M1J/M1JS

本科 1 期 7 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 選抜東大数学

高 1 東大数学

１１章　指数・対数関数（２）

問題

【1】(1) **x 軸方向に -1, y 軸方向に 2 平行移動したグラフ**　　(答)

(2) **y 軸について対称移動したグラフ**　　(答)

(3) **y 軸について対称移動したグラフを, y 軸方向に 4 平行移動したグラフ**　　(答)

(4) $y=10^{-(x-1)}$ とみると,
y 軸について対称移動したグラフを, x 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ(答)
あるいは, $y=10\cdot10^{-x}$ とみると,
y 軸について対称移動したグラフを, y 軸の方向に 10 倍したグラフ　　(答)

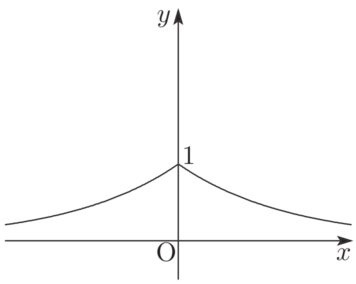
(5) $y=10^{-(x-2)}-1$ とみると,
y 軸について対称移動したグラフを,
x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ　　(答)
あるいは, $y=100\cdot10^{-x}-1$ とみると,
y 軸について対称移動したグラフを,
y 軸の方向に 100 倍してから, y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ　　(答)

(6) $y=10^{2x}$ だから,
x 軸の方向に $\frac{1}{2}$ 倍したグラフ　　(答)

【2】(1)

$$y=\begin{cases}2^{-x} & (x\geqq 0\text{ のとき})\\ 2^{x} & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

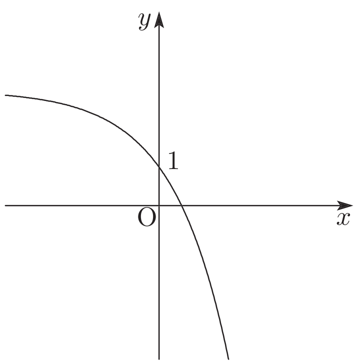
したがって，グラフは右図のようになる.



(2) $\frac{1}{2}\cdot2^{x+2}=2^{x+1}$ だから，与式は

$$y=-2^{x+1}+3$$

よって，求めるグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動し，x 軸に関して対称に移動し，y 軸方向に 3 平行移動したものである.
よって，グラフは右図のようになる.



【3】(1) $10^{0.3}$，$10^{0.4}$，$0.1^{-2}=10^2$，$0.1^{\frac{1}{2}}=10^{-\frac{1}{2}}$ だから，

$$\mathbf{0.1^{\frac{1}{2}}}(<1)<\mathbf{10^{0.3}}<\mathbf{10^{0.4}}<\mathbf{0.1^{-2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $\dfrac{5^{999}}{2^{2331}}=\left(\dfrac{5^3}{2^7}\right)^{333}=\left(\dfrac{10^3}{2^{10}}\right)^{333}=\left(\dfrac{1000}{1024}\right)^{333}<1$ だから，

$$\mathbf{5^{999}}<\mathbf{2^{2331}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) すべての数を 6 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\quad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=9,\quad \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6=6$$

だから，

$$\mathbf{6^{\frac{1}{6}}}<\mathbf{2^{\frac{1}{2}}}<\mathbf{3^{\frac{1}{3}}} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $2^{30}=8^{10}$，$3^{20}=9^{10}$，7^{10} だから，$\mathbf{7^{10}}<\mathbf{2^{30}}<\mathbf{3^{20}} \qquad$ **(答)**

(5) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ を 6 乗すると，

$$\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8,\quad \left(\sqrt[3]{3}\right)^6=3^2=9$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$$

そして $\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{5}$ を 10 乗すると

$$\left(\sqrt{2}\right)^{10}=2^5=32,\quad \left(\sqrt[5]{5}\right)^{10}=5^2=25$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$$

以上より，

$$\sqrt[5]{\mathbf{5}}<\sqrt{\mathbf{2}}<\sqrt[3]{\mathbf{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(6) すべての数を 12 乗すると

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12}=3^6=27^2=729,\quad \left(\sqrt[3]{5}\right)^{12}=5^4=25^2=625,$$
$$\left(\sqrt[4]{10}\right)^{12}=10^3=1000,\quad \left(\sqrt[6]{30}\right)^{12}=30^2=900$$

なので，

$$\sqrt[3]{\mathbf{5}}<\sqrt{\mathbf{3}}<\sqrt[6]{\mathbf{30}}<\sqrt[4]{\mathbf{10}} \qquad \textbf{(答)}$$

(7) $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt{3}$ を 6 乗すると，

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 = 5^2 = 25, \quad \left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^3 = 27$$
$$\therefore \quad \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

そして $\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{8}$ を 12 乗すると

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{12} = 5^4 = 625, \quad \left(\sqrt[4]{8}\right)^{12} = 8^3 = 512$$
$$\therefore \quad \sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5}$$

以上より，

$\boldsymbol{\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}}$ **(答)**

(8) まず，$1.01^2 = 1.0201$ より

$1.0201^{50} > 1.02^{50}$ $\quad\quad \therefore (1.01^2)^{50} > 1.02^{50}$

よって

$1.01^{100} > 1.02^{50}$

また，$1.02^5 = 1.104\cdots$，すなわち $1.02^5 > 1.10$ だから

$(1.02^5)^5 > 1.10^5 = 1.610\cdots$ $\quad\quad \therefore 1.02^{25} > 1.610$

ここで，$\sqrt{2} = 1.414\cdots$ だから

$\sqrt{2} < 1.02^{25}$

両辺正だから，両辺を 2 乗して

$2 < 1.02^{50}$

以上より

$\boldsymbol{2 < 1.02^{50} < 1.01^{100}}$ (答)

【4】(1) $a=1$, $b=2$ とすると,

$$a^ab^b=1^12^2=4,\ \ a^bb^a=1^22^1=2$$

より, $a^ab^b>a^bb^a$ と推定される.

$$P=a^ab^b-a^bb^a=a^ab^a(b^{b-a}-a^{b-a}),\qquad a^ab^a>0$$

また, $b>a>0$, $b-a>0$ であるから,

$$b^{b-a}-a^{b-a}>0$$

よって,

$$P>0$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{a^ab^b>a^bb^a}\qquad \textbf{(答)}$$

(2) $a=1$, $b=2$, $c=3$ とすると,

$$\begin{aligned}a^cb^bc^a&=1^32^23^1=12\\a^bb^cc^a&=1^22^33^1=24\\a^ab^cc^b&=1^12^33^2=72\\a^ab^bc^c&=1^12^23^3=108\end{aligned}$$

であるから, $a^cb^bc^a<a^bb^cc^a<a^ab^cc^b<a^ab^bc^c$ と推定される.

$$a^ab^bc^c-a^ab^cc^b=a^ab^bc^b\left(c^{c-b}-b^{c-b}\right)>0$$
$$\left(\because\ a^ab^bc^b>0,\ c>b>0,\ c-b>0\ \text{から},\ c^{c-b}>b^{c-b}\right)$$

$$a^ab^cc^b-a^bb^cc^a=a^ab^cc^a\left(c^{b-a}-a^{b-a}\right)>0$$
$$\left(\because\ a^ab^ca^a>0,\ c>a>0,\ b-a>0\ \text{から},\ c^{b-a}>a^{b-a}\right)$$

$$a^bb^cc^a-a^cb^bc^a=a^bb^bc^a\left(b^{c-b}-a^{c-b}\right)>0$$
$$\left(\because\ a^bb^bc^a>0,\ b>a>0,\ c-b>0\ \text{から},\ b^{c-b}>a^{c-b}\right)$$

以上から,

$$\boldsymbol{a^cb^bc^a<a^bb^cc^a<a^ab^cc^b<a^ab^bc^c}\qquad \textbf{(答)}$$

【5】(1) $27^x=3^{3x}$, $\dfrac{1}{3}=3^{-1}$ だから,

$$3x=-1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x=-\frac{1}{3}} \qquad (答)$$

(2) 与式より,

$$16^{10}=1024^x$$

ここで,

$$16^{10}=\left(2^4\right)^{10}=2^{40}=1024^x=2^{10x}$$

よって, $2^{10x}=2^{40}$ より,

$$10x=40 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x=4} \qquad (答)$$

(3) $2^x=X$ とおくと

$$2X^2-8X-64=0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X+4)(X-8)=0$$

$X>0$ より,

$$X=8$$

よって,

$$2^x=8$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x=3} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $\dfrac{1}{3^x}=X$ とおくと,

$$\begin{aligned} 3X^2-10X+3=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (3X-1)(X-3)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad X=\frac{1}{3},\ 3 \end{aligned}$$

よって,

$$3^{-x}=3^{-1},\ 3^1$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x=1,\ -1} \qquad \textbf{(答)}$$

(5)
$$3^{-x}>3^{-3}>3^{2(1-x)}$$

底が 1 より大きいから,

$$-x>-3>2(1-x)$$

これを解くと,

$$\boldsymbol{\frac{5}{2}<x<3} \qquad \textbf{(答)}$$

(6) $2^x = X$ とおくと $X > 0$ で，

$$X^2 - 2X < 0 \quad \iff \quad X(X-2) < 0$$

なので，

$$0 < X < 2$$

よって，

$$0 < 2^x < 2^1$$

底が 1 より大きいから，

$\boldsymbol{x < 1}$ **(答)**

(7) $3^x = X$ とおくと $X > 0$ で，

$$\begin{aligned} 9^x - 3^{x+2} &> 3^x - 9 \\ (3^x)^2 - 3^2 \cdot 3^x &> 3^x - 9 \\ X^2 - 9X &> X - 9 \\ X^2 - 10X + 9 &> 0 \\ (X-1)(X-9) &> 0 \\ \therefore 0 < X < 1,\ 9 < X \end{aligned}$$

よって，

$$0 < 3^x < 1,\ 9 < 3^x$$

底が 1 より大きいから，求めるべき範囲は

$\boldsymbol{x < 0,\ 2 < x}$ **(答)**

【6】(1) $2^x = X\ (X > 0)$, $2^y = Y\ (Y > 0)$ とおくと,

$$\begin{aligned} &XY = 32 && \cdots ① \\ &X^2 - Y^2 = 48 && \cdots ② \end{aligned}$$

② $\times 2 -$ ① $\times 3$ より,

$$(X - 2Y)(2X + Y) = 0$$

$2X + Y > 0$ より,

$$X = 2Y \quad \cdots ③$$

③を①に代入して,

$$2Y^2 = 32$$

よって,

$$\begin{cases} X = 8 \\ Y = 4 \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

<別解>

$2^{x+y} = 2^5$ より, $x + y = 5$ なので, $y = 5 - x$

よって,

$$2^{2x} - 2^{2(5-x)} = 48 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{2x} - \frac{1024}{2^{2x}} = 48$$

$2^{2x} = X$ とおくと,

$$\begin{aligned} X - \frac{1024}{X} = 48 \quad &\Longleftrightarrow \quad X^2 - 48X - 1024 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (X - 64)(X + 16) = 0 \end{aligned}$$

$X > 0$ より,

$$X = 64$$

よって,

$$2^{2x} = 2^6$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x = 3} \qquad \text{(答)}$$

また,

$$\boldsymbol{y} = 5 - 3 \boldsymbol{= 2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $2^x = X$, $5^y = Y$ とおくと，

$$\begin{cases} X - Y = 3 & \cdots ① \\ X^2 + Y^2 = 89 & \cdots ② \end{cases}$$

①より，

$$X = Y + 3$$

②に代入して，

$$(Y+3)^2 + Y^2 = 89$$

整理して，

$$Y^2 + 3Y - 40 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (Y+8)(Y-5) = 0$$

$Y > 0$ より，

$$Y = 5 \qquad \therefore y = 1$$

よって，$Y = 5$ を①に代入して，$X = 8$ より，

$$x = 3$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3} \\ \boldsymbol{y = 1} \end{cases}$$ **(答)**

【7】(1) $y = -3^{x-2}$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ において単調減少なので，

$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{27}} \quad \boldsymbol{(x = -1} \textbf{ のとき)} \\ \textbf{最小値} \quad \boldsymbol{-\frac{1}{3}} \quad \boldsymbol{(x = 1} \textbf{ のとき)} \end{cases}$$ **(答)**

(2) $2^x = X$ とおくと，$-1 \leqq x \leqq 2$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq X \leqq 4$ で，

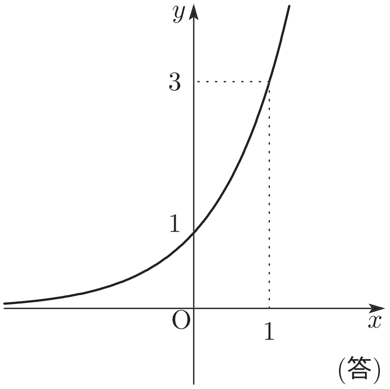
$$\begin{aligned} y &= X^2 - 4X + 1 \\ &= (X-2)^2 - 3 \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq X \leqq 4\right) \end{aligned}$$

よって，$X = 2$ のとき，つまり，$x = 1$ のとき，y は最小値 -3
$X = 4$ のとき，つまり，$x = 2$ のとき，y は最大値 1 をとる．
したがって，

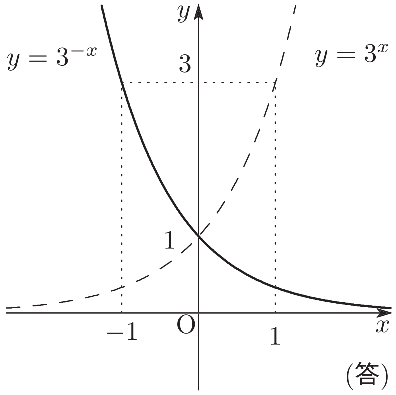
$$\begin{cases} \textbf{最大値} \quad \boldsymbol{1} \quad (\boldsymbol{x = 2} \textbf{ のとき}) \\ \textbf{最小値} \quad \boldsymbol{-3} \quad (\boldsymbol{x = 1} \textbf{ のとき}) \end{cases}$$ **(答)**

添削課題

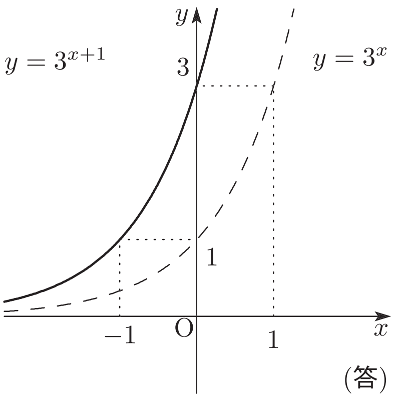
【1】(1)



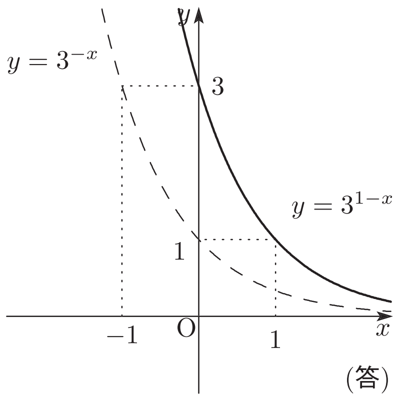
(2)



(3)



(4)



(2) $y=\dfrac{1}{3^x}=3^{-x}$ より，$y=3^{-x}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを

y 軸について対称移動　(答)

したグラフである．

(3) $y=3^{x+1}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを

x 軸の正方向に -1 だけ平行移動　(答)

したグラフである．あるいは，$y=3^{x+1}=3\cdot 3^x$ とみると

y 軸方向に 3 倍に拡大　(答)

したグラフと考えることもできる．

(4) $y=3^{1-x}=3^{-(x-1)}$ より，$y=3^{-(x-1)}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを

y 軸について対称移動してから, x 軸の正方向に 1 だけ平行移動　(答)

したグラフである．あるいは，$y=3^{1-x}=3\cdot 3^{-x}$ とみると

y 軸について対称移動してから, y 軸方向に 3 倍に拡大　(答)

したグラフと考えることもできる．

【2】(1)
$$0.5^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$
$$0.5^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2$$
したがって，底が $2\ (>1)$ だから
$$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{3}} < 2^2$$
つまり，小さい順に並べると
$$\boldsymbol{0.5^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{1}{3}},\ 0.5^{-2}} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\left(\sqrt{3}\right)^{12} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{12} = 3^6 = 729$$
$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{12} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = 7^4 = 2401$$
$$\left(\sqrt[4]{12}\right)^{12} = \left(12^{\frac{1}{4}}\right)^{12} = 12^3 = 1728$$
したがって
$$\left(\sqrt{3}\right)^{12} < \left(\sqrt[4]{12}\right)^{12} < \left(\sqrt[3]{7}\right)^{12}$$
つまり，小さい順に並べると
$$\boldsymbol{\sqrt{3},\ \sqrt[4]{12},\ \sqrt[3]{7}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1)
$$(3^x)^2 - 4\cdot 3^{x+1} + 27 = 0$$
$$(3^x)^2 - 4\cdot 3^1\cdot 3^x + 27 = 0$$
$$(3^x)^2 - 12\cdot 3^x + 27 = 0$$
$$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$$
$$\therefore\ 3^x = 3,\ 3^x = 9$$
$$3^x = 3^1,\ 3^x = 3^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = 1,\ 2} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$9^x - 24\cdot 3^{x-1} - 9 = 0$$
$$(3^x)^2 - 8\cdot 3\cdot 3^{x-1} - 9 = 0$$
$$(3^x)^2 - 8\cdot 3^x - 9 = 0$$
$$(3^x - 9)(3^x + 1) = 0$$
$3^x > 0$ を考え，
$$3^x = 9 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = 2} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$4^x - 5\cdot 2^x + 4 \geqq 0$$
$$(2^x)^2 - 5\cdot 2^x + 4 \geqq 0$$
$$(2^x - 1)(2^x - 4) \geqq 0$$
ここで，$2^x > 0$ を考え，
$$\therefore\ 0 < 2^x \leqq 1,\ 4 \leqq 2^x \qquad \therefore\ \boldsymbol{x \leqq 0,\ 2 \leqq x} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $t=2^x$ とおくと，

$$\begin{aligned} y &= 2^{2x+2}-2^{x+2}+2 \\ &= 2^2\cdot(2^x)^2-2^2\cdot 2^x+2 \\ &= 4\cdot(2^x)^2-4\cdot 2^x+2 \\ &= 4t^2-4t+2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\boldsymbol{y=4t^2-4t+2} \qquad \text{(答)}$$

(2) $t=2^x>0$ より，$y=4t^2-4t+2\ (t>0)$ の最小値を求めればよい．

$$y=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

よって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，最小値 1 をとる．
ここで，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$2^x=\dfrac{1}{2}$ より，$x=-1$
以上より，

最小値 1　($x=-1$ のとき)　　(答)

１２章　指数・対数関数（３）

問題

【1】(1) $\log_3 243 = \mathbf{5}$　(答)

(2) $\log_{16} 8 = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$　(答)

(3) $\log_5 1 = \mathbf{0}$　(答)

(4) $\log_2 0.125 = \mathbf{-3}$　(答)

(5) $10^4 = \mathbf{10000}$　(答)

(6) $5^{-1} = \mathbf{0.2}$　(答)

(7) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \mathbf{8}$　(答)

(8) $\left(\sqrt{2}\right)^0 = \mathbf{1}$　(答)

【2】(1) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = \mathbf{6}$　(答)

(2) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = \mathbf{-1}$　(答)

(3) $\log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^8 = \mathbf{8}$　(答)

(4) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\dfrac{1}{27}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$　(答)

(5) $\log_8 128 = \log_8 8^{\frac{7}{3}} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$　(答)

＜参考＞ $\log_8 128 = \log_{2^3} 2^7 = \log_{2^3} \left(2^3\right)^{\frac{7}{3}} = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$　(答)

(6) $\log_{125} \dfrac{1}{25} = \log_{125} 125^{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$　(答)

＜参考＞ $\log_{125} \dfrac{1}{25} = \log_{5^3} 5^{-2} = \log_{5^3} \left(5^3\right)^{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$　(答)

(7) $\log_a b = c$ とおくと，

$a^{\log_a b} = a^c = \boldsymbol{b}$　(答)

(8) $8^{\log_2 3} = 2^{3\log_2 3} = 2^{\log_2 3^3} = 3^3 = \mathbf{27}$　(答)

【3】(1) $\log_2 45 = \log_2\left(3^2 \times 5\right) = \log_2 3^2 + \log_2 5 = \boldsymbol{2a + b}$　(答)

(2) $\log_2 0.6 = \log_2 \dfrac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5 = \boldsymbol{a - b}$　(答)

(3) $\log_2 \dfrac{10}{9} = \log_2(2 \times 5 \div 3^2) = \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 3^2 = \boldsymbol{1 + b - 2a}$　(答)

(4)
$$\begin{aligned}\log_2 \frac{\sqrt[4]{27}\sqrt{6}}{\sqrt[3]{0.4}} &= \log_2\left(3^{\frac{3}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \log_2\left(3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}}\right)\\ &= \log_2\left(2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{5}{4}} \times 5^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \log_2 2^{\frac{1}{6}} + \log_2 3^{\frac{5}{4}} + \log_2 5^{\frac{1}{3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6} + \frac{5}{4}a + \frac{1}{3}b}\end{aligned}$$
(答)

【4】(1) (与式) $= \log_6(3 \times 12) = \log_6 6^2 = \mathbf{2}$　(答)

(2) (与式) $= \log_5(10 \div 2) = \log_5 5 = \mathbf{1}$　(答)

(3) (与式) $= \log_{10}\left(4 \div 5 \times \left(\sqrt{125}\right)^2\right) = \log_{10} 10^2 = \mathbf{2}$　(答)

(4) (与式) $= \log_2\left(\sqrt{\dfrac{7}{48}} \times 12 \div 21^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 1 = \mathbf{0}$　(答)

(5)
$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \log_{0.5}\left(\frac{8}{13} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{26}{9}\right)\\ &= \log_{0.5} 4 = \log_{0.5} 2^2 = \log_{0.5}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0.5} 0.5^{-2}\\ &= \mathbf{-2}\end{aligned}$$
(答)

(6)
$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

よって,

(与式) $= \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \mathbf{1}$　(答)

【5】(1) $(\text{与式})=\dfrac{\log_{10}27}{\log_{10}4}\cdot\dfrac{\log_{10}8}{\log_{10}9}=\dfrac{3\log_{10}3}{2\log_{10}2}\cdot\dfrac{3\log_{10}2}{2\log_{10}3}=\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ (答)

(2)
$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}2}+\frac{2\log_{10}7}{\log_{10}4}-\frac{\log_{10}7}{\log_{10}\sqrt{2}}\\&=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}2}+\frac{2\log_{10}7}{2\log_{10}2}-\frac{\log_{10}7}{\frac{1}{2}\log_{10}2}\\&=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}2}+\frac{\log_{10}7}{\log_{10}2}-\frac{2\log_{10}7}{\log_{10}2}\\&=\mathbf{0}\quad(\text{答})\end{aligned}$$

＜別解＞

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\frac{\log_2 7}{\log_2 2}+\frac{2\log_2 7}{\log_2 4}-\frac{\log_2 7}{\log_2\sqrt{2}}\\&=\frac{\log_2 7}{\log_2 2}+\frac{2\log_2 7}{2\log_2 2}-\frac{\log_2 7}{\frac{1}{2}\log_2 2}\\&=\frac{\log_2 7}{1}+\frac{\log_2 7}{1}-\frac{2\log_2 7}{1}=\mathbf{0}\quad(\text{答})\end{aligned}$$

(3) $\log_a b\times\log_b c\left(=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}\right)=\log_a c$ を利用して，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\log_3 2\cdot\log_2 9-\log_3 2\cdot\log_4 3-\log_9 2\cdot\log_2 9+\log_9 2\cdot\log_4 3\\&=\log_3 9-\log_4 2-\log_2 2+\log_9 2\cdot\log_4 3\\&=2-\frac{1}{2}-1+\frac{\log_{10}2}{\log_{10}9}\cdot\frac{\log_{10}3}{\log_{10}4}=\frac{1}{2}+\frac{\log_{10}2}{2\log_{10}3}\cdot\frac{\log_{10}3}{2\log_{10}2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}\quad(\text{答})\end{aligned}$$

(4) $(\text{与式})=\log_{a^3}c^2\cdot\log_{\sqrt{c}}a^3=\log_{\sqrt{c}}c^2=\log_{\sqrt{c}}(\sqrt{c})^4=\mathbf{4}$ (答)

【6】≪証明≫

$2^x=5^y=10^z$ より，

$$\log_{10}2^x=\log_{10}5^y=\log_{10}10^z$$
$$\therefore\ x\log_{10}2=y\log_{10}5=z$$

よって，$x=\dfrac{z}{\log_{10}2}$，$y=\dfrac{z}{\log_{10}5}$ だから，

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{\log_{10}2}{z}+\frac{\log_{10}5}{z}=\frac{\log_{10}2+\log_{10}5}{z}=\frac{\log_{10}10}{z}=\frac{1}{z}$$

つまり，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ が成り立つ． 〔証明終〕

添削課題

【1】〔定義〕（順に）**対数**，$\boldsymbol{\log_a M}$，**真数**　(答)

※ $\log_a M$ は,「a を何乗すると M になるかを表す数」である.

〔性質〕(1) $\log_a a = \mathbf{1}$，$\log_a 1 = \mathbf{0}$　(答)

(2) $\log_a MN = \boldsymbol{\log_a M + \log_a N}$　(答)

(3) $\log_a \dfrac{M}{N} = \boldsymbol{\log_a M - \log_a N}$　(答)

(4) $\log_a M^p = \boldsymbol{p \log_a M}$　(答)

(5) $\log_a M = \boldsymbol{\dfrac{\log_b M}{\log_b a}}$，$\log_a b = \dfrac{1}{\boldsymbol{\log_b a}}$　(答)

※ $\log_b a \cdot \log_a b = 1$ が成り立つ.

(6) $a^{\log_a M} = \boldsymbol{M}$　(答)

【2】〔I〕(1) $\mathbf{7 = \log_2 128}$　(答)　(2) $\mathbf{-3 = \log_5 0.008}$　(答)

(3) $\mathbf{0 = \log_7 1}$　(答)　(4) $\boldsymbol{\dfrac{2}{5} = \log_{243} 9}$　(答)

〔II〕(1) $\mathbf{10^3 = 1000}$　(答)　(2) $\boldsymbol{2^{-2} = \dfrac{1}{4}}$　(答)

(3) $\boldsymbol{(\sqrt{3})^4 = 9}$　(答)　(4) $\boldsymbol{9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}}$　(答)

【3】〔I〕(1) $x=\log_7 \dfrac{1}{49}=\log_7 7^{-2}=-2\log_7 7=\mathbf{-2}$　　(答)

(2) $x^4=9=3^2=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4$，$x>0$ より，$x=3^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$　　(答)

(3) $x=4^{\frac{3}{2}}=\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}}=2^3=\mathbf{8}$　　(答)

(4) $9^{\log_3 x}=3^{2\log_3 x}=3^{\log_3 x^2}=x^2$ より，$x^2=25$
$x>0$ より，$x=\mathbf{5}$　　(答)

〔II〕(1) $\log_2 20-\log_2 5=\log_2 \dfrac{20}{5}=\log_2 4=\log_2 2^2=\mathbf{2}$　　(答)

(2)
$$\begin{aligned}&\log_5\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_5\frac{25}{18}-\log_5\frac{1}{\sqrt{6}}\\=&\log_5\sqrt{3}+\log_5\sqrt{\frac{25}{18}}-\log_5\frac{1}{\sqrt{6}}\\=&\log_5\sqrt{3}\cdot\frac{5}{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}\\=&\log_5 5=\mathbf{1}\end{aligned}$$
(答)

(3)
$$\begin{aligned}\log_2 3\cdot\log_3 8&=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}8}{\log_{10}3}\\&=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{\log_{10}2^3}{\log_{10}3}\\&=\frac{\log_{10}3}{\log_{10}2}\cdot\frac{3\log_{10}2}{\log_{10}3}\\&=\mathbf{3}\end{aligned}$$
(答)

＜別解＞
$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$ を用いると
$\log_2 3\cdot\log_3 8=\log_2 8=\log_2 2^3=\mathbf{3}$　　(答)

(4)
$$\begin{aligned}&(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)\\=&\left(\log_2 3+\frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3}+\frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)\\=&\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{2\log_2 3}\right)\\=&2\log_2 3\cdot\frac{5}{2\log_2 3}=\mathbf{5}\end{aligned}$$
(答)

【4】≪証明≫

$2^x = 3^y = 12^z$ において，12 を底とする対数をとると，

$$\log_{12} 2^x = \log_{12} 3^y = \log_{12} 12^z$$
$$\therefore x \log_{12} 2 = y \log_{12} 3 = z$$

よって，

$$x = \frac{z}{\log_{12} 2},\ y = \frac{z}{\log_{12} 3}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{x+2y}{xy} &= \frac{1}{y} + \frac{2}{x} \\ &= \frac{\log_{12} 3}{z} + \frac{2\log_{12} 2}{z} \\ &= \frac{1}{z}\left(\log_{12} 3 + \log_{12} 4\right) \\ &= \frac{1}{z} \cdot \log_{12} 12 \\ &= \frac{1}{z} \cdot 1 \end{aligned}$$
$$\therefore\ \frac{x+2y}{xy} = \frac{1}{z}$$

両辺の逆数をとって，

$$z = \frac{xy}{x+2y}$$

〔証明終〕

＜別解＞　〜対数を用いない証明〜

≪証明≫

$2^x = 3^y = 12^z = X$ とおくと，$2^x = X$ より，

$$(2^x)^{\frac{1}{x}} = X^{\frac{1}{x}} \qquad \therefore\ 2 = X^{\frac{1}{x}}$$

同様に，$3 = X^{\frac{1}{y}}$，$12 = X^{\frac{1}{z}}$ である．ここで，$12 = 2^2 \cdot 3$ より，

$$\begin{aligned} X^{\frac{1}{z}} &= \left(X^{\frac{1}{x}}\right)^2 \cdot X^{\frac{1}{y}} \\ &= X^{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}} \end{aligned}$$

したがって，

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \qquad \therefore\ z = \frac{xy}{x+2y}$$

〔証明終〕

１３章　指数・対数関数（４）

問題

【1】(1) グラフは〔図 1〕のようになる.

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}x=-\log_3 x$ より，$y=\log_3 x$ のグラフと x 軸に対して対称であるから,〔図 2〕のようになる.

(3) $y=\log_2 4x=\log_2 x+\log_2 4=\log_2 x+2$
よって，$y=\log_2 x$ を y 軸方向に 2 だけ移動したグラフであるから,〔図 3〕のようになる.

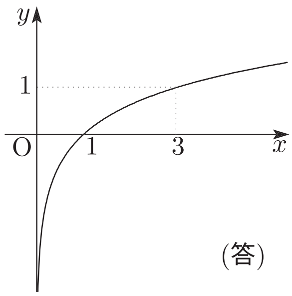
(4) $y=\log_2(2x-6)=\log_2 2(x-3)=\log_2(x-3)+\log_2 2=\log_2(x-3)+1$
よって，$y=\log_2 x$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフであるから,〔図 4〕のようになる.

(5) 与式は $x=1$ で定義されず

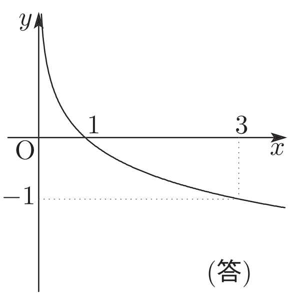
$$\begin{cases} y=\log_2(x-1) & (x>1\text{ のとき}) \\ y=\log_2(-x+1) & (x<1\text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，グラフは〔図 5〕のようになる.

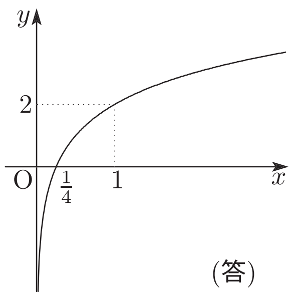
〔図 1〕



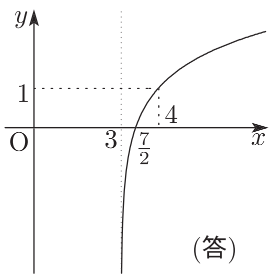
〔図 2〕



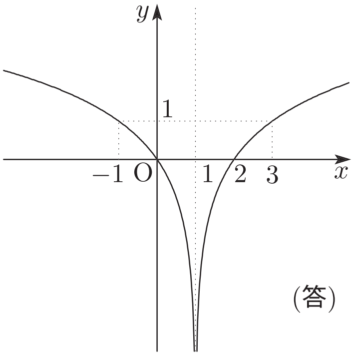
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【2】(1) 底を 2 にそろえると

$$\log_3 0.5 = \frac{\log_2 0.5}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 3} = -\frac{1}{\log_2 3}$$
$$\log_2 0.5 = \log_2 2^{-1} = -1$$
$$\log_{0.2} 0.5 = \frac{\log_2 0.5}{\log_2 0.2} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 5^{-1}} = \frac{1}{\log_2 5}$$

ここで,

$$(\log_2 2 =)\ 1 < \log_2 3$$

より

$$1 > \frac{1}{\log_2 3}\ (> 0) \qquad \therefore\ -1 < -\frac{1}{\log_2 3} \quad \cdots\cdots ①$$

また

$$-\frac{1}{\log_2 3}\ (< 0)\ < \frac{1}{\log_2 5} \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② より

$$-1 < -\frac{1}{\log_2 3} < \frac{1}{\log_2 5}$$

よって

$$\mathbf{\log_2 0.5 < \log_3 0.5 < \log_{0.2} 0.5} \qquad \text{(答)}$$

(2) 底を 2 にそろえると

$$1 = \log_2 2$$
$$\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$$
$$\log_6 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1}{1 + \log_2 3}$$

これより

$$1 < \log_2 3$$

だから

$$\frac{1}{1+\log_2 3} < \frac{1}{\log_2 3} < 1 < \log_2 3$$
$$\therefore\quad \mathbf{\log_6 2 < \log_3 2 < 1 < \log_2 3} \qquad \text{(答)}$$

(3) $a > 1$ より,

$$\log_a a < \log_a b < \log_a a^2 \qquad \therefore\quad 1 < \log_a b < 2 \quad \cdots ①$$

したがって, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ より, $\dfrac{1}{2} < \log_b a < 1 \quad \cdots ②$

また, $\log_a \dfrac{a}{b} = \log_a a - \log_a b = 1 - \log_a b$ だから, ①より,

$$-1 < \log_a \frac{a}{b} < 0 \quad \cdots ③$$

さらに, $\log_b \dfrac{b}{a} = \log_b b - \log_b a = 1 - \log_b a$ だから② より,

$$0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2}$$

①，②，③，④より，

$$-1 < \log_a \frac{a}{b} < 0 < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < 1 < \log_a b < 2$$

つまり，

$$\boldsymbol{\log_a \frac{a}{b} < \log_b \frac{b}{a} < \frac{1}{2} < \log_b a < \log_a b} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\log_{10} 80 = \log_{10}(2^3 \cdot 10) = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 10$
$= 3 \times 0.3010 + 1 = \mathbf{1.9030}$ (答)

(2) $\log_{10} \dfrac{5}{18} = \log_{10} \dfrac{10}{2^2 \cdot 3^2} = \log_{10} 10 - 2\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3$
$= 1 - 2 \times 0.3010 - 2 \times 0.4771 = \mathbf{-0.5562}$ (答)

(3)
$$\log_2 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} \frac{10 \cdot 3}{2}}{\log_{10} 2}$$
$$= \frac{\log_{10} 10 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 2}$$
$$= \frac{1 + 0.4771 - 0.3010}{0.3010} = 3.9073\cdots$$
$\fallingdotseq \mathbf{3.907}$ (答)

(4)
$$\log_6 18 = \frac{\log_{10}(2 \cdot 3^2)}{\log_{10}(2 \cdot 3)} = \frac{\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}$$
$$= \frac{0.3010 + 2 \times 0.4771}{0.3010 + 0.4771} = 1.6131\cdots$$
$\fallingdotseq \mathbf{1.613}$ (答)

(5)
$$\log_{\sqrt{2}} 81 = \frac{4\log_{10} 3}{\frac{1}{2}\log_{10} 2} = \frac{4 \times 0.4771}{\frac{1}{2} \times 0.3010} = 12.680\cdots$$
$\fallingdotseq \mathbf{12.68}$ (答)

(6)
$$\log_{100} 20 = \frac{\log_{10}(2 \cdot 10)}{\log_{10} 10^2} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 10}{2}$$
$$= \frac{0.3010 + 1}{2} = \mathbf{0.6505}$$ (答)

【4】与式より

$$
\begin{aligned}
10^x &= \log_2\left(10^{\log_2 10}\right) = \log_2 10 \cdot \log_2 10 = \left(\log_2 10\right)^2 \\
&= \left(\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\log_{10} 2}\right)^2
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
10^{-x} &= \left(\frac{1}{\log_{10} 2}\right)^{-2} = \left(\log_{10} 2\right)^2 = (0.3010)^2 \\
&\fallingdotseq \mathbf{0.0906} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

与式より

$$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

であり，これは①をみたすから

$$\boldsymbol{x = \sqrt{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 底の条件より，

$$0 < x < 1,\ x > 1 \quad \cdots ①$$

与式より，

$$x^{-2} = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{9} \qquad \therefore\ x = \pm\frac{1}{3}$$

①より

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 真数条件より，

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 3x - 10 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-5)(x+2) > 0 \quad \therefore\ x < -2,\ x > 5 \\
&x - 2 > 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \therefore\ x > 2
\end{aligned}
$$

よって，

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

また，与式の左辺は

$$\log_4(x^2 - 3x - 10) = \frac{\log_2(x^2 - 3x - 10)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 3x - 10)$$

なので，与式は

$$\log_2(x^2 - 3x - 10) = \log_2(x-2)^2$$

よって，

$$x^2 - 3x - 10 = (x-2)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 14$$

これは ① をみたすから

$$\boldsymbol{x = 14} \qquad \text{(答)}$$

(4) 真数条件より，

$$x-1>0,\ x+5>0$$

よって，

$$x>1 \quad \cdots ①$$

$$\log_4(x+5)=\frac{\log_2(x+5)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x+5)$$

だから，与式は

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(x+5) &\iff 2\log_2(x-1)=\log_2(x+5)\\ &\iff \log_2(x-1)^2=\log_2(x+5)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(x-1)^2=x+5 &\iff x^2-2x+1=x+5\\ &\iff x^2-3x-4=0\\ &\iff (x-4)(x+1)=0\\ &\therefore\ x=4,\ -1\end{aligned}$$

これと①より

$\boldsymbol{x=4}$ **(答)**

(5) 真数条件より

$$x>0,\ x+2>0$$

よって，　$x>0 \quad \cdots ①$

与えられた方程式の底を 3 に変換して，

$$\begin{aligned}\log_3 x=\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9} &\iff \log_3 x=\frac{1}{2}\log_3(x+2)\\ &\iff 2\log_3 x=\log_3(x+2)\\ &\iff \log_3 x^2=\log_3(x+2)\end{aligned}$$

したがって

$$x^2=x+2 \iff x^2-x-2=0$$

より，

$$(x-2)(x+1)=0 \qquad \therefore x=2,\ -1$$

したがって，①より

$\boldsymbol{x=2}$ **(答)**

【6】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は 1 より大きいから

$$x \leqq 27$$

これと①より

$$\mathbf{0 < \boldsymbol{x} \leqq 27} \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は 1 より小さいから

$$x < (0.1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000$$

これと①より

$$\mathbf{0 < \boldsymbol{x} < 1000} \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数条件より

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2x - 15 > 0 \\
&(x-5)(x+3) > 0 \qquad \therefore \quad x < -3,\ x > 5 \\
&3x - 9 > 0 \qquad \therefore \quad x > 3
\end{aligned}$$

よって

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

与式の対数の底は両辺ともに 1 より小さいので

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2x - 15 < 3x - 9 \\
&x^2 - 5x - 6 < 0 \\
&(x-6)(x+1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < x < 6
\end{aligned}$$

よって

$$\mathbf{5 < \boldsymbol{x} < 6} \qquad \text{(答)}$$

(4) $x^2-8x+6=0$ の解は

$$x=4\pm\sqrt{10}$$

だから，真数条件より

$$\frac{1}{2}<x<4-\sqrt{10},\ x>4+\sqrt{10}\quad\cdots①$$

$$\begin{aligned}\log_4(x^2-8x+6)&=\frac{\log_2(x^2-8x+6)}{\log_2 4}\\&=\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6)\end{aligned}$$

より，与式は

$$\begin{aligned}\log_2(2x-1)&>\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6)\\2\log_2(2x-1)&>\log_2(x^2-8x+6)\\\log_2(2x-1)^2&>\log_2(x^2-8x+6)\end{aligned}$$

底は 1 より大きいから

$$\begin{aligned}(2x-1)^2&>x^2-8x+6\\4x^2-4x+1&>x^2-8x+6\\3x^2+4x-5&>0\end{aligned}$$

これより

$$x<\frac{-2-\sqrt{19}}{3},\ x>\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$$

ここで，$4-\sqrt{10}$ と $\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}$ の大小を比較する．
$\sqrt{19}<\sqrt{19.36}=4.4$ より，

$$\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<\frac{-2+4.4}{3}=\frac{4}{5}$$

また，

$$4-\sqrt{10}-\frac{4}{5}=\frac{16-5\sqrt{10}}{5}>0\quad\left(\because\ 16^2=256>250=\left(5\sqrt{10}\right)^2\right)$$

よって，$\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}<4-\sqrt{10}$
これと ① より

$$\boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<x<4-\sqrt{10},\ x>4+\sqrt{10}}\qquad\text{(答)}$$

(5) 真数条件より

$$x-2>0 \qquad \therefore \quad x>2$$
$$x+4>0 \qquad \therefore \quad x>-4$$

よって

$$x>2 \quad \cdots ①$$

与式の対数の底はともに 1 より小さいから

$$\begin{aligned}(x-2)^2<x+4 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-5x<0\\ &\Longleftrightarrow \quad x(x-5)<0\\ &\Longleftrightarrow \quad 0<x<5\end{aligned}$$

これと①より

$$\boldsymbol{2<x<5} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) 真数条件および底の条件より

$$0<x<1,\ x>1 \quad \cdots ①$$

そして底を 3 にそろえると

$$\log_4 x=\frac{\log_3 x}{\log_3 4}$$
$$\log_x 3=\frac{\log_3 3}{\log_3 x}=\frac{1}{\log_3 x}$$

だから与式は

$$\begin{aligned}\log_3\sqrt{2}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 4}&=\frac{1}{\log_3 x}\\ \log_3 2^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 2^2}&=\frac{1}{\log_3 x}\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\log_3 x}{2}&=\frac{1}{\log_3 x}\\ (\log_3 x)^2&=4\end{aligned}$$

これより

$$\log_3 x=\pm 2$$

よって

$$x=3^2=9,\ x=3^{-2}=\frac{1}{9}$$

であるが，これは①をみたすので

$$\boldsymbol{x=9,\ \frac{1}{9}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数条件より

$$x < 2 \quad \cdots ①$$

与式は

$$\log_2(2-x)(3-x) \geqq \log_2 2$$

であり，底は 1 より大きいから

$$\begin{aligned} (2-x)(3-x) \geqq 2 &\iff x^2-5x+4 \geqq 0 \\ &\iff (x-4)(x-1) \geqq 0 \end{aligned}$$

よって

$$x \leqq 1,\ x \geqq 4$$

これと①より

$$\boldsymbol{x \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数条件より

$$x < -\sqrt{6},\ x > \sqrt{6} \quad \cdots ①$$

底の条件より

$$2 < x < 4,\ x > 4 \quad \cdots ②$$

①，②より

$$\sqrt{6} < x < 4,\ x > 4 \quad \cdots ③$$

ここで，与式は

$$\log_{\frac{x}{2}-1}(x^2-6) > \log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

(i) $\dfrac{x}{2}-1 > 1$ すなわち $x > 4 \cdots ④$ の場合

$$\begin{aligned} x^2-6 > \frac{x}{2}-1 &\iff 2x^2-x-10 > 0 \\ &\iff (x+2)(2x-5) > 0 \\ &\iff x < -2,\ x > \frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるが，これと④より

$$x > 4 \quad \cdots ⑤$$

(ii) $\dfrac{x}{2}-1 < 1$ すなわち $x < 4 \cdots ⑥$ の場合

$$\begin{aligned} x^2-6 < \frac{x}{2}-1 &\iff 2x^2-x-10 < 0 \\ &\iff (x+2)(2x-5) < 0 \\ &\iff -2 < x < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

これと⑥より

$$-2 < x < \frac{5}{2} \quad \cdots ⑦$$

③，⑤，⑦より

$$\boldsymbol{\sqrt{6} < x < \frac{5}{2},\ x > 4} \qquad \text{(答)}$$

(4) 真数条件より

$$x < -\sqrt{2},\ x > \sqrt{2} \quad \cdots ①$$

(i) $a > 1$ の場合

$$x^2 - 2 \leqq |x+1| \quad \cdots ②$$

であるが，$x^2 - 2 = x + 1$ すなわち $x^2 - x - 3 = 0$ の解は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ であり，$x^2 - 2 = -x - 1$ すなわち $x^2 + x - 1 = 0$ の解は $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ だから，② の解は

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

これと，① より

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x \leqq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

(ii) $0 < a < 1$ の場合

$$x^2 - 2 \geqq |x+1|$$

であるが，この解は，① とあわせて

$$x \leqq \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x \geqq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{a > 1} \textbf{ の場合} & \boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < x \leqq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}} \\ \boldsymbol{0 < a < 1} \textbf{ の場合} & \boldsymbol{x \leqq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x \geqq \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}} \end{cases}$$

(答)

添削課題

【1】(1) グラフは〔図 1〕のようになる.

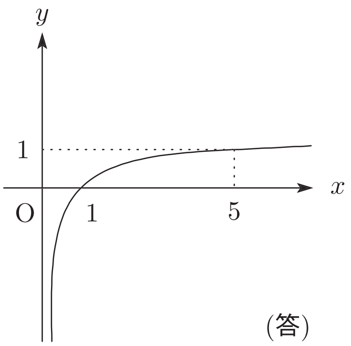
(2) $y=\log_{\frac{1}{5}} x=\dfrac{\log_5 x}{\log_5 \frac{1}{5}}=\dfrac{\log_5 x}{-1}=-\log_5 x$

よって，$y=\log_5 x$ と x 軸について対称なグラフとなり,〔図 2〕のようになる.

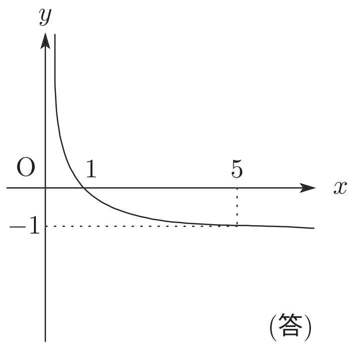
(3) $y=\log_5 x-\log_5 5=\log_5 x-1$

よって，$y=\log_5 x$ を y 軸正方向に -1 だけ平行移動したグラフとなり,〔図 3〕のようになる.

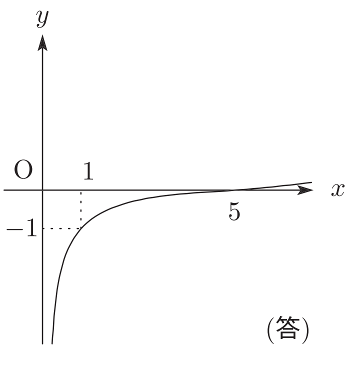
〔図 1〕



〔図 2〕



〔図 3〕



【2】(1) 底が $(0<)0.5(<1)$ であるから，対数の大小は真数の大小の逆になる．
したがって，

$$\mathbf{\log_{0.5} 5 < \log_{0.5} 3 < \log_{0.5} 0.2} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 3\sqrt{3}$$

ここで，$16<27$ より，$4<3\sqrt{3}$
底が $3(>1)$ であるから，対数の大小は真数の大小と一致する．
よって

$$\log_3 4 < \log_3 3\sqrt{3} \qquad \therefore\ \log_3 4 < \frac{3}{2}$$

また，

$$\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 2\sqrt{2}$$

ここで，$8<9$ より，$2\sqrt{2}<3$
底が $2(>1)$ であるから，対数の大小は真数の大小と一致する．
よって

$$\log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3 \qquad \therefore\ \frac{3}{2} < \log_2 3$$

以上から

$$\mathbf{\log_3 4 < \frac{3}{2} < \log_2 3} \qquad \text{(答)}$$

(3) $1<a<b$ で，底を a とする対数をとると

$$0 < 1 < \log_a b \qquad \therefore\ \log_a b - 1 > 0 \quad \cdots ①$$

いま

$$\log_a x - \log_b x = \log_a x - \frac{\log_a x}{\log_a b} = (\log_a x)\cdot\frac{\log_a b - 1}{\log_a b} \quad \cdots ②$$

① より

$$\frac{\log_a b - 1}{\log_a b} > 0$$

であるから，$\log_a x$ の正，0，負に応じて，② も正，0，負となる．
したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x>1} \text{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x > \log_b x} \\ \boldsymbol{x=1} \text{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x = \log_b x} \\ \boldsymbol{0<x<1} \text{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x < \log_b x} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 真数条件より

$$\begin{cases} 1-4x>0 \\ 1+x>0 \\ 5x+4>0 \end{cases} \qquad \therefore\ -\frac{4}{5}<x<\frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

このもとで

$$\begin{aligned} \log_2(1-4x)+\log_2(1+x) &= 2\log_4(5x+4) \\ \log_2(1-4x)(1+x) &= 2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{\log_2 4} \\ \log_2(1-3x-4x^2) &= 2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{2} \\ \log_2(1-3x-4x^2) &= \log_2(5x+4) \\ \therefore\ 1-3x-4x^2 &= 5x+4 \\ 4x^2+8x+3 &= 0 \\ (2x+1)(2x+3) &= 0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

① を考慮して

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}} \qquad (答)$$

(2) 真数条件より

$$\begin{cases} x^2-x+1>0 & \cdots ① \\ x+4>0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

これは，すべての実数 x について成立する．
② より，

$$x+4>0 \qquad \therefore\ x>-4\ \cdots(*)$$

以上より，

$$\therefore\ x>-4$$

このもとで，$0<a<1$ より

$$\begin{aligned} x^2-x+1 &> x+4 \\ x^2-2x-3 &> 0 \\ (x+1)(x-3) &> 0 \qquad \therefore\ x<-1,\ 3<x \end{aligned}$$

$(*)$ を考慮し，

$$\boldsymbol{-4<x<-1,\ 3<x} \qquad (答)$$

【4】(1)

$$\log_{10} 3^{80} = 80\log_{10} 3 = 80 \times 0.4771 = 38.168$$

したがって

$$38 < \log_{10} 3^{80} < 39$$

だから

$$\log_{10} 10^{38} < \log_{10} 3^{80} < \log_{10} 10^{39}$$
$$\therefore\ 10^{38} < 3^{80} < 10^{39}$$

これより，3^{80} は **39 桁** の数である．　　(答)

(2)

$$\begin{aligned}\log_{10}\left(\frac{2}{9}\right)^{100} &= 100\log_{10}\frac{2}{3^2} = 100(\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3) \\ &= 100 \times (0.3010 - 2 \times 0.4771) \\ &= -65.32\end{aligned}$$

$$\therefore\ -66 < \log_{10}\left(\frac{2}{9}\right)^{100} < -65$$

したがって

$$\log_{10} 10^{-66} < \log_{10}\left(\frac{2}{9}\right)^{100} < \log_{10} 10^{-65}$$
$$\therefore\ 10^{-66} < \left(\frac{2}{9}\right)^{100} < 10^{-65}$$

これより，$\left(\frac{2}{9}\right)^{100}$ は

小数第 66 位　　(答)

にはじめて 0 でない数が現れる．

M1J/M1JS
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	