は，

$$P_0 \cdot lS = \frac{P_1 Sl}{RT_1} \cdot RT_2 \quad \therefore \quad T_2 = \frac{P_0}{P_1} T_1$$

(3) 気体の内部エネルギーを，温度が T_1 のときは U_1，T_2 のときは U_2 とすると，

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{3}{2} RT_1 \cdot \dfrac{P_1 Sl}{RT_1} = \dfrac{3}{2} P_1 Sl \\ U_2 = \dfrac{3}{2} R \cdot \dfrac{P_0}{P_1} T_1 \cdot \dfrac{P_1 Sl}{RT_1} = \dfrac{3}{2} P_0 Sl \end{cases}$$

B が K_1 を離れるまでに気体に与えた熱量を Q_{12} とすると，熱力学第 1 法則により $U_2 - U_1 = Q_{12} - 0$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{3}{2} P_0 Sl - \frac{3}{2} P_1 Sl \\ &= \frac{3}{2} Sl(P_0 - P_1) \end{aligned}$$

(4) C が K_2 に接触したときの温度を T_3 とすると，状態方程式は，

$$P_0 \cdot 2lS = \frac{P_1 Sl}{RT_1} \cdot RT_3 \quad \therefore \quad T_3 = \frac{2P_0}{P_1} T_1$$

(5) 温度が T_3 のときの気体の内部エネルギーを U_3 とすると，

$$U_3 = \frac{3}{2} R \cdot \frac{2P_0}{P_1} T_1 \cdot \frac{P_1 Sl}{RT_1} = 3P_0 Sl$$

B が K_1 を離れてから C が K_2 に接触するまでに気体に与えた熱量を Q_{23} とすると，熱力学第 1 法則により $U_3 - U_2 = Q_{23} - P_0 Sl$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \left(3P_0 Sl - \frac{3}{2} P_0 Sl\right) + P_0 Sl \\ &= \frac{5}{2} P_0 Sl \end{aligned}$$

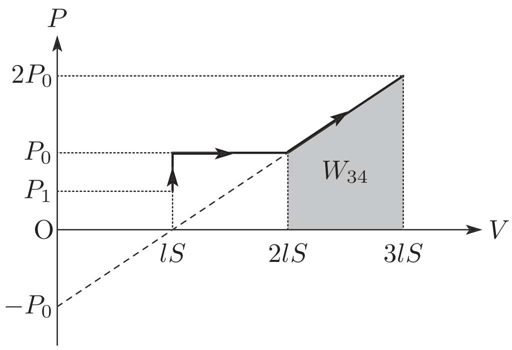
(6) C が K_2 に接触した後，ばねの縮みが x となったときの気体の体積を V とすると，

$$V = S(l+x) \qquad \therefore \quad x = \frac{V}{S} - l$$

このときの気体の圧力を P として，B が受ける力のつりあいより，

$$0 = PS - \frac{P_0 S}{l} \cdot \left(\frac{V}{S} - l\right) \qquad \therefore \quad P = \frac{P_0}{Sl}V - P_0$$

C が K_2 に接触する前の変化も含めて $P-V$ グラフを描くと下図のようになる．



(7) B が K_2 から l だけ離れた位置まで移動したとき，気体の圧力は $2P_0$ となっている。このときの気体の温度を T_4 とすると，状態方程式は，

$$2P_0 \cdot 3lS = \frac{P_1 Sl}{RT_1} \cdot RT_4 \quad \therefore \quad T_4 = \frac{6P_0}{P_1}T_1$$

このときの気体の内部エネルギーを U_4 とすると，

$$U_4 = \frac{3}{2}R \cdot \frac{6P_0}{P_1}T_1 \cdot \frac{P_1 Sl}{RT_1} = 9P_0 Sl$$

C が K_2 に接触した後で気体がした仕事を W_{34} とすると，

$$W_{34} = \frac{1}{2}(P_0 + 2P_0) \cdot Sl = \frac{3}{2}P_0 Sl$$

C が K_2 に接触した後で気体に与えた熱量を Q_{34} とすると，熱力学第 1 法則により $U_4 - U_3 = Q_{34} - W_{34}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} Q_{34} &= (9P_0 Sl - 3P_0 Sl) + \frac{3}{2}P_0 Sl \\ &= \frac{15}{2}P_0 Sl \end{aligned}$$

配点

100 点

(1)，(4) 各 10 点

(2)，(3)，(5)，(6) 各 15 点

(7)20 点

５章－１　電場と電位，コンデンサーの構造

問題

■演習

【１】

《解答》

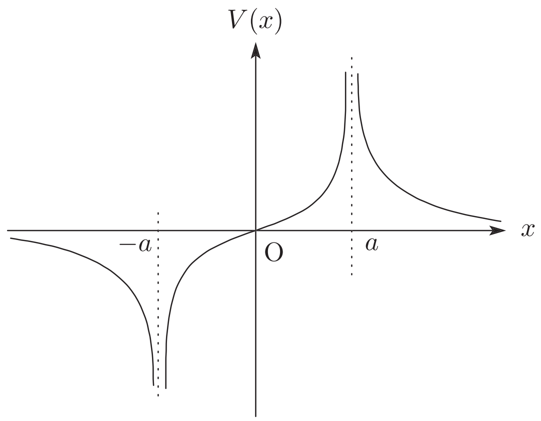
(1) $-x$ の向きに，

$$
\begin{aligned}
E &= k\frac{Q}{(\sqrt{a^2+b^2})^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times 2 \\
&= \frac{2kQa}{(a^2+b^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(2) 各領域での電位を合成すると，

$$
V(x) = \begin{cases}
k\dfrac{-Q}{(-a)-x} + k\dfrac{Q}{a-x} = -\dfrac{2kQa}{x^2-a^2} & [x < -a \text{ のとき}] \\
k\dfrac{-Q}{x-(-a)} + k\dfrac{Q}{a-x} = \dfrac{2kQx}{a^2-x^2} & [-a < x < a \text{ のとき}] \\
k\dfrac{-Q}{x-(-a)} + k\dfrac{Q}{x-a} = \dfrac{2kQa}{x^2-a^2} & [x > a \text{ のとき}]
\end{cases}
$$

これらをグラフに描くと下図のようになる．



(3) $V(y) = k\dfrac{-Q}{\sqrt{a^2+y^2}} + k\dfrac{Q}{\sqrt{a^2+y^2}} = 0$

(4) W は位置エネルギー eV の変化と一致するので，

$$
W = e\cdot\frac{2kQ\cdot\dfrac{a}{2}}{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} - e\cdot 0 = \frac{4kQe}{3a}
$$

また，放した後について，エネルギーの保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + e\cdot\frac{2kQ\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)}{a^2-\left(-\frac{a}{2}\right)^2} = 0 + e\cdot\frac{2kQ\cdot\frac{a}{2}}{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad \therefore \quad v = 4\sqrt{\frac{kQe}{3am}}$$

(5) x 軸上の $|x| < a$ における電位は，

$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{x+a} = \frac{2kQa}{a^2-x^2}$$

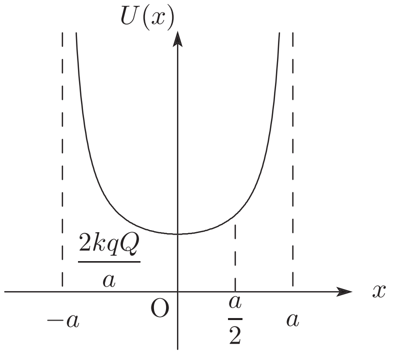
電荷 q の位置エネルギーは，

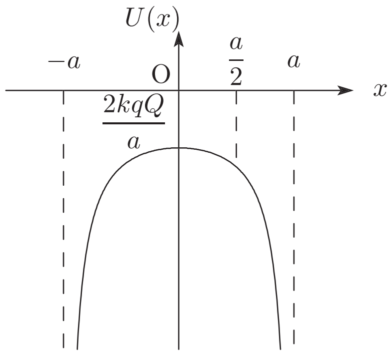
$$U(x) = qV(x) = \frac{2kqQa}{a^2-x^2}$$

よって，$q>0$ のときの $U(x)$ は左下図，$q<0$ のときの $U(x)$ は右下図のようになる．$q>0$ のとき，粒子は U が最小となる $x=0$ まわりで振動する．$x=\dfrac{a}{2}$ で静かに放したから，粒子が運動する範囲は，

$$|x| \leqq \frac{a}{2}$$

$q<0$ のとき，粒子は $+x$ の向きに力を受けて移動し，やがて点 $(a,\ 0)$ の電荷と衝突する．





【2】

《解答》

(1) 金属板の外部では，Q_1，Q_2 のつくる電場の向きが同じなので，合成電場の大きさは，

$$E = \left| \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right| = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

金属板の内部では，Q_1 と Q_2 のつくる電場の向きが反対なので，合成電場の大きさは，

$$E = \left| \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right| = 0$$

(2) 図で下向きを正の向きとする．それぞれの金属板内部の電場が 0 なので，

$$\begin{cases} \text{A の内部} \cdots \dfrac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_3}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0 \\ \text{B の内部} \cdots \dfrac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \dfrac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} + \dfrac{Q_3}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} Q_1 - Q_4 = 0 \\ Q_2 + Q_3 = 0 \end{cases}$$

さらに，金属板 A の電荷を Q_{A}，B の電荷を Q_{B} とすると，

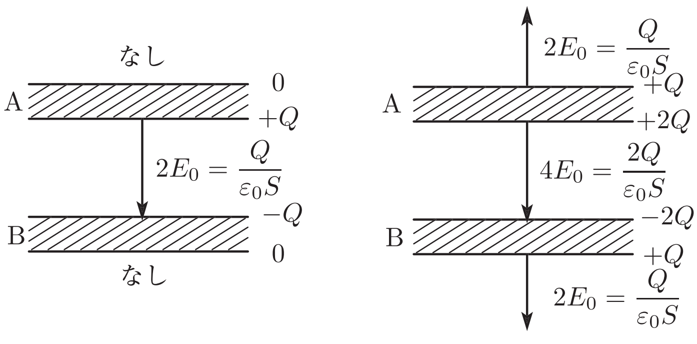
$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q_{\mathrm{A}} \\ Q_3 + Q_4 = Q_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

これら 4 つの式より，

$$Q_1 = \frac{Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}}}{2}, \quad Q_2 = \frac{Q_{\mathrm{A}} - Q_{\mathrm{B}}}{2}, \quad Q_3 = \frac{Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{A}}}{2}, \quad Q_4 = \frac{Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}}}{2}$$

(a) $Q_{\mathrm{A}} = Q$，$Q_{\mathrm{B}} = -Q$ のとき，各面の電荷および各領域の電場は下図左のようになる．

(b) $Q_{\mathrm{A}} = 3Q$，$Q_{\mathrm{B}} = -Q$ のとき，各面の電荷および各領域の電場は下図右のようになる．



(3) (a) の状態で，AB 間の電位差は，

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \cdot d \qquad \therefore \quad C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

また，A と B が及ぼし合う引力の大きさは，

$$F = Q \times \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

5章－2　コンデンサー回路

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 上部の極板の，真空部分にたくわえられる電荷を Q_1，誘電体部分にたくわえられる電荷を Q_2 とすると，電位差について，

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 ax}d = V \\ \dfrac{Q_2}{\varepsilon_r\varepsilon_0 a(b-x)}d = V \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{\varepsilon_0 ax}{d}V \\ Q_2 = \dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 a(b-x)}{d}V \end{cases}$$

上部の極板の電荷は,

$$Q(x) = Q_1 + Q_2 = \left\{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\frac{x}{b}\right\}\frac{\varepsilon_0 abV}{d}$$

(2) $C(x) = \dfrac{Q(x)}{V} = \left\{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\dfrac{x}{b}\right\}\dfrac{\varepsilon_0 ab}{d}$

(3) $U(x) = \dfrac{1}{2}Q(x)V = \left\{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\dfrac{x}{b}\right\}\dfrac{\varepsilon_0 abV^2}{2d}$

(4) $\Delta U = U(x+\Delta x) - U(x) = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV^2}{2d}\Delta x$

(5) $\Delta Q = Q(x+\Delta x) - Q(x) = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV}{d}\Delta x$

(6) $\Delta W = \Delta Q \cdot V = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV^2}{d}\Delta x$

(7) エネルギーの収支を表す関係式 $\Delta U = \Delta W + f\Delta x$ より,

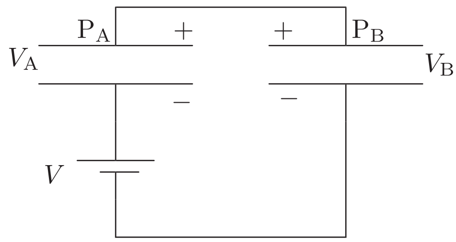
$$f\Delta x = \Delta U - \Delta W \qquad \therefore \quad f = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV^2}{2d}$$

【2】

《解答》

(1) A の電位差が V となるので，A の電気量は CV.

(2) (a) 電荷の保存より，$+CV$.



(b) $\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ の電荷を正と仮定する．電荷の保存より，

$$+CV_\mathrm{A} + CV_\mathrm{B} = +CV$$

また，電位差について，

$$V + V_\mathrm{A} = V_\mathrm{B}$$

これらより，

$$V_\mathrm{A} = 0, \quad V_\mathrm{B} = V$$

(3) (a) 電荷の保存より，

$$+CV + CV_\mathrm{B} = +2CV$$

(b) (2) のときと同様に，$\mathrm{P_A}$ および $\mathrm{P_B}$ の電荷を正と仮定すると，

$$\begin{cases} +CV_\mathrm{A}{}' + CV_\mathrm{B}{}' = +2CV \\ V + V_\mathrm{A}{}' = V_\mathrm{B}{}' \end{cases}$$

これらより，

$$V_\mathrm{A}{}' = \frac{1}{2}V, \quad V_\mathrm{B}{}' = \frac{3}{2}V$$

(4) n 回操作後の $\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ の電荷を正と仮定し，A，B の電位差を $V_\mathrm{A}(n)$，$V_\mathrm{B}(n)$ とおくと，

$$\begin{cases} +CV_\mathrm{A}(n) + CV_\mathrm{B}(n) = +CV + CV_\mathrm{B}(n-1) \\ V + V_\mathrm{A}(n) = V_\mathrm{B}(n) \end{cases}$$

$n \to \infty$ とした収束状態では，

$$\begin{cases} +CV_\mathrm{A}(\infty) + CV_\mathrm{B}(\infty) = +CV + CV_\mathrm{B}(\infty) \\ V + V_\mathrm{A}(\infty) = V_\mathrm{B}(\infty) \end{cases}$$

これらより，

$$V_\mathrm{A}(\infty) = V, \quad V_\mathrm{B}(\infty) = 2V$$

電池を用いて電位差 V に充電した A ともとの電池を組み合わせて構成した「電位差 $2V$ の電源」を用いて B を充電できたため，コンデンサー B の極板間の電位差は $2V$ に収束した.

P3JR

東大物理重要事項総整理

Z-KAI

会員番号	

氏　名	