M2JS/M2J

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

高２選抜東大クラス数学

高２東大数学

問題

【1】(1) $\sqrt[3]{2}$ が有理数であるとすると，p，q を自然数として

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$$

と表せる．ここで

$$2q^3 = p^3$$

であるが，左辺を素因数分解すると，2 の指数は (3 の倍数)+1 となる．一方，右辺を素因数分解すると，2 の指数は (3 の倍数) となるから矛盾．

よって，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることが示された．

(2) a，b，c を有理数として

$$P(x) = (x^3 - 2)Q(x) + ax^2 + bx + c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

とおく

$$P(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}a + \sqrt[3]{2}b + c = 0 \cdots\cdots ①$$

であり，これを $\sqrt[3]{2}$ 倍すると

$$2a + \sqrt[3]{4}b + \sqrt[3]{2}c = 0 \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$\sqrt[3]{2}(b^2 - ac) + bc - 2a^2 = 0 \cdots\cdots ③$$

ここで，$b^2 - ac \neq 0$ とすると

$$\sqrt[3]{2} = \frac{-bc + 2a^2}{b^2 - ac}$$

であり，右辺は有理数で，(1) と矛盾.

　よって，$b^2 = ac$ で $a \neq 0$ とすると $c = \dfrac{b^2}{a}$ だから③より

$$\frac{b^3}{a} = 2a^2 \qquad \therefore \quad \frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$$

で，左辺は有理数となり矛盾.

よって，$a = 0$，このとき $b = c = 0$ となるから

$$P(x) = (x^3 - 2)Q(x)$$

であり，$P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れる.

【2】(1) $x > y > 0$ より

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} - y^{n+1} &= (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \cdots xy^{n-1} + y^n) \\
&> (x-y)(n+1)y^n
\end{aligned}
$$

となる. 〔証明終〕

(2) $x = 1 + \dfrac{1}{n}, y = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ とすると, $x > y > 0$ が成り立つ. したがって, $x - y = \dfrac{1}{n(n+1)}$ に注意すると (1) より

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} &= x^{n+1} - y^{n+1} + y^{n+1} - y^{n+2} \\
&> (n+1)(x-y)y^n + y^{n+1}(1-y) \\
&= \frac{1}{n}y^n - \frac{1}{n+1}y^{n+1} \\
&= y^n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= y^n \cdot \frac{1}{n(n+1)^2} > 0
\end{aligned}
$$

より

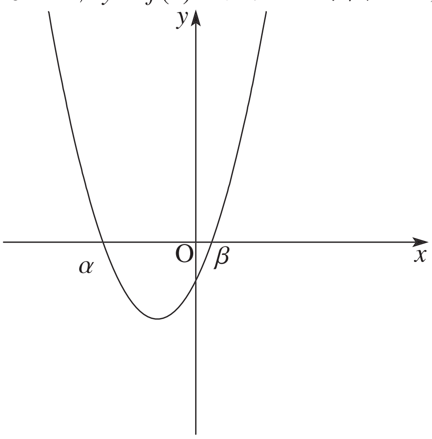
$$
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}
$$

である.

【3】(1) $f(x) = x^2 - x - k$ とおくと

$$f(0) = -k < 0$$

なので，$y = f(x)$ のグラフは下図のようになる．



$f(x) = 0$ の実数解は $y = f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標として表れるので，上記のグラフより $f(x) = 0$ は正負の実数解をひとつずつもつ．

(2) (1) で求めた正の解を β，負の解を α とする．解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1\ ,\ \alpha\beta = -k$$

が成り立つ．第 1 式より

$$\beta = 1 - \alpha > 1$$

に注意すると第 2 式より

$$\alpha = -\frac{k}{\beta} > -k$$

となる．〔証明終〕

(3)

$$\beta^3 - \alpha^3 = (\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)$$

であり，明らかに $\beta - \alpha > 0$ であることから

$$\beta - \alpha = \beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 \cdots\cdots ①$$

をみたす k を求めればよい．(2) より

$$\begin{aligned}(\beta - \alpha)^2 &= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= 1 + 4k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 &= (\beta + \alpha)^2 - \alpha\beta \\ &= 1 + k\end{aligned}$$

であるから①より

$$\sqrt{1 + 4k} = 1 + k \cdots\cdots ②$$

2 乗すると

$$1 + 4k = 1 + 2k + k^2$$
$$k^2 - 2k = 0$$

$k \fallingdotseq 0$ より $k = 2$.

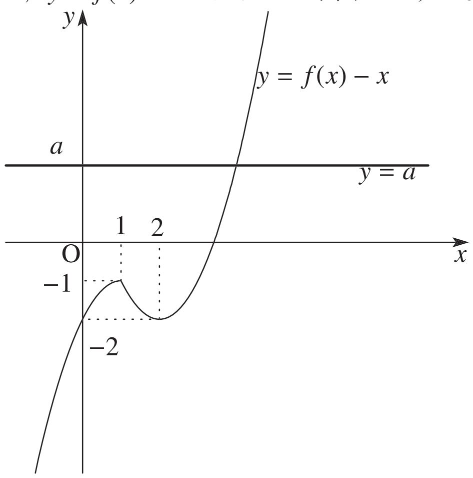
これは②をみたすので

$$k = 2$$

【4】 $y = f(x)$ と $y = x + a$ の共有点の代わりに，$y = f(x) - x$ と $y = a$ を x の共有点を調べる．
ここで

$$f(x) - x = |x - 1|(x - 2) - x = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & (x \geqq 1) \\ -x^2 + 2x - 2 & (x < 1) \end{cases}$$

であるから，$y = f(x) - x$ のグラフは下図のようになる．



したがって求める共有点の個数は

$$\begin{cases} 1\text{ 個} & (a < -2, a > -1) \\ 2\text{ 個} & (a = -1, -2) \\ 3\text{ 個} & (-2 < a < -1) \end{cases}$$

【5】x, y の方程式を y について整理すると

$$3y^2+(5+4x)y+2x^2+4x-4=0\cdots\cdots①$$

y の方程式①の判別式を D とすると

$$D=(5+4x)^2-3\cdot4(2x^2+4x-4) \qquad \therefore \quad D=-8x^2-8x+73$$

y が実数より

$$-8x^2-8x+73\geqq0 \qquad \therefore \quad \frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$$

であり，$x=\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ のとき，

$$y=-\frac{5+4x}{6}=-\frac{3+5\sqrt{6}}{6} \quad (実数)$$

となるので，x の最大値は

$$\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$$

【6】(1) $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定すると，互いに素である 2 つの自然数 p, q を用いて

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}$$

とおける．このとき

$$3=\frac{p^2}{q^2} \qquad \therefore \quad 3q^2=p^2$$

となる．したがって p^2 が 3 の倍数になるので p も 3 の倍数．よって自然数 k を用いて

$$p=3k$$

と表されるので

$$3q^2=(3k)^2 \qquad \therefore \quad q^2=3k^2$$

より q^2 が 3 の倍数になるので q も 3 の倍数となるが，p も 3 の倍数であったので，p, q が互いに素であるという仮定に矛盾する．

したがって $\sqrt{3}$ は有理数ではない，すなわち無理数である．

(2)

$$f(1+\sqrt{3})=a+b+4+(a+2)\sqrt{3}$$

であるから，$f(1+\sqrt{3})=0$ かつ $a+2\neq0$ のとき

$$\sqrt{3}=-\frac{a+b+4}{a+2}$$

となるが，(1) より左辺は無理数であり一方右辺は有理数となるので，これはありえない．したがって

$$a+2=0 \text{ かつ } a+b+4=0$$

すなわち

$$a=-2, b=-2$$

(3) $g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $sx+t$ (s, t は有理数) とすると

$$g(x) = f(x)Q(x) + sx + t$$

より，$g(1+\sqrt{3}) = 0$ となるとき

$$s(1+\sqrt{3}) + t = 0$$

(2) と同様に

$$s = 0 \text{ かつ } s + t = 0$$

すなわち

$$s = t = 0$$

となるので，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．ここで

$$f(1-\sqrt{3}) = (1-\sqrt{3})^2 - 2(1-\sqrt{3}) - 2 = 0$$

なので

$$g(1-\sqrt{3}) = 0$$

が成り立つ． 〔証明終〕

【7】記号の定義より，p を整数として $p \leqq x < p+1$ のとき

$$[x] = p$$

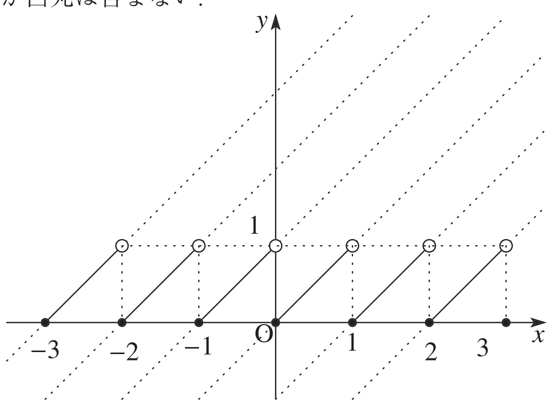
となる．したがって

$$x - [x] = \begin{cases} x+3 & (-3 \leqq x < -2) \\ x+2 & (-2 \leqq x < -1) \\ x+1 & (-1 \leqq x < 0) \\ x & (0 \leqq x < 1) \\ x-1 & (1 \leqq x < 2) \\ x-2 & (2 \leqq x < 3) \end{cases}$$

である．$x = 3$ のとき

$$f(3) = 3 - [3] = 0$$

であることに注意すると，求めるグラフは下図の実線部分となる．ただし端点のうち黒丸は含むが白丸は含まない．



【8】直線 $y = ax + b$ が 2 つの放物線 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 4x - 3$ の両方に接しているので

$$ax + b = x^2 \ , ax + b = -x^2 + 4x - 3$$

はともに重解をもつ．したがって判別式を考えると

$$\begin{cases} a^2 + 4b = 0 & \cdots\cdots ① \\ (a-4)^2 - 4(b+3) = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ．①，②から b を消去すると

$$\begin{aligned} (a-4)^2 + a^2 - 12 &= 0 \\ 2a^2 - 8a + 4 &= 0 \\ a^2 - 4a + 2 &= 0 \end{aligned}$$

より

$$a = 2 \pm \sqrt{2}$$

よって①より

$$b = -\frac{a^2}{4} = -\frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

となるので，求める a, b の組は

$$(a, b) = \left(2 + \sqrt{2}, -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right), \left(2 - \sqrt{2}, -\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\right)$$

問題

【1】(1) 与式の両辺に $4xy\ (\neq 0)$ をかけて

$$8y + 4x = xy$$
$$(x-8)(y-4) = 32$$

$x-8 > -8,\ y-4 > -4$ より

$$(x-8,\ y-4) = (1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$
$$\therefore\quad (x,\ y) = (9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5) \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式の両辺に $pxy\ (\neq 0)$ をかけて

$$2py + px = xy$$
$$(x-2p)(y-p) = 2p^2$$

$x-2p > -2p,\ y-p > -p$，また，p は 3 以上の素数より

$$(x-2p,\ y-p) = (1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),\ (p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$
$$\therefore\quad 2(x-2p)+3(y-p) = 6p^2+2,\ 3p^2+4,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

$2x+3y = 2(x-2p)+3(y-p)+7p$ が最小となるのは，$2(x-2p)+3(y-p)$ が最小となるときであり，$p \geqq 3$ より

$$2p^2+6 < 3p^2+4 < 4p^2+3 < 6p^2+2,\ 7p < 8p$$

であり

$$2p^2+6-7p = (p-2)(2p-3) > 0 \qquad \therefore\quad 7p < 2p^2+6$$

であるから，$2(x-2p)+3(y-p) = 7p$ となるときが最小で，このときの $(x,\ y)$ の値は

$$(x,\ y) = (4p,\ 2p) \qquad \text{(答)}$$

【2】

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 & \cdots ① \\ ad-bc+p=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$$c=-a-b-d$$

これを②に代入すると

$$ad+b(a+b+d)+p=0 \quad \Longleftrightarrow \quad (b+d)(a+b)=-p$$

ここで，p は素数であり，$a \geqq d$ であることから

$$(a+b,\ b+d)=(1,\ -p),\ (p,\ -1)$$

$a+b=1$ のとき，①より

$$c+d=-1$$

$b+d=-p$ であるから，$b<c$ となり，不適.
$a+b=p$ のとき，①より

$$c+d=-p$$

これらより，$a,\ c,\ d$ を p と b で表すと

$$\begin{cases} a=p-b \\ d=-b-1 \\ c=-p-d=-p+b+1 \end{cases} \cdots ③$$

$a \geqq b \geqq c \geqq d$ より

$$p-b \geqq b \geqq -p+b+1 \geqq -b-1$$

これより

$$\frac{p}{2} \geqq b \geqq \frac{p-2}{2}$$

b は整数であるから

$$b=\frac{p-1}{2}$$

これを③に代入して

$$a=\frac{p+1}{2},\quad c=\frac{-p+1}{2},\quad d=\frac{-p-1}{2}$$

【3】(1) 事象 A_1 が起こるのは，4 枚の中に ♡1 と ♠1 が含まれる場合なので，残りの 2 枚を取り出す場合を考えると，求める確率は

$$\frac{{}_{18}C_2}{{}_{20}C_4} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{3}{95} \qquad \text{(答)}$$

(2) 事象 A_1 と A_2 が同時に起こるのは，♡1, ♡2, ♠1, ♠2 の 4 枚を取り出す場合のみであるから，求める確率は

$$\frac{1}{{}_{20}C_4} = \frac{1}{4845} \qquad \text{(答)}$$

(3) 対称性より，(1) の結果を用いて

$$P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_{10}) = \frac{3}{95}$$

同様に，任意の自然数 $k,\ l$(ただし，$k < l,\ 1 \leqq k \leqq 9,\ 2 \leqq l \leqq 10$) について

$$P(A_k \cap A_l) = P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4845}$$

である．

また，同時に 3 組以上のカードを取り出すことはないから

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$$

以上より

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 3 \cdot \frac{3}{95} - 3 \cdot \frac{1}{4845} = \frac{8}{85} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 同時に 3 組以上のカードを取り出すことはないから，(3) と同様に考えて

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) &= 6P(A_1) - {}_6C_2 P(A_1 \cap A_2) \\ &= 6 \cdot \frac{3}{95} - 15 \cdot \frac{1}{4845} \\ &= \frac{301}{1615} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【4】(1) k を整数とする．

X のカードが k 回選ばれたとすると，Y のカードは $n-k$ 回選ばれる．このとき，P の到達する点は

$$(k,\ n-k) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

であり，P は，異なる k の値についてそれぞれ異なる点に到達するから，P の到達可能な点の個数は

$$n+1 \text{ 個} \qquad \text{(答)}$$

(2) P が点 $(k,\ n-k)$ に到達する確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

であるから，${}_n\mathrm{C}_k$ が最大となるとき，P が点 $(k,\ n-k)$ に到達する確率が最大となる．

ここで

$${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!},\ {}_n\mathrm{C}_{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

より

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k} \gtreqless 1 \iff \frac{n-k}{k+1} \gtreqless 1 \iff k \lesseqgtr \frac{n-1}{2}$$

であるから

(i) n が奇数のとき

$${}_n\mathrm{C}_0 < {}_n\mathrm{C}_1 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} = {}_n\mathrm{C}_{\frac{n+1}{2}} > \cdots > {}_n\mathrm{C}_{n-1} > {}_n\mathrm{C}_n$$

(ii) n が偶数のとき

$${}_n\mathrm{C}_0 < {}_n\mathrm{C}_1 < \cdots < {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}-1} < {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}} > {}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}+1} > \cdots > {}_n\mathrm{C}_{n-1} > {}_n\mathrm{C}_n$$

以上まとめると，P が到達する確率が最大の点は

$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & \left(\dfrac{n-1}{2},\ \dfrac{n+1}{2}\right),\ \left(\dfrac{n+1}{2},\ \dfrac{n-1}{2}\right) \\ n \text{ が偶数のとき} & \left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}\right) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【5】$f(x)=x^2-nx+m$ とおく．平方完成して

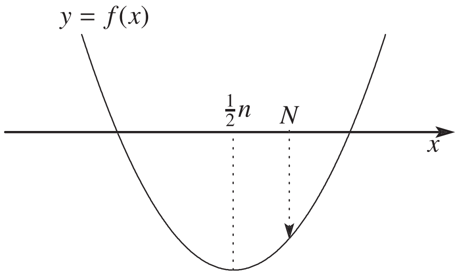
$$f(x)=x^2-nx+\left(\frac{1}{2}n\right)^2-\left(\frac{1}{2}n\right)^2+m$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}n\right)^2+m-\frac{1}{4}n^2$$

関数 $y=f(x)$ について，軸は $x=\dfrac{1}{2}n$ であり，条件から

$$n \leqq 2N \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}n \leqq N$$

であるから，$f(x)=0$ が N 以上の実数解を持つとき，グラフより $f(N)\leqq 0$ である．

図 1.1



よって

$$f(N)=N^2-nN+m\leqq 0$$
$$m\leqq nN-N^2=N(n-N)$$

この式から $n-N\geqq 0 \Longleftrightarrow n\geqq N$ なので，$2N\geqq n$ とあわせて $N\leqq n\leqq 2N$ となる．
したがって，n を $n=N+k\ \ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots,N)$ とおくと

$$m\leqq N\{(N+k)-N\}$$
$$m\leqq kN$$

となる．以下，k の値に応じて場合分けを行う．

(i) $k=0$ のとき

このときは，題意をみたす $(m,\ n)$ は存在しない．

(ii) $k=1$ のとき

$m\leqq N$ であり，条件 $m\leqq 2N$ とあわせて $m=1,\ 2,\cdots,N$ が題意をみたす．したがって，このとき $(m,\ n)$ の組は N 個存在する．

(iii) $k=2,\ 3,\ \cdots,N$ のとき

$m\leqq kN$ であるが，条件 $m\leqq 2N$ より $m=1,\ 2,\ \cdots,2N$ が題意をみたす．したがって，このとき $(m,\ n)$ の組は，$2N$ 個存在する．

以上より，求める $(m,\ n)$ の組は全部で

$$0+N+(N-1)\times 2N=2N^2-N\ (\text{組}) \qquad (\text{答})$$

【6】(1) 5 以上のすべての素数は，ある自然数 n を用いて

$$6n \pm 1, \quad 6n \pm 2, \quad 6n + 3$$

のいずれかの形で表される．

しかし

$$6n \pm 2 = 2(3n \pm 1), \quad 6n + 3 = 3(2n + 1)$$

より，$6n \pm 2$, $6n + 3$ は合成数である．

よって，5 以上のすべての素数は，ある自然数 n を用いて $6n + 1$ または $6n - 1$ の形で表される． 〔証明終〕

(2) $6N - 1$ は 2，3 を約数にもたないので，(1) の結果より，1 以外のすべての素数の約数は自然数 n を用いて $6n + 1$ または $6n - 1$ の形で表される．

ここで，$6N - 1$ が $6n - 1$ の形で表される素数を約数にもたないと仮定する．$\cdots(\sharp)$

このとき，$6N - 1$ を素因数分解すると，自然数 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ と $a_1, a_2, \ldots, a_k$ を用いて

$$6N - 1 = (6n_1 + 1)^{a_1} \cdots (6n_k + 1)^{a_k} \quad \cdots(*)$$

とかける．

ここで，任意の整数 K, L について

$$(6K + 1)(6L + 1) = 6(6KL + K + L) + 1$$

であるから，6 で割ると 1 余る自然数の積は，6 で割ると 1 余る．

よって，$(*)$ の右辺は 6 で割ると 1 余るが，$(*)$ の左辺は 6 で割ると 5 余るから，$(*)$ は成立しない．すなわち，$(\sharp)$ の仮定に反する．

よって，$6N - 1$ は $6n - 1$ の形で表される素数を約数にもつ． 〔証明終〕

(3) $6n - 1$ の形で表される素数が有限個であると仮定する．$\cdots(\flat)$

$6n - 1$ の形で表される素数を小さい方から順に

$$p_1, p_2, \ldots, p_{N_0}$$

とおく．このとき

$$P = 6p_1 \cdot p_2 \cdots p_{N_0} - 1$$

という数を考えると，P は $p_1, p_2, \ldots, p_{N_0}$ で割り切れない．

ところが，(2) の結果より，P は $6n - 1$ の形で表される素数を約数にもつので，これは $(\flat)$ の仮定に反する．

よって，$6n - 1$ の形で表される素数は無限に多く存在する． 〔証明終〕

【7】1 から 5 までの自然数を 1 列に並べたとき，i 番目の自然数を a_i $(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ とする．

このとき，自然数の並べ方は全部で $5! = 120$ 通りである．

1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなるとき

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 \\ \iff\quad & a_1 + a_2 = a_4 + a_5 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = \frac{15 - a_3}{2}$$

ここで，$\dfrac{15 - a_3}{2}$ は整数であるから，a_3 は奇数.

(i) $a_3 = 1$ のとき

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 7$$

であるから

$$\{a_1,\ a_2\} = \{2,\ 5\},\ \{a_4,\ a_5\} = \{3,\ 4\}$$
または
$$\{a_1,\ a_2\} = \{3,\ 4\},\ \{a_4,\ a_5\} = \{2,\ 5\}$$

(ii) $a_3 = 3$ のとき

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 6$$

であるから

$$\{a_1,\ a_2\} = \{1,\ 5\},\ \{a_4,\ a_5\} = \{2,\ 4\}$$
または
$$\{a_1,\ a_2\} = \{2,\ 4\},\ \{a_4,\ a_5\} = \{1,\ 5\}$$

(iii) $a_3 = 5$ のとき

$$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 5$$

であるから

$$\{a_1,\ a_2\} = \{1,\ 4\},\ \{a_4,\ a_5\} = \{2,\ 3\}$$
または
$$\{a_1,\ a_2\} = \{2,\ 3\},\ \{a_4,\ a_5\} = \{1,\ 4\}$$

(i)，(ii)，(iii) それぞれの場合について a_1 と a_2，a_4 と a_5 の組み合わせを考えて，a_1, a_2, a_4, a_5 の組み合わせは

$$2^3 = 8 \text{ 通り}$$

であるから，1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる組み合わせは全部で

$$3 \times 8 = 24 \text{ 通り}$$

よって，求める確率は

$$\frac{24}{120} = \frac{1}{5} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】正弦定理より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = 2$$

が成り立つので

$$\mathrm{BC} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

また，△ABC の面積を考えると

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

より

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \sqrt{3}+1$$

である．一方余弦定理より

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}$$

であるから

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 3 + 2(\sqrt{3}+1)\frac{1}{2} = 4+\sqrt{3}$$

したがって

$$(\mathrm{AB}+\mathrm{AC})^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 + 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = 6+3\sqrt{3}$$
$$(\mathrm{AB}-\mathrm{AC})^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = 2-\sqrt{3}$$

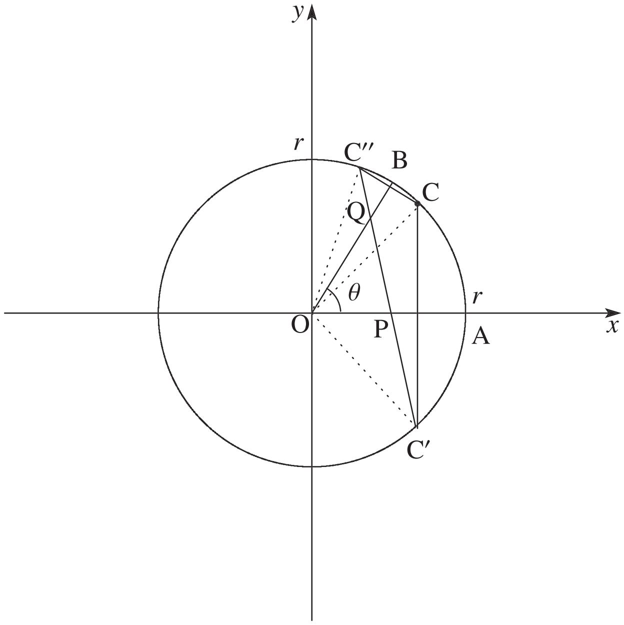
より，$\mathrm{AB} > \mathrm{AC} > 0$ に注意すると

$$\mathrm{AB}+\mathrm{AC} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$
$$\mathrm{AB}-\mathrm{AC} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

となるので

$$\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{2}$$

【2】(1) $\mathrm{A}(r, 0)$ としても一般性を失わず，このとき $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ より $\mathrm{B}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ となる．
C の直線 OA, OB に関する対称点をそれぞれ C′, C″ とすると，C′, C″ はともに円周上にあり，位置関係は下図のようになる．



また，対称性より

$$\mathrm{CP} = \mathrm{C'P},\ \mathrm{CQ} = \mathrm{C''Q}$$

であるから，CP + PQ + QC が最小になるのは C′P + PQ + QC″ が最小になるとき，すなわち C′, P, Q, C″ が一直線上に並ぶときである．
そして

$$\angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{BOC''}, \angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{C'OA}$$

となるので

$$\angle\mathrm{C'OC''} = 2\theta$$

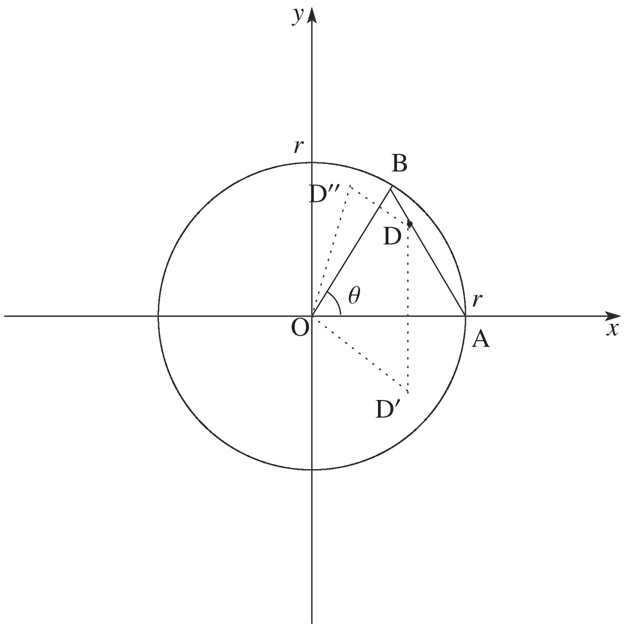
より，求める最小値を m_1 とすると余弦定理より

$$m_1{}^2 = 2r^2 - 2r^2\cos 2\theta = 4r^2\sin^2\theta$$

よって

$$m_1 = 2r\sin\theta$$

(2) D の直線 OA, OB に関する対称点をそれぞれ D′, D″ とすると，D′, D″ はともに円周上にあり，位置関係は次図のようになる．



また，対称性より

$$\mathrm{DP} = \mathrm{D'P},\ \mathrm{DQ} = \mathrm{D''Q}$$

であるから，$\mathrm{DP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QD}$ が最小になるのは $\mathrm{D'P} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QD''}$ が最小になるとき，すなわち $\mathrm{D'}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{D''}$ が一直線上に並ぶときである．

そして

$$\angle\mathrm{BOD} = \angle\mathrm{BOD''},\ \angle\mathrm{DOA} = \angle\mathrm{D'OA}$$

となるので

$$\angle\mathrm{D'OD''} = 2\theta$$

より，求める最小値を m_2 とすると余弦定理より

$${m_2}^2 = 2a^2 - 2a^2\cos 2\theta = 4a^2\sin^2\theta$$

よって

$$m_2 = 2a\sin\theta$$

(3) a が最小になるときを考えればよく，これは $\mathrm{OD} \perp \mathrm{AB}$ となるとき，すなわち D が AB の中点となるときである．

このとき

$$a = r\cos\frac{\theta}{2}$$

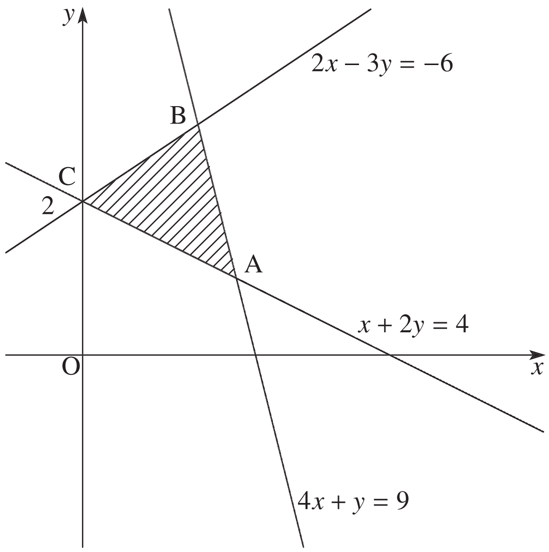
であるから，求める最小値を m_3 とおくと (2) より

$$m_3 = 2r\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

【3】

$$4x+y \leqq 9,\ x+2y \geqq 4,\ 2x-3y \geqq -6$$

をすべてみたす領域は下図の斜線部分となる．ただし，境界を含む．



ここで境界の交点は

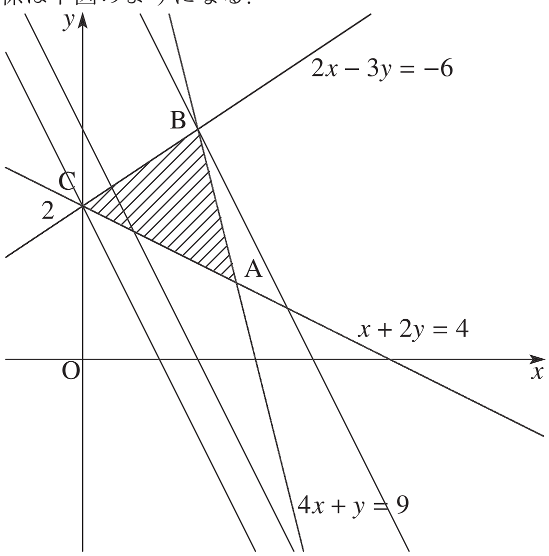
$$\mathrm{A}(2,1),\ \mathrm{B}\left(\frac{3}{2},3\right),\ \mathrm{C}(0,2)$$

である．

まず，

$$2x+y=k_1 \cdots\cdots ①$$

とおくと，これは直線を表す．P が動く領域の境界線の傾きを考えると，領域と直線①の位置関係は下図のようになる．



k_1 は直線①の y 切片を表すので，k_1 が最大になるのは直線①が点 B を通るときで，このとき

$$k_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 6$$

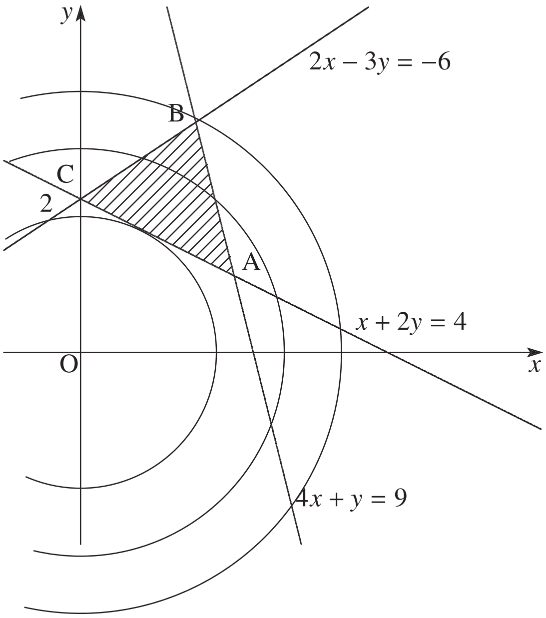
また，k_1 が最小になるのは直線①が点 C を通るときで，このとき

$$k_1 = 2$$

次に

$$x^2 + y^2 = k_2 \cdots\cdots ②$$

とすると，これは円を表し，点 P の動く領域と円②の位置関係は下図のようになる．



したがって，k_2 が最大となるのは円②が点 B を通るときで，このとき

$$k_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{45}{4}$$

また，k_2 が最小となるのは円②が直線 $x + 2y = 4$ と接するときである．このときの接点を H とすると，直線 OH の方程式は

$$2x - y = 0$$

となる．したがって H の座標は $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ となるので，k_2 が最小になるとき

$$k_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

【4】(1) △ABC が二等辺三角形であるのは次のいずれかの場合である．

(i) AB=AC のとき

$1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ すなわち $x^2 + y^2 = 1$

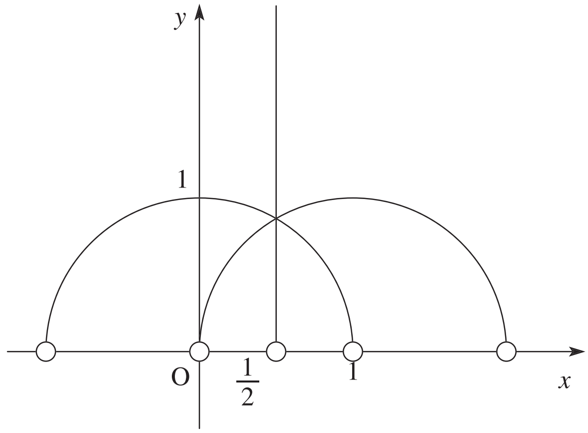
(ii) AC = BC のとき

$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$ すなわち $2x - 1 = 0$

(iii) AB =BC のとき

$1 = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$ すなわち $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$y > 0$ に注意すると，求める図形は下図の実線部分となる．ただし端点の白丸は含まない．



(2) △ABC が鋭角三角形であるための条件は

$$\cos\angle\mathrm{A} > 0, \cos\angle\mathrm{B} > 0, \cos\angle\mathrm{C} > 0$$

である．余弦定理より，求める条件は

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2 > 0, \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2 > 0, \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}^2 > 0$$

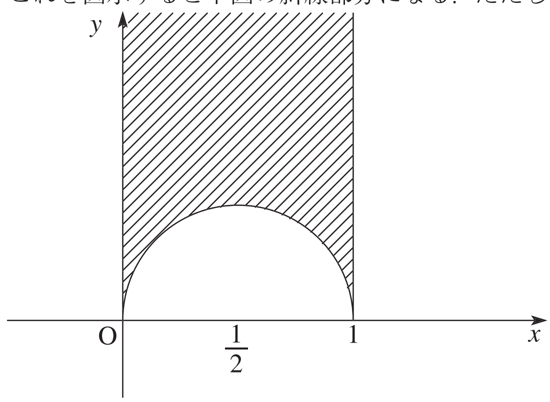
と同値なので

$1+(x^2+y^2)-\{(1-x)^2+y^2\} > 0, 1+\{(1-x)^2+y^2\}-(x^2+y^2) > 0, \{(1-x)^2+y^2\}+(x^2+y^2)-1 > 0$

すなわち

$$x > 0, x < 1, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

これを図示すると下図の斜線部分になる．ただし境界を含まない．



(3) (2) のもとで，さらに

$$\mathrm{BC} \leqq \mathrm{AC} \leqq \mathrm{AB}$$

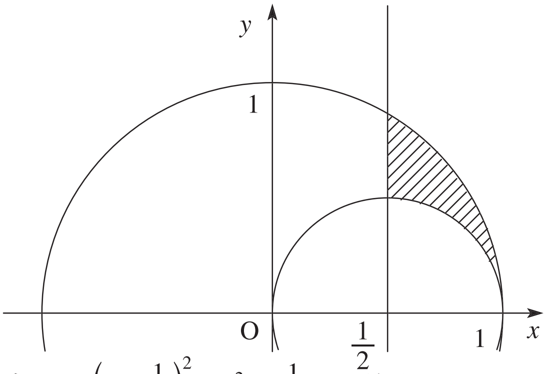
が成り立てばよい．つまり

$$\{(1-x)^2+y^2\} \leqq (x^2+y^2) \leqq 1$$

より

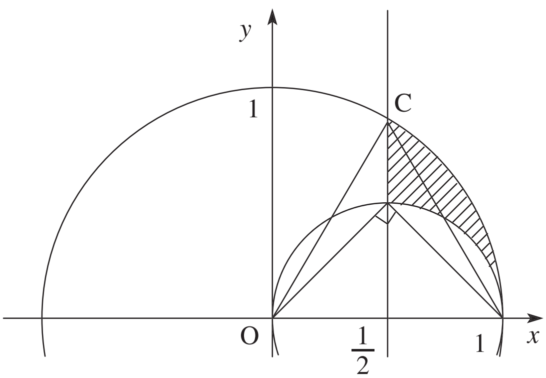
$$2x-1 \geqq 0, (x^2+y^2) \leqq 1$$

であればよいので，求める領域は下図の斜線部分である．ただし境界は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 上を含まず他を含む.



(4) 点 C が $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ から遠くなるほど γ は小さくなる．(3) の領域内の点で $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ から最も遠い点は $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であり，このとき △ABC は正三角形になるので，求める γ の範囲は

$$\frac{\pi}{3} \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$



【5】(1) $A+B+C=\pi$ より

$$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned}\sin\frac{B}{2}&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right)\\&=\cos\frac{A+C}{2}\\\cos\frac{B}{2}&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right)\\&=\sin\frac{A+C}{2}\end{aligned}$$

となる.　〔証明終〕

(2) △ABC の外接円の半径を R とする．正弦定理より

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

すなわち

$$a=2R\sin A\ ,\ b=2R\sin B\ ,\ c=2R\sin C$$

が成り立つので，$a+c=2b$ が成り立つとき

$$2R\sin A+2R\sin C=2\cdot 2R\sin B$$

より

$$\sin A+\sin C=2\sin B$$

が成り立つ.　〔証明終〕

(3) (1)(2) より

$$\begin{aligned}\sin A+\sin C=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\\\sin B=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}\\2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}\\2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}\end{aligned}$$

および

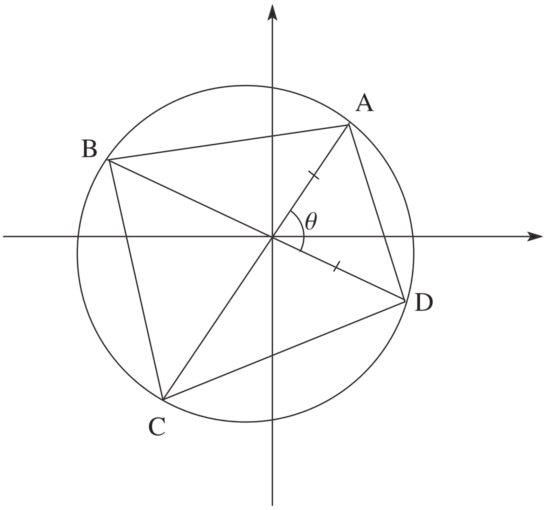
$$\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$$

より

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} &= \frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}} \\
&= -\frac{\cos\frac{A+C}{2}-\cos\frac{A-C}{2}}{\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{A-C}{2}} \\
&= -\frac{\sin\frac{B}{2}-2\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

となる.

【6】



(1) C$(a, 2a)$ となるので

$$\mathrm{OC} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}|a|$$

となる．位置関係より $a < 0$ となるので

$$\mathrm{OC} = -\sqrt{5}a$$

そして，方べきの定理より

$$\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OC} = \mathrm{OB} \cdot \mathrm{OD}$$

が成り立ち，OA=OD より

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

となる． 〔証明終〕

(2) (1) より $\mathrm{OA} = \mathrm{OD} = \sqrt{5}, \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = -\sqrt{5}a$ となるので

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OCD} + \triangle\mathrm{ODA} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5}a)\sin(\pi-\theta) + \frac{1}{2}(-\sqrt{5}a)^2\sin\theta + \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5}a)\sin(\pi-\theta) + \frac{1}{2}(\sqrt{5})^2\sin\theta \\ &= \frac{5}{2}(a-1)^2\sin\theta \end{aligned}$$

(3) (2) の結果と $\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$20 \leqq S \leqq 40$ より

$$20 \leqq \frac{5}{4}(a-1)^2 \leqq 40$$

すなわち

$$16 \leqq (a-1)^2 \leqq 32$$

$a < 0$ より

$$4 \leqq 1 - a \leqq 4\sqrt{2}$$

したがって

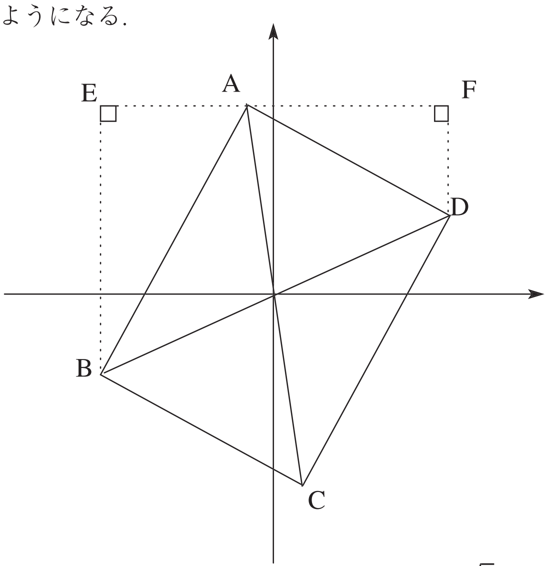
$$1 - 4\sqrt{2} \leqq a \leqq -3$$

となるので，a の最大値は -3 となる．

【7】(1) $\mathrm{A}(p, q)$, $\mathrm{B}(r, s)$ とする．このとき対称性から

$$\mathrm{C}(-p, -q)\ , \mathrm{D}(-r, -s)$$

であることに注意する．そして，$\mathrm{E}(r, q)$, $\mathrm{F}(-r, q)$ とすると，これらの点の位置関係は下図のようになる．



ここで，直線 AB の傾きが 2，線分 AB の長さが $2\sqrt{5}a$ であることから

$$\mathrm{AE} = 2a, \mathrm{BE} = 4a$$

とわかる．点 A の y 座標が点 B の y 座標より大きいことに注意すると

$$r = p - 2a \qquad \cdots\cdots①$$
$$s = q - 4a \qquad \cdots\cdots②$$

また，$\mathrm{AB} \perp \mathrm{AD}$ より直線 AD の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ となるので，線分 AD の長さが $2\sqrt{5}b$ であることから

$$\mathrm{AF} = 4b, \mathrm{DF} = 2b$$

とわかる．点 A の y 座標が点 D の y 座標より大きいことに注意すると

$$-r = p + 4b \qquad \cdots\cdots③$$
$$-s = q - 2b \qquad \cdots\cdots④$$

したがって①，③より

$$p = a - 2b$$

②，④より

$$q = 2a + b$$

よって

$$r = -a - 2b, s = -2a + b$$

となるので

$$\mathrm{A}(a-2b,2a+b),\mathrm{B}(-a-2b,-2a+b),\mathrm{C}(-a+2b,-2a-b),\mathrm{D}(a+2b,2a-b)$$

である．

(2) 条件をみたすのは 4 点 A,B,C,D がすべて領域 $x^2+(y-5)^2 \leqq 100$ に含まれるとき，すなわち

$$\begin{cases} \sqrt{(a-2b)^2+(2a+b-5)^2} \leqq 10 \\ \sqrt{(-a-2b)^2+(-2a+b-5)^2} \leqq 10 \\ \sqrt{(-a+2b)^2+(-2a-b-5)^2} \leqq 10 \\ \sqrt{(a+2b)^2+(2a-b-5)^2} \leqq 10 \end{cases}$$

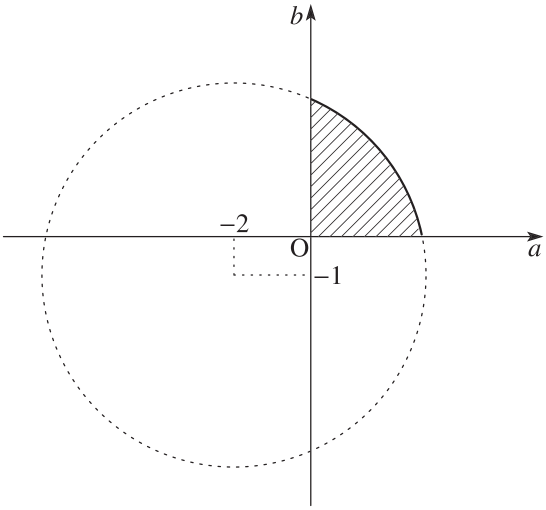
がすべて成り立つときであるから，それぞれの式を整理して

$$\begin{cases} (a-2)^2+(b-1)^2 \leqq 20 \\ (a+2)^2+(b-1)^2 \leqq 20 \\ (a+2)^2+(b+1)^2 \leqq 20 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \leqq 20 \end{cases}$$

より

$$(a+2)^2+(b+1)^2 \leqq 20, a>0, b>0$$

となる．これを図示すると次の図の斜線部分となる．ただし境界は a 軸，b 軸を除きすべて含む．



【8】(1) Q は半直線 OP 上にあるので

$$\mathrm{Q}(kx, ky)(k > 0)$$

とおける．与えられた条件より

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = 4$$

すなわち

$$k = \frac{4}{x^2 + y^2}$$

である．つまり

$$\mathrm{Q}\left(\frac{4x}{x^2 + y^2}, \frac{4y}{x^2 + y^2}\right)$$

(2) P と Q が円 C に関して対称なので，$\mathrm{Q}(X, Y)$ とおくと (1) より

$$\mathrm{P}\left(\frac{4X}{X^2 + Y^2}, \frac{4Y}{X^2 + Y^2}\right)$$

となる．P は曲線 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13, (x, y) \fallingdotseq (0, 0)$ 上にあるので $(X, Y) \fallingdotseq (0, 0)$ であり

$$\left(\frac{4X}{X^2 + Y^2} - 2\right)^2 + \left(\frac{4Y}{X^2 + Y^2} - 3\right)^2 = 13$$

が成り立つ．これを整理すると

$$2X + 3Y = 2$$

となり，$(X, Y) = (0, 0)$ は明らかにこの等式をみたさないので，求める Q の軌跡は

$$\text{直線 } 2x + 3y = 2$$

である．

問題

【1】(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ において $\sin x \geqq 0$ である．

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x \geqq 0$ なので $|\cos x| = \sin x$ より

$$\cos x = \sin x$$

これをみたすのは $x = \dfrac{\pi}{4}$ である．

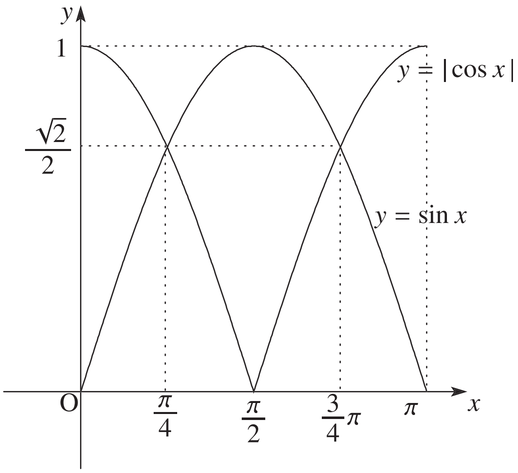
(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\cos x \leqq 0$ なので $|\cos x| = \sin x$ より

$$-\cos x = \sin x$$

これをみたすのは $x = \dfrac{3}{4}\pi$ である．

以上より求める実数解は $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi$ となる．

また，$\cos x = \cos(-x)$ であるから，$\cos(\cos x), \cos(\sin x)$ の大小関係を調べるためには，$\cos|\cos x|, \cos(\sin x)$ の大小関係を調べれば十分である．ここで，$y = |\cos x|, y = \sin x$ のグラフは下図のようになる．



$0 \leqq x \leqq 1 \left(< \dfrac{\pi}{2}\right)$ の範囲において $\cos x$ は単調減少であるから，大小関係は

$$\begin{cases} \cos(\cos x) < \cos(\sin x) & \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi < x \leqq \pi\right) \\ \cos(\cos x) = \cos(\sin x) & \left(x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3}{4}\pi\right) \\ \cos(\cos x) > \cos(\sin x) & \left(\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3}{4}\pi\right) \end{cases}$$

となる．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x$ が単調増加であることに注意すると

$$\begin{aligned} \cos\alpha - \sin\beta &> \cos\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ &= \cos\alpha - \cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

より $\cos\alpha > \sin\beta$ は成り立つ. 〔証明終〕

ここで, $f(x) = \cos(\cos x) - \sin(\sin x)$ とすると

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} - \sin\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} \\ &= \cos(\sin x) - \sin(\cos x) \\ &= \cos(-\sin x) - \sin(\cos x) \\ &= \cos\left\{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} - \sin\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

となるので, $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して対称であり, $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ について調べればよい. この範囲で $\alpha = \cos x, \beta = \sin x$ とすると

$$\cos x \geqq 0, \sin x \geqq 0, \cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

なので, 条件 $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ をみたす. したがって $\cos\alpha > \sin\beta$ すなわち $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$ が成り立つ. 〔証明終〕

【2】(1) ① の左辺は

$$\begin{aligned} ab - b^2 + 5a - 2b + 15 &= a(b+5) - (b^2 + 2b - 15) \\ &= (a - b + 3)(b + 5) \end{aligned}$$

と変形できる．$b > 0$ より $b + 5 > 0$ に注意すると，①より $a - b + 3 = 0$ すなわち

$$b - a = 3$$

(2) ②の両辺を $a^a b^a (> 0)$ で割ると

$$b^{b-a} - a^{b-a} - 999 = 0$$

(1) より

$$\begin{aligned} b^3 - a^3 &= 999 \\ (b - a)(b^2 + ab + a^2) &= 999 \\ 3(a^2 + ab + b^2) &= 999 \\ (b - a)^2 + 3ab &= 333 \\ ab &= 108 \end{aligned}$$

となる．したがって，解と係数の関係より x の 2 次方程式

$$x^2 - 3x - 108 = 0$$

は $-a, b$ を 2 解にもつ．これを解くと

$$\begin{aligned} (x - 12)(x + 9) &= 0 \\ x &= -9, 12 \end{aligned}$$

$a > 0, b > 0$ に注意すると

$$a = 9, b = 12$$

(3) (2) より

$$\begin{aligned} \log_{10} a^{50} &= \log_{10} 3^{100} \\ &= 100 \log_{10} 3 \\ &= 47.71 \end{aligned}$$

であるから，a^{50} は 48 桁である．

(4)

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.7781$$

なので

$$47 + \log_{10} 5 < \log_{10} a^{50} < 47 + \log_{10} 6$$

である．つまり

$$5 \times 10^{47} < a^{50} < 6 \times 10^{47}$$

となるので，a^{50} の最高位の数字は 5 である．

【3】(1) $f(x) = x^3 - 3x$ より

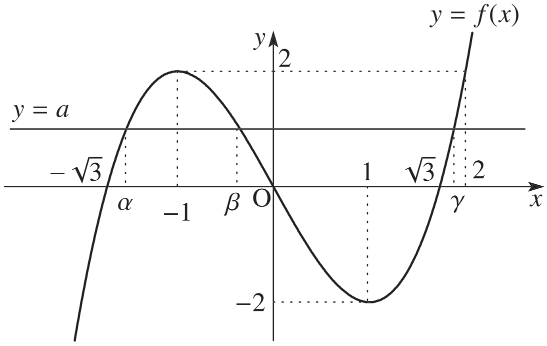
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

したがって次の増減表を得る.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって，グラフは図 1.1 の太線部ようになる.　　　(答)

図 1.1



(2) 次のように曲線 C と直線 ℓ を定める.

$$\begin{cases} C : y = f(x) \\ \ell : y = a \end{cases}$$

$f(x) = a$ が相異なる 3 つの実数解をもつための条件は，曲線 C と直線 ℓ が異なる 3 交点をもつことである.

よって，条件 $a > 0$ と図 1.1 より，求める a の範囲は

$$0 < a < 2 \qquad \text{(答)}$$

(3) 図 1.1 より，$\alpha < 0,\ \beta < 0$ であるから

$$|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$$

が成立する．よって

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| = |\alpha + \beta| + |\gamma|$$

ここで，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は x の 3 次方程式 $x^3 - 3x = a$ の異なる 3 つの実数解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad \therefore \quad \alpha + \beta = -r$$

よって

$$\begin{aligned} |\alpha| + |\beta| + |\gamma| &= |\alpha + \beta| + |\gamma| \\ &= |-\gamma| + |\gamma| \\ &= 2|\gamma| \end{aligned}$$

図 1.1 より $\sqrt{3} < |\gamma| < 2$ であるから

$$2\sqrt{3} < 2|\gamma| < 4$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{3} < |\alpha| + |\beta| + |\gamma| < 4 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $f(x) = x^3 - x$ とおく.

$f'(x) = 3x^2 - 1$ より，$x = p$ における接線の方程式は

$$y = (3p^2 - 1)(x - p) + p^3 - p$$

整理して，求める方程式は

$$\ell : y = (3p^2 - 1)x - 2p^3 \qquad \text{(答)}$$

(2) C_1 と ℓ の方程式を連立して y を消去すれば

$$x^3 - x = 3p^2x - x - 2p^3$$

$x = p$ を重解に持つことより，整理して

$$(x - p)^2(x + 2p) = 0$$

したがって，B の x 座標は $x = -2p$ となる．$f(-2p) = -8p^3 + 2p$ だから，求める座標は

$$\mathrm{B}(-2p,\ -8p^3 + 2p) \qquad \text{(答)}$$

(3) $g(x) = x^3 - x + 4$ とおく．$g'(x) = 3x^2 - 1$ であるから，C_2 上の点 $(t,\ t^3 - t + 4)$ における接線の方程式は同様にして

$$y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 4$$

これが ℓ と一致するので

$$\begin{cases} 3t^2 - 1 = 3p^2 - 1 & \cdots\cdots ① \\ -2t^3 + 4 = -2p^3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より

$$t = p,\ -p$$

$t = p$ は ② をみたさないため不適.

$t = -p$ のとき，② に代入して整理すると

$$p^3 = -1$$

p は実数であるから

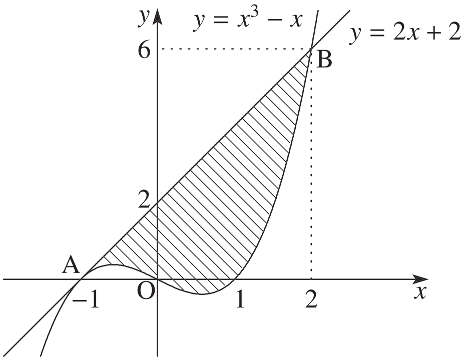
$$p = -1 \qquad \text{(答)}$$

(4) $p = -1$ を代入して

$$\ell : y = 2x + 2,\ \mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{B}(2,\ 6)$$

となるので，求める面積は図 1.2 の斜線部.

図 1.2



よって

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{2}\{(2x+2)-(x^3-x)\}dx \\
&=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx \\
&=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2} \\
&=(-4+6+4)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right) \\
&=\frac{27}{4} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】(1) 条件をみたす m, n が存在すると仮定する．このとき $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ より

$$2^{\frac{m}{n}} = 3$$

すなわち

$$2^m = 3^n$$

が成り立つことになるが，m, n が自然数なのでこの式の左辺は偶数，右辺は奇数となり矛盾．

したがって条件をみたす m, n は存在しない． 〔証明終〕

(2) $p > q$ として一般性を失わない．$p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する．このとき自然数 m を用いて

$$p \log_2 3 - q \log_2 3 = (p - q) \log_2 3 = m$$

とかけるので

$$\log_2 3 = \frac{m}{p - q}$$

が成り立つ．ここで p, q は異なる自然数で $p > q$ なので $p - q$ も自然数となるが，これは (1) で示した事実に矛盾する．したがって $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくない． 〔証明終〕

(3) $2^3 < 3^2$ であるから

$$3 < 2 \log_2 3$$

すなわち

$$1.5 < \log_2 3$$

である．一方 $3^5 < 2^8$ であるから

$$5 \log_2 3 < 8$$

すなわち

$$\log_2 3 < 1.6$$

である．以上より $1.5 < \log_2 3 < 1.6$ であるから，$\log_2 3$ の小数第 1 位は **5** である．

【6】(1)

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

(2) $x=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ とすると

$$x^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$x^4=(x^2)^2=\frac{7+4\sqrt{3}}{16}$$

よって

$$\begin{aligned}ax^4+bx^2+1 &= \frac{7+4\sqrt{3}}{16}a+\frac{2+\sqrt{3}}{4}b+1\\ &= \left(\frac{7}{16}a+\frac{1}{2}b+1\right)+\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b\right)\sqrt{3}\end{aligned}$$

となるので，これが 0 になるとき

$$\begin{cases}\dfrac{7}{16}a+\dfrac{1}{2}b+1=0\\[2mm] \dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}b=0\end{cases}$$

これを解いて

$$a=16, b=-16$$

【7】(1) 与えられた不等式より

$$x^3+4x^2\leqq ax+18 \iff x^3+4x^2-18\leqq ax \quad \cdots ①$$

$f(x)=x^3+4x^2-18$ とおけば

$$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)$$

したがって次の増減表を得る.

x	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{230}{27}$	$\searrow$	-18	$\nearrow$

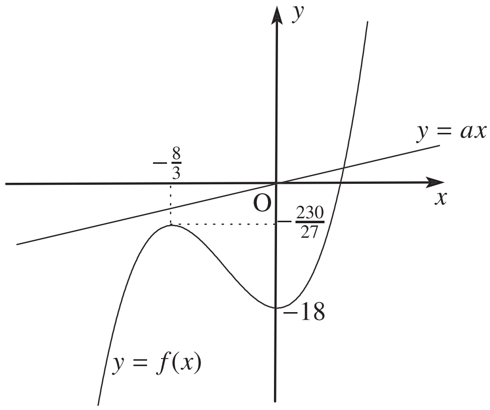
よって，グラフは図 1.3 のようになる.

いま，直線 $y=ax$ と $y=f(x)$ が接するときの a の値を求める.

$y=f(x)$ 上の点 $(s,\ f(s))$ における $y=f(x)$ の接線は

$$y=f'(s)(x-s)+f(s)\iff y=s(3s+8)(x-s)+s^3+4s^2-18$$

図 1.3



と表せる．これが原点 (0, 0) を通るとき

$$0 = s(3s + 8)(-s) + s^3 + 4s^2 - 18 \Longleftrightarrow (s + 3)(s^2 - s + 3) = 0$$

となる．

$$s^2 - s + 3 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

であるから $s = -3$ であり，このときの接線の方程式は $y = 3x$ となる．

よって，図 1.3 を考えて，すべての $x \leqq 0$ に対して $f(x) \geqq ax$ をみたす a の範囲は

$$a \leqq 3 \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より $a_0 = 3$ であるから，これを不等式に代入して

$$\begin{aligned}
&x^3 + 4x^2 \leqq 3x + 18\\
&x^3 + 4x^2 - 3x - 18 \leqq 0\\
&(x - 2)(x^2 + 6x + 9) \leqq 0\\
&(x - 2)(x + 3)^2 \leqq 0
\end{aligned}$$

したがって

$$x \leqq 2 \qquad \text{(答)}$$

【8】$f(x) = x^2 + ax + b$ より

$$f'(x) = 2x + a$$

また

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1)^2 + a(x+1) + b \\ &= x^2 + (a+2)x + a + b + 1 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} c\int_0^1 (3x^2 + 4xt)f'(t)dt &= c\int_0^1 (3x^2 + 4xt)(2t + a)dt \\ &= c\int_0^1 \{8xt^2 + (6x^2 + 4ax)t + 3ax^2\}dt \\ &= c\left\{\frac{8}{3}x + (3x^2 + 2ax) + 3ax^2\right\} \\ &= c\left\{(3a+3)x^2 + \left(2a + \frac{8}{3}\right)x\right\} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

① と ② が恒等的に等しくなるためには

$$\begin{cases} 1 = (3a+3)c & \cdots ③ \\ a + 2 = c\left(2a + \frac{8}{3}\right) & \cdots ④ \\ a + b + 1 = 0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つことが必要かつ十分.

③ の右辺と ④ の左辺, ③ の左辺と ④ の右辺をそれぞれかけて

$$c\left(2a + \frac{8}{3}\right) = c(3a+3)(a+2)$$

③ より $c \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} &2a + \frac{8}{3} = (3a+3)(a+2) \\ &9a^2 + 21a + 10 = 0 \\ &(3a+2)(3a+5) = 0 \\ \therefore\quad &a = -\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

a の値をそれぞれ ③, ⑤ に代入して

$$(a,\ b,\ c) = \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1\right),\ \left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $n = 1$ のとき

$$2(1+1)a_1 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 3$$

$n = 2$ のとき

$$2(2+1)a_2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = 4$$

$n = 3$ のとき

$$2(3+1)a_3 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = 5$$

$n = 4$ のとき

$$2(4+1)a_4 = 2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{24}{25} = 6$$

(2) (1) の結果より

$$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \cdots\cdots (*)$$

と予想できる．以下，数学的帰納法で示す．

(I) $n = 1$ のとき，(1) より

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

なので $(*)$ は成り立つ．

(II) $n = k$ で $(*)$ が成り立つ，すなわち

$$a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

であると仮定する．このとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \cdot \left\{1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right\} \\ &= \frac{k+2}{2(k+1)} \cdot \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} \\ &= \frac{k^2 + 4k + 3}{2(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)+2}{2\{(k+1)+1\}} \end{aligned}$$

となるので，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

以上より

$$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

であることが示された．　〔証明終〕

(3) $a_n > \dfrac{1}{2} + \dfrac{100}{n^2}$ のとき (2) より

$$
\begin{aligned}
\frac{n+2}{2(n+1)} &> \frac{1}{2} + \frac{100}{n^2} \\
\frac{n+2}{2(n+1)} &> \frac{n^2+200}{2n^2} \\
n^2(n+2) &> (n+1)(n^2+200) \\
n^3 + 2n^2 &> n^3 + n^2 + 200n + 200 \\
n(n-200) &> 200
\end{aligned}
$$

n は自然数なので，この不等式をみたす最小の n は

$$n = 201$$

である.

【2】（a）

$$\begin{aligned}{a_{n+1}}^2+{b_{n+1}}^2&=\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\right)^2\\&={a_n}^2+{b_n}^2\end{aligned}$$

となるので

$$ {a_n}^2+{b_n}^2={a_1}^2+{b_1}^2=1$$

である．

（b）$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_n$ より

$$b_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)$$

が成り立つ．これを $b_{n+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}\right)&=-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)\\a_{n+2}&=a_{n+1}-a_n\end{aligned}$$

となるので

$$a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)-a_{n+1}=-a_n$$

また，$b_{n+1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$ より

$$a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n\right)$$

が成り立つ．これを $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_n$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-b_{n+2}+\frac{1}{2}b_{n+1}\right)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}b_n\\b_{n+2}&=b_{n+1}-b_n\end{aligned}$$

となるので

$$b_{n+3}=b_{n+2}-b_{n+1}=(b_{n+1}-b_n)-b_{n+1}=-b_n$$

（c）(b) より，k を自然数として

$$\begin{cases}a_{3k-2}=(-1)^{k-1}a_1\\a_{3k-1}=(-1)^{k-1}a_2\\a_{3k}=(-1)^{k-1}a_3\\b_{3k-2}=(-1)^{k-1}b_1\\b_{3k-1}=(-1)^{k-1}b_2\\b_{3k}=(-1)^{k-1}b_3\end{cases}$$

である．ここで $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, b_1 = \dfrac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2}a_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 = 0 \\ b_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = -1 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{cases} a_{3k-2} = (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a_{3k-1} = (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a_{3k} = 0 \\ b_{3k-2} = (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{2} \\ b_{3k-1} = (-1)^{k} \cdot \dfrac{1}{2} \\ b_{3k} = (-1)^{k} \end{cases}$$

つまり

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (n \text{ は 3 で割って 1 あまる数}) \\ (-1)^{\frac{n-2}{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (n \text{ は 3 で割って 2 あまる数}) \\ 0 & (n \text{ は 3 の倍数}) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{3}} \cdot \dfrac{1}{2} & (n \text{ は 3 で割って 1 あまる数}) \\ (-1)^{\frac{n+1}{3}} \cdot \dfrac{1}{2} & (n \text{ は 3 で割って 2 あまる数}) \\ (-1)^{\frac{n}{3}} & (n \text{ は 3 の倍数}) \end{cases}$$

【3】(1) $2|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$ より

$$(2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB}) = 0$$

が成り立つ．$\overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$ とすると

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA'})\cdot(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB'}) = 0$$

すなわち

$$\overrightarrow{A'P}\cdot\overrightarrow{B'P} = 0$$

となるので，P は A′B′ を直径とする円周上にある．〔証明終〕

(2) (1) より

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'})$$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

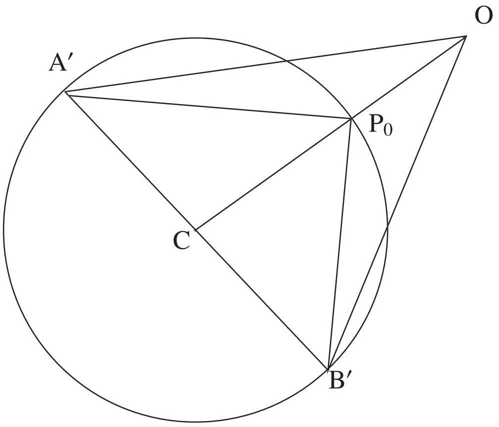
(3) P の軌跡となる円を C とする．$|\overrightarrow{OA}|^2 + 5\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 4|\overrightarrow{OB}|^2 = 0$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{5}\left(|\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2\right) < 0$$

なので

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot(-\overrightarrow{OB}) > 0$$

となり，O は円 C の外側にあり，P_0 は線分 OC 上の点になる．



ここで

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \left|\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right|^2$$
$$= \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + 4|\overrightarrow{OB}|^2 - 4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{16}$$
$$= \frac{-9\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{16}$$

より

$$\mathrm{OC} = \frac{3}{4}\sqrt{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

一方，C の半径を r とすると

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 \\ &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 4\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{16} \\ &= \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{16} \end{aligned}$$

より

$$\mathrm{CP} = r = \frac{1}{4}\sqrt{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

したがって

$$\mathrm{CP} : \mathrm{CO} = 1 : 3$$

となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が一次独立であることに注意すると

$$s = \frac{1}{6}, t = -\frac{1}{3}$$

【4】(1)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\
\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\
&= \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\
&= -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}
\end{aligned}
$$

(2) (1) より，DE⊥DF のとき

$$
\left(t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) = 0
$$

$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \frac{1}{2}$ であるから

$$
\begin{aligned}
-\frac{t}{12} + \frac{t}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} &= 0 \\
\frac{t}{4} - \frac{1}{12} &= 0 \\
t &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + p\overrightarrow{\mathrm{DE}} + q\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ と表せるので，(1) より

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{1}{2}\vec{a} + p\left(t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + q\left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2} - \frac{q}{6}\right)\vec{a} + pt\vec{b} + \frac{2}{3}q\vec{c}
\end{aligned}
$$

G は BC 上の点なので

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2} - \dfrac{q}{6} = 0 \\
pt + \dfrac{2}{3}q = 1
\end{cases}
$$

が成り立つ．したがって

$$
p = \frac{1}{2-t}, q = \frac{3(1-t)}{2-t}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \frac{t}{2-t}\vec{b} + \frac{2(1-t)}{2-t}\vec{c} \\
&= \frac{t\vec{b} + 2(1-t)\vec{c}}{t + 2(1-t)}
\end{aligned}
$$

となる．よって点 G は BC を $2(1-t):t$ に内分する点となるので，BC= 1 より

$$
\mathrm{BG} = \frac{2(1-t)}{2-t}
$$

【5】(1)

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -a_1 + \frac{1+(-1)^{1+1}}{2} = 1 \\
a_3 &= -a_2 + \frac{1+(-1)^{2+1}}{2} = -1 \\
a_4 &= -a_3 + \frac{1+(-1)^{3+1}}{2} = 2
\end{aligned}
$$

(2) $\{b_n\}$ の階差を求めると

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= (-1)^{n+1}(a_{n+1}+c) - (-1)^n(a_n+c) \\
&= (-1)^{n+1}(a_{n+1}+a_n+2c) \\
&= (-1)^{n+1}\left(-a_n + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} + a_n + 2c\right) \\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} + 2c\right) \\
&= \frac{1}{2} + (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}+2c\right)
\end{aligned}
$$

$\{b_n\}$ が等差数列になるとき，階差は定数でなければいけないので $(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}+2c\right) = 0$ すなわち

$$
\frac{1}{2} + 2c = 0
$$

より $c = -\frac{1}{4}$ が条件となる．

(3) (2) より $b_n = (-1)^n\left(a_n - \frac{1}{4}\right)$ と改めておくと

$$
b_1 = (-1)^1\left(a_1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}
$$

より $\{b_n\}$ は初項 $\frac{1}{4}$，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列になるので

$$
b_n = \frac{1}{4} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}
$$

すなわち

$$
(-1)^n\left(a_n - \frac{1}{4}\right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{4}
$$

より

$$
a_n = (-1)^n\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}
$$

(4) (3) より，m を自然数とすると

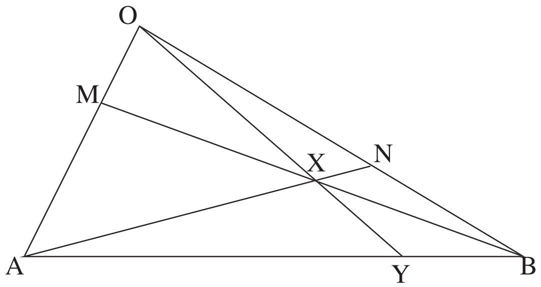
$$
\begin{aligned}
a_{2m-1} &= -\left(\frac{2m-1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = 1 - m \\
a_{2m} &= \left(\frac{2m}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = m
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n}(1-k)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - 2k + 1) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\
&= \frac{n(2n^2+1)}{3}
\end{aligned}
$$

である．

【6】



(1) X は AN 上にあるので，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OX} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{ON} = (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}s\overrightarrow{OB}$$

とおける．また，X は BM 上にあるので，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$$

とおける．2 式の係数を比較して

$$\begin{cases} 1-s = \dfrac{1}{3}t \\ \dfrac{3}{5}s = 1-t \end{cases}$$

より

$$s = \frac{5}{6}, t = \frac{1}{2}$$

となるので

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

(2) Y は OX 上にあるので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OY} &= k\overrightarrow{OX} \ (k \text{ は実数}) \\ &= \frac{k}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{2}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

そして Y は AB 上にあるので

$$\frac{k}{6} + \frac{k}{2} = 1$$

したがって $k = \dfrac{3}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OY} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{4} \end{aligned}$$

より

$$AY : YB = 3 : 1$$

(3) (2) より

$$
\begin{aligned}
T &= S - (\triangle\mathrm{OMN} + \triangle\mathrm{AMY} + \triangle\mathrm{BNY}) \\
&= S - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot S + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot S + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot S\right) \\
&= \frac{1}{5}S
\end{aligned}
$$

となるので

$$S : T = 5 : 1$$

【7】R は AQ 上にあるので，実数 r を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-r)\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + r\overrightarrow{\mathrm{OA}} \\ &= \frac{1-r}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{r}{t}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

ここで，R は BP 上にあるから

$$\frac{1-r}{2} + \frac{r}{t} = 1$$

すなわち

$$r = \frac{t}{2-t}$$

である．つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{t}{2-t}\vec{a} + \frac{1-t}{2-t}\vec{b}$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$$\frac{1}{2-t}\left\{-t\left|\vec{a}\right|^2 + (2t-1)\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-t)\left|\vec{b}\right|^2\right\} = 0$$

$\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 2$ より

$$4 - 13t + 6(2t-1)\cos\theta = 0$$

したがって，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とならないための条件は

$$4 - 13t + 6(2t-1)c \neq 0$$

が $-1 < c < 1$ をみたす任意の c で成り立つことである．まず $t = \frac{1}{2}$ のとき

$$4 - \frac{13}{2} = -\frac{5}{2} \neq 0$$

である．また，$t \neq \frac{1}{2}$ のとき

$$c = \frac{13t-4}{6(2t-1)}$$

が $-1 < c < 1$ で成り立たなければよいので

$$\left|\frac{13t-4}{6(2t-1)}\right| \geqq 1$$

すなわち

$$\begin{gathered}(13t-4)^2 \geqq \{6(2t-1)\}^2 \\ 5t^2 + 8t - 4 \geqq 0 \\ (5t-2)(t+2) \geqq 0\end{gathered}$$

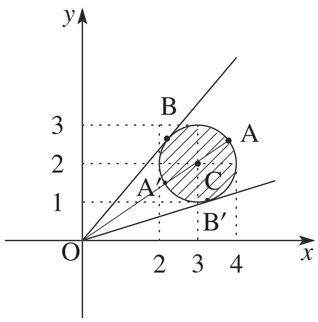
$0 < t < 1$ に注意すると

$$\frac{2}{5} \leqq t < 1$$

添削課題

【1】 $(x-3)^2+(y-2)^2 \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$

は，点 C(3, 2) を中心とし，半径が 1 の円の周上とその内部を表す．



(1) $2 \leqq x \leqq 4$ であるから，$3 \leqq 2x-1 \leqq 7$ であり，これより，$2x-1$ の最大値と最小値は，

$$\begin{cases} 最大値 & \mathbf{7} \\ 最小値 & \mathbf{3} \end{cases} \quad (答)$$

(2) x^2+y^2 は

原点 O(0, 0) と点 P(x, y) の距離の 2 乗

を意味する．

領域 ① 内の点 P(x, y) のうちで，原点 O から最も遠いのは，図の点 A であり，最も近いのは，図の点 A′ である．よって，OP の最大値は

$$\text{OA} = \text{OC} + (\text{半径 } 1) = \sqrt{13}+1$$

よって，$x^2+y^2=\text{OP}^2$ の最大値は

$$\text{OA}^2 = \left(\sqrt{13}+1\right)^2 = \mathbf{14+2\sqrt{13}} \quad (答)$$

同様にして最小値は

$$(\text{OA}')^2 = \left(\sqrt{13}-1\right)^2 = \mathbf{14-2\sqrt{13}} \quad (答)$$

(3) $\dfrac{y}{x}$ は

原点 O(0, 0) と点 P(x, y) を結んだ直線の傾き

を意味する．

領域 ① 内の点 P(x, y) でこれが最大となるのは，点 P が図の接点 B のときであり，最小となるのは，点 P が図の接点 B′ のときである．

$\dfrac{y}{x}=m$ とおき，直線 $y=mx$ (つまり $mx-y=0$) と，円 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$ が接する傾き m を求める．

(中心 (3, 2) から直線 $mx-y=0$ までの距離)=半径 1

をみたすから

$$\frac{|3m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \qquad \therefore \quad (3m-2)^2=m^2+1$$

$$\therefore \quad 8m^2-12m+3=0 \qquad \therefore \quad m=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{8}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}$$

以上より，$\dfrac{y}{x}$ の最大値，最小値は

$$\begin{cases} 最大値 & \mathbf{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}} \\ 最小値 & \mathbf{\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}} \end{cases} \quad (答)$$

M2JS/M2J

高２選抜東大クラス数学

高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	