2MJSS/2MJS/2MJ

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

中２選抜東大・医学部数学

中２数学

中２東大数学

1章　式の展開・因数分解（１）

問題

【1】(1)

$$\begin{aligned}&(a+5b)^2\\=&a^2+2\times a\times(5b)+(5b)^2\\=&\boldsymbol{a^2+10ab+25b^2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(4x-7)(4x+7)\\=&(4x)^2-7^2\\=&\boldsymbol{16x^2-49}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2\\=&(2x)^2-2\times(2x)\times\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\\=&\boldsymbol{4x^2-x+\frac{1}{16}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&(a+12b)(a-8b)\\=&a^2+\{12b+(-8b)\}a+12b\times(-8b)\\=&\boldsymbol{a^2+4ab-96b^2}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(-3a+2b)(-3a-2b)&=(-3a)^2-(2b)^2\\&=\boldsymbol{9a^2-4b^2}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(-x+6y)(-x+9y)&=(-x)^2+\{(6y)+(9y)\}\cdot(-x)+6y\times9y\\&=\boldsymbol{x^2-15xy+54y^2}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\left(-\frac{2}{5}x^2+2y\right)\left(\frac{2}{5}x^2+2y\right)&=\left(2y-\frac{2}{5}x^2\right)\left(2y+\frac{2}{5}x^2\right)\\&=(2y)^2-\left(\frac{2}{5}x^2\right)^2\\&=\boldsymbol{4y^2-\frac{4}{25}x^4}\ \left(\boldsymbol{=-\frac{4}{25}x^4+4y^2}\right)\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}(-2xy-3z)^2&=(-2xy)^2-2\times(-2xy)\times(3z)+(3z)^2\\&=\boldsymbol{4x^2y^2+12xyz+9z^2}\end{aligned}$$

【2】(1) $6x^2y-15xy^2-9xy^3=\boldsymbol{3xy(2x-5y-3y^2)}$

(2) $51a^3+15ab^2=\boldsymbol{3a(17a^2+5b^2)}$

(3) $x^2+7x+10=\boldsymbol{(x+2)(x+5)}$

(4) $x^2+3x-18=\boldsymbol{(x+6)(x-3)}$

(5) $x^2-9x+20=\boldsymbol{(x-5)(x-4)}$

(6) $x^2-2x-15=\boldsymbol{(x-5)(x+3)}$

(7) $x^2+4x-5=\boldsymbol{(x+5)(x-1)}$

(8) $x^2-7x-8=\boldsymbol{(x-8)(x+1)}$

(9) $x^2+4x+4=\boldsymbol{(x+2)^2}$

(10) $x^2-8x+16=\boldsymbol{(x-4)^2}$

(11) $x^2+x+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

(12) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$

(13) $x^2-16=\boldsymbol{(x+4)(x-4)}$

(14) $1-x^2=\boldsymbol{(1+x)(1-x)}$

(15)
$$\begin{aligned} ax^2-8ax+15a &= a(x^2-8x+15) \\ &= \boldsymbol{a(x-3)(x-5)} \end{aligned}$$

(16)
$$\begin{aligned} 3a^3-15a^2+18a &= 3a(a^2-5a+6) \\ &= \boldsymbol{3a(a-2)(a-3)} \end{aligned}$$

(17)
$$\begin{aligned} 4x^2-100 &= 4(x^2-25) \\ &= \boldsymbol{4(x+5)(x-5)} \end{aligned}$$

【3】(1) $(x-y+3)^2$ ［$x-y=A$ とおく］

$=(A+3)^2$

$=A^2+6A+9$ ［A をもとにもどす］

$=(x-y)^2+6(x-y)+9$

$\boldsymbol{=x^2-2xy+y^2+6x-6y+9}$

(2) $(2x-y+1)(2x-y-3)$ ［$2x-y=A$ とおく］

$=(A+1)(A-3)$

$=A^2-2A-3$ ［A をもとにもどす］

$=(2x-y)^2-2(2x-y)-3$

$\boldsymbol{=4x^2-4xy+y^2-4x+2y-3}$

(3) $(a-b+c)(a+b-c)$

$=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$ ［$b-c=A$ とおく］

$=(a-A)(a+A)$

$=a^2-A^2$ ［A をもとにもどす］

$=a^2-(b-c)^2$

$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$

$\boldsymbol{=a^2-b^2+2bc-c^2}$

(4) $(a+b-1)^2-(a+b)^2$ ［$a+b=A$ とおく］

$=(A-1)^2-A^2$

$=A^2-2A+1-A^2$

$=-2A+1$　［A をもとにもどす］

$=-2(a+b)+1$

$=\boldsymbol{-2a-2b+1}$

(5)　$(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$

$=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$

$=\{(a^2)^2-1\}(a^4+1)$

$=(a^4-1)(a^4+1)$

$=(a^4)^2-1$

$=\boldsymbol{a^8-1}$

(6)　$(x+y)^2(x-y)^2$

$=\{(x+y)(x-y)\}^2$

$=(x^2-y^2)^2$

$=(x^2)^2-2x^2y^2+(y^2)^2$

$=\boldsymbol{x^4-2x^2y^2+y^4}$

(7)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$　［$x^2+5x=A$ とおく］

$=(A+4)(A+6)$

$=A^2+10A+24$　［A をもとにもどす］

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$

$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$

$=\boldsymbol{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

(8)　$(a-b+c)(a+b+c)-(a+b-c)(a-b-c)$

［$a+c=A,\ a-c=B$ とおく］

$=(A-b)(A+b)-(B+b)(B-b)$

$=A^2-b^2-(B^2-b^2)$

$=A^2-B^2$　［$A,\ B$ をもとにもどす］

$=(a+c)^2-(a-c)^2$

$=(a^2+2ac+c^2)-(a^2-2ac+c^2)$

$=\boldsymbol{4ac}$

【4】(1) $(x-y)^2+7x-7y+12$

$=(x-y)^2+7(x-y)+12$ ［$x-y=A$ とおく］

$=A^2+7A+12$

$=(A+3)(A+4)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y+3)(x-y+4)}$

(2) $(x+1)^2-5y(x+1)+6y^2$ ［$x+1=A$ とおく］

$=A^2-5yA+6y^2$

$=(A-2y)(A-3y)$ ［A をもとにもどす］

$=(x+1-2y)(x+1-3y)$

$=\boldsymbol{(x-2y+1)(x-3y+1)}$

(3) $(x-2)^2-3(2-x)-4$

$=(x-2)^2+3(x-2)-4$ ［$x-2=A$ とおく］

$=A^2+3A-4$

$=(A-1)(A+4)$ ［A をもとにもどす］

$=(x-2-1)(x-2+4)$

$=\boldsymbol{(x-3)(x+2)}$

(4) $(x^2-3x+1)^2+(x^2-3x+1)-2$ ［$x^2-3x+1=A$ とおく］

$=A^2+A-2$

$=(A-1)(A+2)$ ［A をもとにもどす］

$=(x^2-3x+1-1)(x^2-3x+1+2)$

$=(x^2-3x)(x^2-3x+3)$

$=\boldsymbol{x(x-3)(x^2-3x+3)}$

(5) $(x^2-4)^2-2(x^2-4)-15$ ［$x^2-4=A$ とおく］

$=A^2-2A-15$

$=(A+3)(A-5)$ ［A をもとにもどす］

$=(x^2-4+3)(x^2-4-5)$

$=(x^2-1)(x^2-9)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)}$

(6) $(x+y)(x+y-3)-10$ ［$x+y=A$ とおく］

$=A(A-3)-10$

$=A^2-3A-10$

$=(A+2)(A-5)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x+y+2)(x+y-5)}$

(7) $(x-2y)(x-2y+2)+1$ ［$x-2y=A$ とおく］

$=A(A+2)+1$

$=A^2+2A+1$

$=(A+1)^2$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-2y+1)^2}$

(8) $(a-b+4)(a-b)-5$ ［$a-b=A$ とおく］

$=(A+4)A-5$

$=A^2+4A-5$

$=(A+5)(A-1)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(a-b+5)(a-b-1)}$

(9) $(x-y)(x-5-y)+6$ ［$x-y=A$ とおく］

$=A(A-5)+6$

$=A^2-5A+6$

$=(A-2)(A-3)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-y-2)(x-y-3)}$

(10) $(x^2+x-2)(x^2+x-5)-4$ ［$x^2+x=A$ とおく］

$=(A-2)(A-5)-4$

$=A^2-7A+10-4$

$=A^2-7A+6$

$=(A-1)(A-6)$ ［A をもとにもどす］

$=(x^2+x-1)(x^2+x-6)$

$=\boldsymbol{(x+3)(x-2)(x^2+x-1)}$

(11) $(x^2-3x-5)(x^2+2x-5)-6x^2$

$=(x^2-5-3x)(x^2-5+2x)-6x^2$ ［$x^2-5=A$ とおく］

$=(A-3x)(A+2x)-6x^2$

$=A^2-xA-6x^2-6x^2$

$=A^2-xA-12x^2$

$=(A-4x)(A+3x)$ ［A をもとにもどす］

$=(x^2-5-4x)(x^2-5+3x)$

$=(x^2-4x-5)(x^2+3x-5)$

$=\boldsymbol{(x+1)(x-5)(x^2+3x-5)}$

【5】(1)

$$x^2-1+6xy+9y^2$$
$$=x^2+6xy+9y^2-1$$
$$=(x+3y)^2-1^2$$
$$=\boldsymbol{(x+3y+1)(x+3y-1)}$$

(2)

$$4a^2+x^2-4ax-1$$
$$=x^2-4ax+4a^2-1$$
$$=(x-2a)^2-1^2$$
$$=\boldsymbol{(x-2a+1)(x-2a-1)}$$

(3)

$$c^2-b^2+4a^2+4ac$$
$$=(4a^2+4ac+c^2)-b^2$$
$$=(2a+c)^2-b^2$$
$$=(2a+c+b)(2a+c-b)$$
$$=\boldsymbol{(2a+b+c)(2a-b+c)}$$

(4)

$$a^2-16-b^2+8b$$
$$=a^2-(b^2-8b+16)$$
$$=a^2-(b-4)^2$$
$$=\boldsymbol{(a+b-4)(a-b+4)}$$

(5)

$$a^2-b^2-c^2+2bc$$
$$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$$
$$=a^2-(b-c)^2$$
$$=\boldsymbol{(a+b-c)(a-b+c)}$$

(6)

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-8$$
$$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}-8$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)-8$$
$$=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-8$$
$$=\boldsymbol{(x^2+3x+4)(x^2+3x-2)}$$

(7)

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$$
$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15 \quad [x^2+8x=A\text{ とおく}]$$
$$=(A+7)(A+15)+15$$
$$=A^2+22A+120$$
$$=(A+10)(A+12) \quad [A\text{ をもとにもどす}]$$
$$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$$
$$=\boldsymbol{(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)}$$

(8)

$$(x^2-2x-3)^2-28-3(x^2-2x-3) \quad [x^2-2x-3=A\text{ とおく}]$$
$$=A^2-3A-28$$
$$=(A+4)(A-7) \quad [A\text{ をもとにもどす}]$$
$$=\{(x^2-2x-3)+4\}\{(x^2-2x-3)-7\}$$
$$=(x^2-2x+1)(x^2-2x-10)$$
$$=\boldsymbol{(x-1)^2(x^2-2x-10)}$$

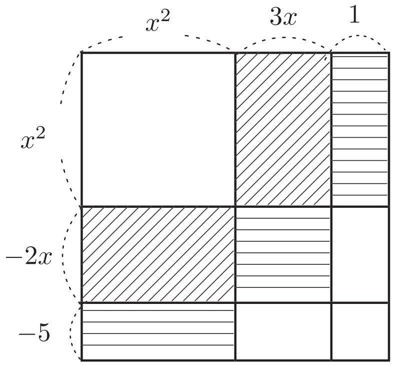
【6】　全部展開しなくても，必要な積だけ取り出して考えればよい．

(1) x^3 の係数は，

$1\times3+(-2)\times1=\mathbf{1}$

x^2 の係数は，

$1\times1+(-2)\times3+(-5)\times1=\mathbf{-10}$



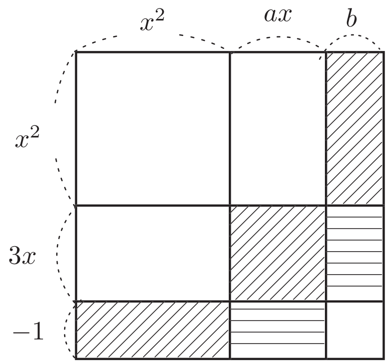
(2) $\begin{cases} 1\times b+3\times a+(-1)\times1=-3 \\ 3\times b+(-1)\times a=14 \end{cases}$

それぞれ整理して，

$\begin{cases} 3a+b=-2 & \cdots\cdots ① \\ -a+3b=14 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② を解いて，

$\boldsymbol{a=-2,\ b=4}$



【7】(1) $\boldsymbol{(x+1)y+x^2+2x+1}$　　１次

(2) $\boldsymbol{a^2+(c-b)a-bc}$　　２次

(3) $\boldsymbol{(a-b)x+by-ay}$　　１次

(4) $\boldsymbol{(b-c)a-b^2+2bc-c^2}$　　１次

【8】(1) $xy-3+3x-y$

$=y(x-1)+3(x-1)$ ［$x-1=A$ とおく］

$=yA+3A$

$=A(y+3)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-1)(y+3)}$

(2) $x^2-xy-x+y$

$=x(x-y)-(x-y)$ ［$x-y=A$ とおく］

$=xA-A$

$=A(x-1)$ ［A をもとにもどす］

$=\boldsymbol{(x-1)(x-y)}$

(3) $ax+by-ay-bx$

$=a(x-y)-b(x-y)$ ［$x-y=A$ とおく］

$=aA-bA$

$=A(a-b)$ ［A をもとにもどす］

$=(x-y)(a-b)$

$=\boldsymbol{(a-b)(x-y)}$

(4) $2xy-6y^2+xz-3yz$

$=z(x-3y)+2y(x-3y)$

$=\boldsymbol{(x-3y)(2y+z)}$

＜別解＞

x について整理してもよい.

$2xy-6y^2+xz-3yz$

$=x(2y+z)-3y(2y+z)$

$=\boldsymbol{(2y+z)(x-3y)}$

(5) $a^2b+bc-ac-b^2a$

$=-c(a-b)+ab(a-b)$

$=\boldsymbol{(a-b)(ab-c)}$

(6) $a^2-4a+2ab-6b+3$

$=b(2a-6)+a^2-4a+3$

$=2b(a-3)+(a-3)(a-1)$

$=(a-3)(2b+a-1)$

$=\boldsymbol{(a-3)(a+2b-1)}$

(7) $ac^2-b^2c-ab^2+c^3$

$=-a(b^2-c^2)-c(b^2-c^2)$

$=-(b^2-c^2)(a+c)$

$=-(b+c)(b-c)(a+c)$

$=\boldsymbol{-(a+c)(b+c)(b-c)}$

【9】

(1)

$$\begin{aligned}&a^2-2ab+b^2-a+b-20\\=&(a^2-2ab+b^2)-(a-b)-20\\=&(a-b)^2-(a-b)-20\\=&\boldsymbol{(a-b-5)(a-b+4)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&x^2+4y^2-2x+4xy-4y+1\\=&(x^2+4xy+4y^2)-2(x+2y)+1\\=&(x+2y)^2-2(x+2y)+1\\=&\boldsymbol{(x+2y-1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+2ab-ac-bc+a+b\\=&(a^2+2ab+b^2)-ac-bc+a+b\\=&(a+b)^2-c(a+b)+(a+b)\\=&\boldsymbol{(a+b)(a+b-c+1)}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&x^2-4xy+4y^2-5x+10y+6\\=&(x^2-4xy+4y^2)-5x+10y+6\\=&(x-2y)^2-5(x-2y)+6\\=&\boldsymbol{(x-2y-2)(x-2y-3)}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}&x+x^2+x^3+x^4\\=&x(1+x+x^2+x^3)\\=&x\{(1+x)+(x^2+x^3)\}\\=&x\{(1+x)+x^2(1+x)\}\quad［1+x=A\text{ とおく}］\\=&x(A+x^2A)\\=&xA(1+x^2)\quad［A\text{ をもとにもどす}］\\=&\boldsymbol{x(1+x)(1+x^2)}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}&(x+4)(x-9)+5x\\=&x^2-5x-36+5x\\=&x^2-36\\=&\boldsymbol{(x+6)(x-6)}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}&x(x+1)-y(y+1)\\=&x^2+x-y^2-y\\=&(x^2-y^2)+x-y\\=&(x-y)(x+y)+(x-y)\\=&\boldsymbol{(x-y)(x+y+1)}\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}&-4xy^3+16x^3y\\=&4xy(4x^2-y^2)\\=&\boldsymbol{4xy(2x+y)(2x-y)}\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}&4(x^2-x-2)+x^2(x-2)\\=&4(x-2)(x+1)+x^2(x-2)\\=&(x-2)\{4(x+1)+x^2\}\\=&(x-2)(x^2+4x+4)\\=&\boldsymbol{(x-2)(x+2)^2}\end{aligned}$$

(10)
$$x^4-16$$
$$=(x^2-4)(x^2+4)$$
$$=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$$

(11)
$$x^2y-x^2-xy-6y+9$$
$$=y(x^2-x-6)-(x^2-9)$$
$$=y(x-3)(x+2)-(x-3)(x+3)$$
$$=\boldsymbol{(x-3)(xy+2y-x-3)}$$

(12)
$$a^2b+b^3+2(ab+b^2+ab^2)-3b$$
$$=a^2b+b^3+2ab+2b^2+2ab^2-3b$$
$$=b(a^2+b^2+2a+2b+2ab-3)$$
$$=b\{(a+b)^2+2(a+b)-3\}$$
$$=\boldsymbol{b(a+b+3)(a+b-1)}$$

(13)
$$x^2-y^2-2x+4y-3$$
$$=x^2-2x-(y^2-4y+3)$$
$$=x^2-2x-(y-1)(y-3)$$
$$=\{x+(y-3)\}\{x-(y-1)\}$$
$$=\boldsymbol{(x+y-3)(x-y+1)}$$

(14)
$$x^4+x^3+x^2y+xy^2+y^3-y^4$$
$$=(x^4-y^4)+(x^3+xy^2)+(x^2y+y^3)$$
$$=(x^2+y^2)(x^2-y^2)+x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)$$
$$=(x^2+y^2)\{(x^2-y^2)+x+y\}$$
$$=(x^2+y^2)\{(x+y)(x-y)+(x+y)\}$$
$$=\boldsymbol{(x^2+y^2)(x+y)(x-y+1)}$$

【10】(1)

$$\begin{aligned} x^2+4xy+3y^2+x-y-2 &= x^2+(4y+1)x+3y^2-y-2 \\ &= x^2+(4y+1)x+(y-1)(3y+2) \\ &= \boldsymbol{(x+y-1)(x+3y+2)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x^2-y^2+7x+y+12 &= x^2+7x-(y^2-y-12) \\ &= x^2+7x-(y+3)(y-4) \\ &= \boldsymbol{(x-y+4)(x+y+3)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} 2x^2+3xy+y^2+8x+5y+6 &= 2x^2+(3y+8)x+y^2+5y+6 \\ &= 2x^2+(3y+8)x+(y+2)(y+3) \\ &= \boldsymbol{(x+y+3)(2x+y+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & & y+3 & \longrightarrow & 2y+6 \\ 2 & & y+2 & \longrightarrow & y+2 \\ \hline 2 & & (y+2)(y+3) & & 3y+8 \end{array}$$

(4)

$$\begin{aligned} 2x^2+3xy+y^2+x+2y-3 &= y^2+(3x+2)y+(2x^2+x-3) \\ &= y^2+(3x+2)y+(x-1)(2x+3) \\ &= \boldsymbol{(x+y-1)(2x+y+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & x-1 & \longrightarrow & x-1 \\ 1 & & 2x+3 & \longrightarrow & 2x+3 \\ \hline 1 & & (x-1)(2x+3) & & 3x+2 \end{array}$$

＜別解＞

$$\begin{aligned} 2x^2+3xy+y^2+x+2y-3 &= 2x^2+(3y+1)x+(y^2+2y-3) \\ &= 2x^2+(3y+1)x+(y-1)(y+3) \\ &= \boldsymbol{(x+y-1)(2x+y+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & y-1 & \longrightarrow & 2y-2 \\ 2 & & y+3 & \longrightarrow & y+3 \\ \hline 2 & & (y-1)(y+3) & & 3y+1 \end{array}$$

(5)
$$\begin{aligned} 2x^2+5xy+2y^2+5x+y-3 &= 2x^2+(5y+5)x+(2y^2+y-3) \\ &= 2x^2+(5y+5)x+(y-1)(2y+3) \\ &= \boldsymbol{(x+2y+3)(2x+y-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2y+3 & \longrightarrow & 4y+6 \\ 2 & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ \hline 2 & (y-1)(2y+3) & & 5y+5 \end{array}$$

(6)
$$\begin{aligned} 2x^2+7xy+3y^2+9x+17y+10 &= 2x^2+(7y+9)x+3y^2+17y+10 \\ &= 2x^2+(7y+9)x+(3y+2)(y+5) \\ &= \boldsymbol{(x+3y+2)(2x+y+5)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3y+2 & \longrightarrow & 6y+4 \\ 2 & y+5 & \longrightarrow & y+5 \\ \hline 2 & (3y+2)(y+5) & & 7y+9 \end{array}$$

(7)
$$\begin{aligned} 6x^2+5xy+y^2-y-6 &= y^2+(5x-1)y+6x^2-6 \\ &= y^2+(5x-1)y+6(x+1)(x-1) \\ &= \boldsymbol{(2x+y+2)(3x+y-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2(x+1) & \longrightarrow & 2x+2 \\ 1 & 3(x-1) & \longrightarrow & 3x-3 \\ \hline 1 & 6(x+1)(x-1) & & 5x-1 \end{array}$$

＜別解＞

$$\begin{aligned} 6x^2+5xy+y^2-y-6 &= 6x^2+5xy+(y+2)(y-3) \\ &= \boldsymbol{(2x+y+2)(3x+y-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & y+2 & \longrightarrow & 3y+6 \\ 3 & y-3 & \longrightarrow & 2y-6 \\ \hline 6 & (y+2)(y-3) & & 5y \end{array}$$

(8)
$$\begin{aligned} 12x^2+7xy+y^2-13x-3y-4 &= 12x^2+(7y-13)x+y^2-3y-4 \\ &= 12x^2+(7y-13)x+(y+1)(y-4) \\ &= \boldsymbol{(3x+y-4)(4x+y+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & y-4 & \longrightarrow & 4y-16 \\ 4 & y+1 & \longrightarrow & 3y+3 \\ \hline 12 & (y+1)(y-4) & & 7y-13 \end{array}$$

(9) $$\begin{aligned} 2x^2+5xy+3y^2+2x+5y-12 &= 2x^2+(5y+2)x+3y^2+5y-12 \\ &= 2x^2+(5y+2)x+(y+3)(3y-4) \\ &= \boldsymbol{(x+y+3)(2x+3y-4)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & y+3 & \longrightarrow & 2y+6 \\ 2 & 3y-4 & \longrightarrow & 3y-4 \\ \hline 2 & (y+3)(3y-4) & & 5y+2 \end{array}$$

(10) $$\begin{aligned} 6x^2-13xy+6y^2+21x-19y+15 &= 6x^2+(-13y+21)x+6y^2-19y+15 \\ &= 6x^2+(-13y+21)x+(2y-3)(3y-5) \\ &= \boldsymbol{(2x-3y+5)(3x-2y+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -(3y-5) & \longrightarrow & -9y+15 \\ 3 & -(2y-3) & \longrightarrow & -4y+6 \\ \hline 6 & (2y-3)(3y-5) & & -13y+21 \end{array}$$

(11) $$\begin{aligned} 2x^2-5xy-3y^2-8x+3y+6 &= 2x^2+(-5y-8)x-(3y^2-3y-6) \\ &= 2x^2+(-5y-8)x-(3y+3)(y-2) \\ &= \boldsymbol{(x-3y-3)(2x+y-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -3(y+1) & \longrightarrow & -6y-6 \\ 2 & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\ \hline 2 & -3(y+1)(y-2) & & -5y-8 \end{array}$$

(12) $$\begin{aligned} 12x^2-xy-6y^2+5x+9y-3 &= 12x^2+(-y+5)x-(6y^2-9y+3) \\ &= 12x^2+(-y+5)x-3(2y^2-3y+1) \\ &= 12x^2+(-y+5)x-3(y-1)(2y-1) \\ &= \boldsymbol{(3x+2y-1)(4x-3y+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2y-1 & \longrightarrow & 8y-4 \\ 4 & -3y+3 & \longrightarrow & -9y+9 \\ \hline 12 & -3(y-1)(2y-1) & & -y+5 \end{array}$$

(13) $$\begin{aligned} 6x^2+19xy-20y^2-36x+88y-96 &= 6x^2+(19y-36)x-20y^2+88y-96 \\ &= 6x^2+(19y-36)x-4(5y^2-22y+24) \\ &= 6x^2+(19y-36)x-4(y-2)(5y-12) \\ &= \boldsymbol{(x+4y-8)(6x-5y+12)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4y-8 & \longrightarrow & 24y-48 \\ 6 & -(5y-12) & \longrightarrow & -5y+12 \\ \hline 6 & -4(y-2)(5y-12) & & 19y-36 \end{array}$$

【11】(1)

$$(a+b+c)^2+(a-b-c)^2-(-a+b-c)^2-(-a-b+c)^2$$

［$b+c=X,\ b-c=Y$ とおく］

$$=(a+X)^2+(a-X)^2-(-a+Y)^2-(-a-Y)^2$$
$$=a^2+2aX+X^2+a^2-2aX+X^2-(a^2-2aY+Y^2)-(a^2+2aY+Y^2)$$
$$=2a^2+2X^2-2a^2-2Y^2$$
$$=2X^2-2Y^2$$

［$X,\ Y$ をもとにもどす］

$$=2(b+c)^2-2(b-c)^2$$
$$=2(b^2+2bc+c^2)-2(b^2-2bc+c^2)$$
$$=4bc+4bc$$
$$=\boldsymbol{8bc}$$

(2) $a+b=X$，$c-d=Y$，$a-b=A$，$c+d=B$ とおくと，

$$(a+b-c+d)(a+b+c-d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d)$$
$$=(X-Y)(X+Y)+(A+B)(-A+B)$$
$$=X^2-Y^2-A^2+B^2$$

［$X,\ Y,\ A,\ B$ をもとにもどす］

$$=(a+b)^2-(c-d)^2-(a-b)^2+(c+d)^2$$
$$=(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)+(c^2+2cd+d^2)$$
$$=\boldsymbol{4ab+4cd}$$

【12】(1) 定数項は

$$(k+5)\times 1-(-2)^2=-1$$

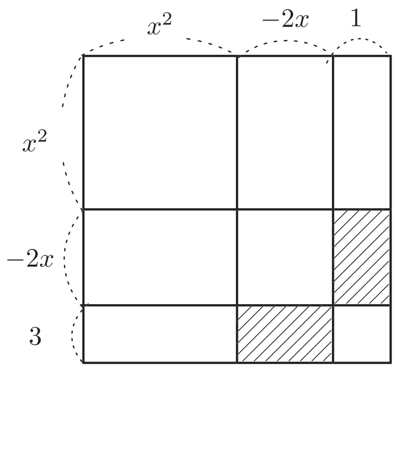
より，$\boldsymbol{k=-2}$

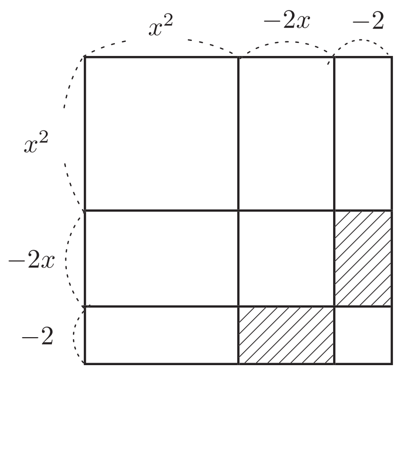
(2) $k=-2$ を与式に代入して，

$$(x^2-2x+3)(x^2-2x+1)-(x^2-2x-2)^2$$
$$=(x^2-2x+3)(x^2-2x+1)-(x^2-2x-2)(x^2-2x-2)$$

これを展開したときの x の係数は，

$$-2\times 1+3\times(-2)-\{-2\times(-2)-2\times(-2)\}=\boldsymbol{-16}$$





２章　式の展開・因数分解（２）

問題

【1】(1)

$$\begin{aligned}
&(a+b+c+1)(a+1)+bc \\
=&\{(a+1)+(b+c)\}(a+1)+bc \\
=&(a+1)^2+(b+c)(a+1)+bc \qquad [a+1=A \text{ とおく}] \\
=&A^2+(b+c)A+bc \\
=&(A+b)(A+c) \qquad [A \text{ をもとにもどす}] \\
=&\{(a+1)+b\}\{(a+1)+c\} \\
=&\boldsymbol{(a+b+1)(a+c+1)}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&(b+c)a^2+(c+a)b^2+(a+b)c^2+2abc \\
=&(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+cb^2+bc^2 \\
=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc \\
=&(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\
=&(b+c)(a+b)(a+c) \\
=&\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&(b-c)a^2+(c-a)b^2+(a-b)c^2 \\
=&(b-c)a^2+(-b^2a+c^2a)+(cb^2-bc^2) \\
=&(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b-c)\cdot bc \\
=&(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+(b-c)\cdot bc \\
=&(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\
=&(b-c)(a-b)(a-c) \\
=&\boldsymbol{(a-b)(b-c)(a-c)} \ (= \boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}\text{でもよい})
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc \\
=&a(b+c)^2+ba^2+2bc\cdot a+bc^2+ca^2+2bc\cdot a+cb^2-4abc \\
=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc \\
=&(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\
=&(b+c)(a+b)(a+c) \\
=&\boldsymbol{(a+b)(b+c)(c+a)}
\end{aligned}$$

(5)
$$
\begin{aligned}
&(a+b)(b+c)(c+a)+abc\\
=&(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}+bc\cdot a\\
=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)\cdot bc+bc\cdot a\\
=&(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+(b+c)bc\\
=&\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}\\
=&\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
1 & \times \quad b+c & \longrightarrow & (b+c)^2\\
b+c & \quad\;\; bc & \longrightarrow & bc\\
\hline
b+c & (b+c)bc & & (b+c)^2+bc
\end{array}
$$

(6)
$$
\begin{aligned}
&ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc\\
=&b\cdot a^2+b^2\cdot a+c^2\cdot a+c\cdot a^2+bc(b+c)+3abc\\
=&(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)\\
=&\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}\\
=&\boldsymbol{(a+b+c)(ab+bc+ca)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
1 & \times \quad b+c & \longrightarrow & b^2+2bc+c^2\\
b+c & \quad\;\; bc & \longrightarrow & bc\\
\hline
b+c & bc(b+c) & & b^2+3bc+c^2
\end{array}
$$

(7)
$$
\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\\
=&a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)\\
=&a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2\\
=&a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2\\
=&\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}\\
=&\boldsymbol{(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}\\
&(=\boldsymbol{-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llcl}
1 & \times \quad -(b^2+2bc+c^2) & \longrightarrow & -b^2-2bc-c^2\\
1 & \quad\;\; -(b^2-2bc+c^2) & \longrightarrow & -b^2+2bc-c^2\\
\hline
1 & (b+c)^2(b-c)^2 & & -2(b^2+c^2)
\end{array}
$$

【2】(1)

$$
\begin{aligned}
&x^4+3x^2+4\\
=&x^4+4x^2+4-x^2\\
=&(x^2+2)^2-x^2\\
=&(x^2+2+x)(x^2+2-x)\\
=&\boldsymbol{(x^2+x+2)(x^2-x+2)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&x^4-3x^2y^2+y^4\\
=&x^4-2x^2y^2+y^4-x^2y^2\\
=&(x^2-y^2)^2-(xy)^2\\
=&(x^2-y^2-xy)(x^2-y^2+xy)\\
=&\boldsymbol{(x^2-xy-y^2)(x^2+xy-y^2)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&x^4+4x^2+16\\
=&x^4+8x^2+16-4x^2\\
=&(x^2+4)^2-(2x)^2\\
=&(x^2+4+2x)(x^2+4-2x)\\
=&\boldsymbol{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&x^4-11x^2y^2+y^4\\
=&x^4-2x^2y^2+y^4-9x^2y^2\\
=&(x^2-y^2)^2-(3xy)^2\\
=&(x^2-y^2+3xy)(x^2-y^2-3xy)\\
=&\boldsymbol{(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)}
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&x^4+4\\
=&x^4+4x^2+4-4x^2\\
=&(x^2+2)^2-(2x)^2\\
=&(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)\\
=&\boldsymbol{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
&4x^4+11x^2y^2+9y^4\\
=&4x^4+12x^2y^2+9y^4-x^2y^2\\
=&(2x^2+3y^2)^2-(xy)^2\\
=&(2x^2+3y^2+xy)(2x^2+3y^2-xy)\\
=&\boldsymbol{(2x^2+xy+3y^2)(2x^2-xy+3y^2)}
\end{aligned}
$$

【3】(1) ①

$$
\begin{aligned}
x^2-y^2-2x+4y-3 &= x^2-2x-(y^2-4y+3)\\
&= x^2-2x-(y-1)(y-3)\\
&= \{x-(y-1)\}\{x+(y-3)\}\\
&= \boldsymbol{(x-y+1)(x+y-3)}
\end{aligned}
$$

② $x^2-y^2-2x+4y=10$

両辺から3を引くと

$x^2-y^2-2x+4y-3=7$

①より

$(x-y+1)(x+y-3)=7$

$(x-y+1)$, $(x+y-3)$ は共に整数なので，この2式の値の組み合わせは

$(1,\ 7),\ (7,\ 1),\ (-1,\ -7),\ (-7,\ -1)$

$\begin{cases} x-y+1=1 \\ x+y-3=7 \end{cases}$ のとき，$x=y=5$

$\begin{cases} x-y+1=7 \\ x+y-3=1 \end{cases}$ のとき，$x=5$，$y=-1$ となり不適

$\begin{cases} x-y+1=-1 \\ x+y-3=-7 \end{cases}$ のとき，$x=-3$，$y=-1$ となり不適

$\begin{cases} x-y+1=-7 \\ x+y-3=-1 \end{cases}$ のとき，$x=-3$，$y=5$ となり不適

以上より，$(x,\ y)=\mathbf{(5,\ 5)}$

(2) ① $xy+3x+y=9$ が $(x+a)(y+b)=c$ となったとすると，

$(xy+bx+ay+ab)=c$ となるから，係数を比較して，$a=1$，$b=3$

$\therefore ab=3$. そこで両辺に3を加えてみると

$$xy+3x+y+3=9+3$$
$$x(y+3)+(y+3)=12$$
$$\boldsymbol{(x+1)(y+3)=12}$$

② ①を利用する．

$x>0$，$y>0$ より，$(x+1)>1$，$(y+3)>3$ であり，$x+1$，$y+3$ は整数なので，条件をみたす $x+1$，$y+3$ の組は

$\begin{cases} x+1=2 \\ y+3=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x+1=3 \\ y+3=4 \end{cases}$

のみである．よって

$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ 3),\ (2,\ 1)}$

【4】(1) $(x+2y)^2=3^2$

$x+2y>0$ より，$x+2y=3$

$y\geqq 2$ とすると，$x+2y\geqq x+4>3$ となるので，解が存在するとすれば $y=1$

$y=1$ のとき，$x+2=3$ $\quad\therefore x=1$

以上より

$(x,\ y)=\mathbf{(1,\ 1)}$

(2) $(x-2y)(x-4y)=3$

$y>0$ より，$x-2y>x-4y$

よって，$x-2y$，$x-4y$ の値の組み合わせは

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x-4y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=-1 \\ x-4y=-3 \end{cases}$$

これらを解くと

$(x,\ y)=\mathbf{(5,\ 1),\ (1,\ 1)}$

(3) $xy-8x-3y=-17$

両辺に 24 を加えて

$$\begin{aligned} xy-8x-3y+24&=-17+24 \\ x(y-8)-3(y-8)&=7 \\ (x-3)(y-8)&=7 \end{aligned}$$

考えられる $x-3$，$y-8$ の値の組み合わせは

$$\begin{cases} x-3=1 \\ y-8=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=7 \\ y-8=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-7 \\ y-8=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3=-1 \\ y-8=-7 \end{cases}$$

$\therefore (x,\ y)=(4,\ 15),\ (10,\ 9),\ (-4,\ 7),\ (2,\ 1)$

このうち $(x,\ y)=(-4,\ 7)$ は条件をみたさない．よって，

$(x,\ y)=\mathbf{(4,\ 15),\ (10,\ 9),\ (2,\ 1)}$

(4) $xy+2x-4y=57$

両辺に -8 を加えて

$$\begin{aligned} xy+2x-4y-8&=57-8 \\ x(y+2)-4(y+2)&=49 \\ (x-4)(y+2)&=49 \end{aligned}$$

$x>0$，$y>0$ より，$x-4>-4$，$y+2>2$

よって条件をみたす $x-4$，$y+2$ の組み合わせは

$$\begin{cases} x-4=1 \\ y+2=49 \end{cases} \quad \begin{cases} x-4=7 \\ y+2=7 \end{cases}$$

以上より

$(x,\ y)=\mathbf{(5,\ 47),\ (11,\ 5)}$

(5) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$

両辺に $2xy$ をかけると

$$2y+2x=xy$$

$$\therefore xy-2x-2y=0$$

両辺に 4 を加えて

$$xy-2x-2y+4=4$$

$$x(y-2)-2(y-2)=4$$

$$(x-2)(y-2)=4$$

$x>0$, $y>0$ より，$x-2>-2$, $y-2>-2$

$$\begin{cases} x-2=1 \\ y-2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=2 \\ y-2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2=4 \\ y-2=1 \end{cases}$$

以上より

$(x,\ y)=$ **(3, 6), (4, 4), (6, 3)**

【5】 $x^2+nx+16=(x+a)(x+b)$

$$=x^2+(a+b)x+ab$$

両辺の係数を比較して，

$a+b=n$

$ab=16$

ここで，積 ab が正であることから，a と b は同符号である．

また，n は自然数より，和 $a+b$ も正であるから，

$a>0,\ b>0$

よって，a, b はともに自然数である．

かけて 16 になる 2 つの自然数の組は，

(1, 16), (2, 8), (4, 4)

の 3 組.

このとき

$n=1+16$ または $2+8$ または $4+4$

つまり

$n=$ **17, 10, 8**

【6】(1) 連続する 2 つの整数を n, $n+1$ とすると（ただし，n は整数とする）

$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1=n+(n+1)$$

したがって，連続する 2 つの整数の平方の差は，もとの 2 つの整数の和に等しい．

（証明終）

(2) 連続する 4 つの自然数を n，$n+1$，$n+2$，$n+3$ とすると（ただし，n は自然数とする）

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n(n+3)(n+1)(n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

ここで，n^2+3n+1 は自然数より，

連続する 4 つの自然数の積に 1 を加えた数は，ある自然数の 2 乗になる．

（証明終）

【7】(1) $x=2n+1$（n は整数）とおくことができる．

$$\begin{aligned} \therefore x^2+3 = (2n+1)^2+3 &= 4n^2+4n+1+3 \\ &= 4n^2+4n+4 \\ &= 4(n^2+n+1) \end{aligned}$$

n^2+n+1 は整数なので，これは 4 の倍数．

よって，x^2+3 は 4 の倍数であることが示せた．　（証明終）

(2) $x=2n+1$（n は整数）とおくと

$$\begin{aligned} x^2-1 &= (x-1)(x+1) \\ &= \{(2n+1)-1\}\{(2n+1)+1\} \\ &= 2n\cdot(2n+2) \\ &= 4n(n+1) \end{aligned}$$

ここで $n(n+1)$ は連続する 2 つの整数の積である．偶数は整数の中で 1 つおきに現れるので，n，$(n+1)$ のいずれか一方は必ず偶数である．したがって $4n(n+1)$ は 8 の倍数となる．よって，x^2-1 が 8 の倍数であることが示せた．　（証明終）

【8】(1)

$$\begin{aligned} (n^5-n)-5(n^3-n) &= n(n^4-1)-5n(n^2-1) \\ &= n(n^2-1)(n^2+1)-5n(n^2-1) \\ &= n(n^2-1)\{(n^2+1)-5\} \\ &= n(n^2-1)(n^2-4) \\ &= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

これは連続する 5 つの整数の積である．5 の倍数は整数の並びの中に 5 つおきに存在するので，連続する 5 つの整数の中には必ず 1 つは 5 の倍数が含まれる．よって与えられた式の値は必ず 5 の倍数となる．　（証明終）

(2) (1) より，$(n^5-n)-5(n^3-n)=5m$（m は整数）と表せる．

$$\therefore n^5-n=5m+5(n^3-n)$$
$$=5(m+n^3-n)$$

$m+n^3-n$ は整数なので，n^5-n は 5 の倍数となる $\cdots$①

一方

$$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$$
$$=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$
$$=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n^2+1)$$

$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ は連続した 3 つの整数の積なので，必ずその中に 1 つ 3 の倍数を含む．よって，3 の倍数である $\cdots$②．また $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ の中に必ず 2 の倍数が含まれることも同様に示せる $\cdots$③．

以上 ①，②，③ より，n^5-n は 2，3，5 の公倍数であるから，$2\times 3\times 5=30$ の倍数である．　（証明終）

【9】 (1)

$$98^2=(100-2)^2$$
$$=100^2-2\times 100\times 2+2^2$$
$$=10000-400+4$$
$$=\mathbf{9604}$$

(2)

$$47\times 53=(50-3)(50+3)$$
$$=50^2-3^2$$
$$=2500-9$$
$$=\mathbf{2491}$$

(3)

$$3.01\times 2.99=(3+0.01)(3-0.01)$$
$$=9-0.0001$$
$$=\mathbf{8.9999}$$

(4)

$$51^2-49^2=(51+49)(51-49)$$
$$=100\times 2$$
$$=\mathbf{200}$$

(5)

$$7.5^2\times 3.14-2.5^2\times 3.14$$
$$=3.14(7.5^2-2.5^2)$$
$$=3.14(7.5+2.5)(7.5-2.5)$$
$$=3.14\times 10\times 5$$
$$=\mathbf{157}$$

(6)

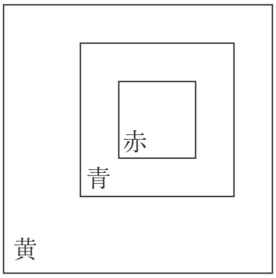
$$1999\times 1999+2\times 1999+1$$
$$=(1999+1)^2$$
$$=2000^2$$
$$=\mathbf{4000000}$$

＜別解＞

$a=2000$ とおくと

$$(\text{与式})=(a-1)^2+2(a-1)+1$$
$$=a^2-2a+1+2a-2+1$$
$$=a^2$$
$$=\mathbf{4000000}$$

【10】正方形のタイル 1 枚の 1 辺の長さを 1 とする．



青い正方形の 1 辺を x，赤い正方形の 1 辺を y とすると，

$$x^2 = y^2 + 57$$

よって，$x^2 - y^2 = 57$ より，

$$(x+y)(x-y) = 57$$

したがって，$x+y > x-y > 0$ に注意して，

① $\begin{cases} x+y=57 \\ x-y=1 \end{cases}$ 　または　② $\begin{cases} x+y=19 \\ x-y=3 \end{cases}$

① のとき，$x=29$，$y=28$

このときは，赤のまわりに青を敷きつめられないので不適

② のとき，$x=11$，$y=8$

このとき，赤は $8^2 = 64$(枚)，黄は $64+40=104$(枚)

$$赤 + 青 + 黄 = 64+57+104 = 225(枚)$$

これは，題意に合うので，タイルは全部で **225 枚**

【11】(1)

$$\begin{aligned} 2000^2 &= (1997+3)^2 \\ &= 1997^2 + 2 \times 1997 \times 3 + 3^2 \\ &= 1997(1997 + 2 \times 3) + 3^2 \\ &= 1997 \times 2003 + 9 \end{aligned}$$

したがって，1997 で割ったときの余りは **9**

(2) $M = 7m+3$，$N = 7n+6$ とおける．（ただし，m，n は 0 または正の整数）

①

$$\begin{aligned} M+N &= (7m+3)+(7n+6) = 7m+7n+9 \\ &= 7(m+n+1)+2 \end{aligned}$$

したがって，余りは **2**

②

$$\begin{aligned} MN &= (7m+3)(7n+6) = 49mn+42m+21n+18 \\ &= 7(7mn+6m+3n+2)+4 \end{aligned}$$

したがって，余りは **4**

【12】 $\begin{cases} 2a+2b+3ab=3 \\ 3a+3b+2ab=7 \end{cases}$

ここで，$a+b=A$，$ab=B$ とおくと，

$\begin{cases} 2A+3B=3 \\ 3A+2B=7 \end{cases}$

これを解いて，$A=3$，$B=-1$

よって，$a+b=3$，$ab=-1$

(1) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{3}{-1}=\mathbf{-3}$

(2) $\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= 3^2-2\times(-1) \\ &= \mathbf{11} \end{aligned}$

【13】 (1) $0<\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$ より

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

ところが ② より，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ なので

$1\leqq\dfrac{3}{x}$

両辺に x をかけて（$x>0$）

$x\leqq 3$ （証明終）

(2) x は自然数なので，$x=1,\ 2,\ 3$ のいずれか

(i) $x=1$ のとき，② は $1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ となり，$y>0$，$z>0$ なので条件をみたす $(x,\ y,\ z)$ は存在しない．

(ii) $x=2$ のとき，② は $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ となる．

$\therefore \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$

両辺に $2yz$ をかけて

$2z+2y=yz$

$\therefore yz-2y-2z=0$

両辺に 4 を加えて

$yz-2y-2z+4=4$

$(y-2)(z-2)=4$

ここで，$x=2\leqq y\leqq z$ より，$y-2\geqq 0$，$z-2\geqq 0$

また，$y\leqq z$ から $y-2\leqq z-2$ より

$\begin{cases} y-2=1 \\ z-2=4 \end{cases}$ または $\begin{cases} y-2=2 \\ z-2=2 \end{cases}$

このとき

$(y,\ z)=\mathbf{(3,\ 6),\ (4,\ 4)}$

(iii) $x=3$ のとき，② は $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ となる．

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$$
$$3z+3y=2yz$$
$$2yz-3y-3z=0$$
$$yz-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z=0 \qquad \text{［}yz\text{ の係数をいったん 1 にした］}$$
$$yz-\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$$
$$\left(y-\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

両辺を 4 倍して

$(2y-3)(2z-3)=9$　　［分数の形だと整数の性質が使えないため］

ここで $x=3\leqq y\leqq z$ より $y\geqq 3$，$z\geqq 3$

よって，$2y-3\geqq 3$，$2z-3\geqq 3$ なので，条件をみたすのは

$$\begin{cases} 2y-3=3 \\ 2z-3=3 \end{cases}$$

に限られるので，$(y,\ z)=(3,\ 3)$

以上より

$(x,\ y,\ z)=$ **$(2,\ 3,\ 6)$，$(2,\ 4,\ 4)$，$(3,\ 3,\ 3)$**

【14】① より，$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{z}$ となるので

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

これと ② の $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}$ より

$$\frac{3}{2} \leqq \frac{3}{x}$$

両辺に $2x$ をかけて，$3 \times x \leqq 3 \times 2$

$\therefore x \leqq 2$

(i) $x=1$ のとき，② は $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ となる．分母を払って

$$2z+2y=yz$$

$$\therefore yz-2y-2z=0$$

両辺に 4 を加えて

$$yz-2y-2z+4=4$$

$$(y-2)(z-2)=4$$

$x=1 \leqq y \leqq z$ より，$y-2 \geqq -1$，$z-2 \geqq -1$，$y-2 \leqq z-2$ なので，条件をみたすのは

$$\begin{cases} y-2=1 \\ z-2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} y-2=2 \\ z-2=2 \end{cases}$$

$(y,\ z)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$

(ii) $x=2$ のとき，② は $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ となる．

$$z+y=yz$$

$$\therefore yz-y-z=0$$

両辺に 1 を加えて

$$yz-y-z+1=1$$

$$(y-1)(z-1)=1$$

$x=2 \leqq y \leqq z$ より，$y-1 \geqq 1$，$z-1 \geqq 1$ なので，条件をみたすのは

$$\begin{cases} y-1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \quad \therefore (y,\ z)=(2,\ 2)$$

以上より

$(x,\ y,\ z)=$ **$(1,\ 3,\ 6),\ (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 2)$**

【15】(1) ① $x^2-2x-3=(x-p)^2-q$ となったとすると

$$(x-p)^2-q=x^2-2px+p^2-q$$

なので，x の係数に着目して

$$-2=-2p$$

$$\therefore p=1$$

このとき，$x^2-2x-3=(x-1)^2-q=(x^2-2x+1)-q$ なので $q=4$ とすればよい.

$$\therefore x^2-2x-3=0$$

$$(x-1)^2-4=0$$

$$\therefore (x-1)^2=4$$

2 乗して 4 となる数は 2 と -2 なので，$x-1=2$ または $x-1=-2$

$\therefore \boldsymbol{x=3}$ **または** $\boldsymbol{x=-1}$

② $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ より

$$(x-3)(x+1)=0$$

かけて 0 になるとき，いずれかは 0 なので，$x-3=0$ または $x+1=0$

$\therefore \boldsymbol{x=3}$ **または** $\boldsymbol{x=-1}$

(2) ① $x^2+8x-240=0$

＜解法 1 ＞

$x^2+8x-240=(x+p)^2-q=x^2+2px+p^2-q$ となると考えると，$p=4$ とすればよい.

$$\therefore x^2+8x-240=x^2+8x+16-16-240$$

$$=(x+4)^2-256$$

$\therefore x^2+8x-240=0$ のとき

$$(x+4)^2-256=0$$

$$(x+4)^2=256=16^2$$

2 乗して 16 となる数は 4 と -4 なので，$x+4=16$ または $x+4=-16$

$\therefore \boldsymbol{x=12}$ **または** $\boldsymbol{x=-20}$

＜解法 2 ＞

左辺を因数分解して

$$(x-12)(x+20)=0$$

$x-12=0$ または $x+20=0$ より

$\therefore \boldsymbol{x=12}$ **または** $\boldsymbol{x=-20}$

② $x^2-38x+361=(x-19)^2$ となるので，$x^2-38x+361=0$ ならば $(x-19)^2=0$

2 乗して 0 になる数は 0 しかないので，$x-19=0$

$\therefore \boldsymbol{x=19}$

③ **＜解法 1 ＞**

$x^2+5x+\dfrac{9}{4}=(x+p)^2-q=x^2+2px+p^2-q$ となるとすると

$$2p=5$$

$$\therefore p=\frac{5}{2}$$

このとき

$$x^2+5x+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-q=x^2+5x+\frac{25}{4}-q$$

なので，$q=\frac{25}{4}-\frac{9}{4}=\frac{16}{4}=4$ とすればよい.

$$\therefore \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4=0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=2^2$$

よって，$x+\frac{5}{2}=2$ または $x+\frac{5}{2}=-2$

$\therefore \boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$ **または** $\boldsymbol{x=-\frac{9}{2}}$

＜解法 2 ＞

$$x^2+5x+\frac{9}{4}=0$$

両辺を 4 倍して

$$4x^2+20x+9=0$$

$$(2x+1)(2x+9)=0$$

よって，$2x+1=0$ または $2x+9=0$

$\therefore \boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$ **または** $\boldsymbol{x=-\frac{9}{2}}$

(3) $x^2+12x-324=(x+p)^2-q=x^2+2px+p^2-q$ となるとすると，

$12=2p$ より $p=6$

したがって

$$\begin{aligned} x^2+12x-324&=x^2+12x+36-360\\ &=(x+6)^2-360 \end{aligned}$$

となる．したがってもとの方程式の解は

$$(x+6)^2-360=0$$

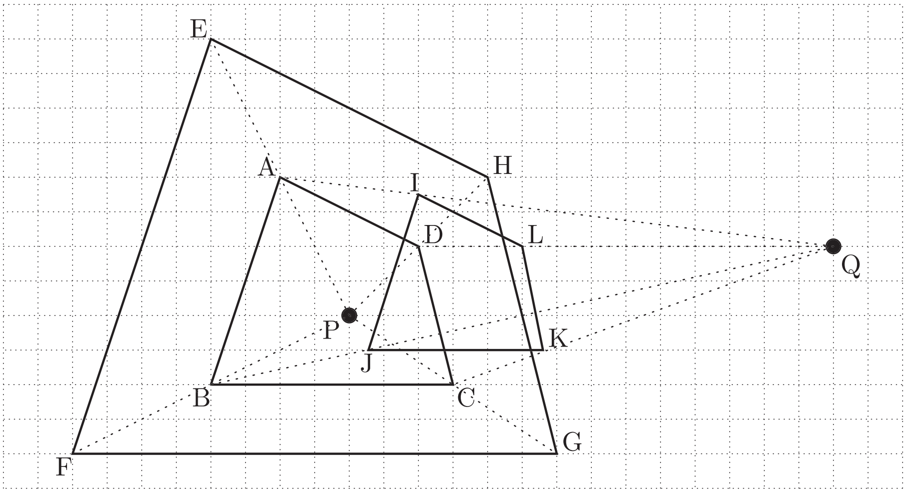
$$\therefore (x+6)^2=360$$

をみたす．しかし，$18^2=324$，$19^2=361$ なので，2 乗して 360 となる整数 $x+6$ は存在しない.

したがって，この式を成立させる整数 x は存在しない.　　（証明終）

問題

【1】(1)



(2)　四角形 IJKL を $\frac{4}{3}$ 倍した図形が四角形 ABCD であり，その四角形 ABCD を 2 倍に拡大した図形が四角形 EFGH であるから，四角形 IJKL を $\frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$(倍) したものが四角形 EFGH となる．よって，四角形 EFGH と四角形 IJKL とは相似の関係にある．また，その相似比は **8 : 3** である．

【2】△ ABM と△ DEN において，

△ ABC∽ △ DEF だから，対応する辺の比は等しいことより，

$AB : DE = BC : EF$ ……①

また，$BM = \frac{1}{2}BC$，$EN = \frac{1}{2}EF$ ……②

①，② より，

$AB : DE = \frac{1}{2}BC : \frac{1}{2}EF = BM : EN$ ……③

対応する角は等しいから，

$\angle ABC = \angle DEF$

ゆえに，

$\angle ABM = \angle DEN$ ……④

③，④ より，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，

△ ABM∽ △ DEN　（証明終）

【3】$\triangle$ ABD と $\triangle$ ACE において，

$\triangle$ ABC∽ $\triangle$ ADE より

$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{AD} : \mathrm{AE}$ ･･･①

$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BAC} - \angle\mathrm{DAC}$

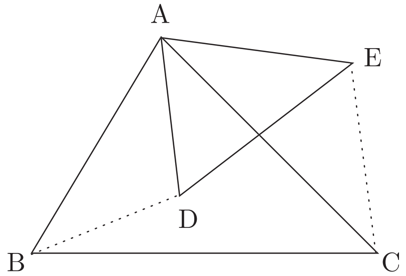
$= \angle\mathrm{DAE} - \angle\mathrm{DAC}$

$(\because \ \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{DAE})$

$= \angle\mathrm{CAE}$ ･･･②

①，② より，2 組の辺の比が等しく，その間の角が等しいから，

$\triangle$ ABD ∽ $\triangle$ ACE　（証明終）



【4】(1) AC の中点を M とする．

$\triangle$ ADM と $\triangle$ CDM において

仮定より，AM=CM

$\angle\mathrm{AMD} = \angle\mathrm{CMD} (= 90^\circ)$

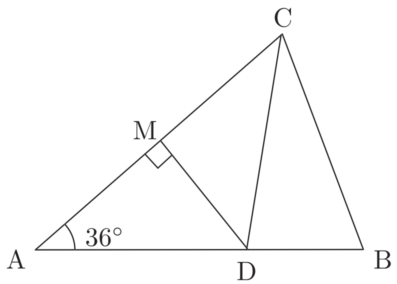
MD は共通

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

$\triangle \mathrm{ADM} \equiv \triangle \mathrm{CDM}$

合同な三角形の対応する辺はそれぞれ等しいから

$\mathrm{AD} = \mathrm{CD}$　（証明終）



(2) $\triangle$ ABC と $\triangle$ CBD において，

(1) の結論より，AD=CD だから，$\triangle$ DAC は二等辺三角形より

$\angle\mathrm{DCM} = \angle\mathrm{DAM} = 36^\circ$ ･･･①

AB=AC だから，$\triangle$ ABC は二等辺三角形より，

$\angle\mathrm{ACB} = (180^\circ - 36^\circ) \times \frac{1}{2} = 72^\circ$ ･･･②

①，② より

$\angle\mathrm{BCD} = 72^\circ - 36^\circ$

$= 36^\circ$

ゆえに，$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{BCD}$ ･･･③

また，$\angle$B は共通 ･･･④

③，④ より，2 組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle$ ABC ∽ $\triangle$ CBD　（証明終）

【5】(1) △ AED と△ EPC において，

$\angle ADE = \angle ECP = 90°$ $\cdots$①

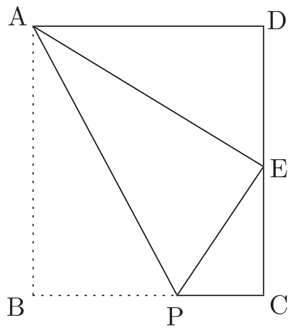
$\angle EAD = 90° - \angle AED$

また，$\angle PEC + 90° + \angle AED = 180°$ より，

$\angle PEC = 90° - \angle AED$

よって，$\angle EAD = \angle PEC$ $\cdots$②

①，② より，2 組の角がそれぞれ等しいので，
△ AED ∽ △ EPC　（証明終）



(2) △ AEP は△ ABP を折り返したものであるから，
$AB : BP = AE : EP = 2 : 1$

よって，△ AED と△ EPC の相似比は 2 : 1 と

なるから，$PC = a$，$CE = b$ とすると，
$ED = 2a$，$DA = 2b$

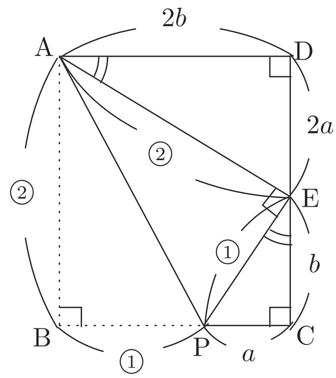
このとき

$$AB : BP = DC : (AD - PC)$$
$$= (2a + b) : (2b - a)$$
$$= 2 : 1$$

よって，$b = \dfrac{4}{3}a$

ゆえに

$$CE : ED = b : 2a$$
$$= \frac{4}{3} : 2$$
$$= \mathbf{2 : 3}$$



【6】(1) 点 G は△ ABD の重心だから

$\mathrm{BH} = \mathrm{HA}$

点 D は辺 BC の中点だから

$\mathrm{BD} = \mathrm{DC}$

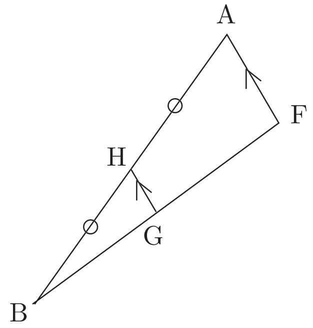
ゆえに，△ ABC において，中点連結定理より

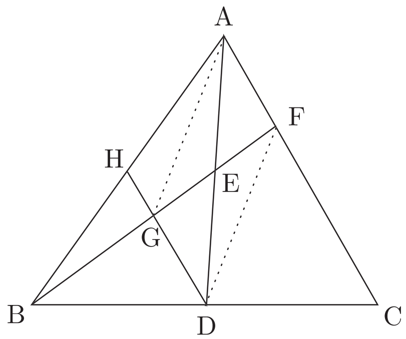
$\mathrm{HD} \parallel \mathrm{AC}$ $\cdots$ ①

△ ABF において，BH=HA と ① から，

中点連結定理の逆より

$\mathrm{BG} = \mathrm{GF}$ （証明終）





(2) (1) より，△ ABF において，中点連結定理の逆より，

$\mathrm{AF} = 2\mathrm{HG}$ $\cdots$ ②

また，点 G は△ ABD の重心だから，

$\mathrm{GD} = 2\mathrm{HG}$ $\cdots$ ③

よって四角形 AGDF において，

① より AF//GD

②，③ より，AF=GD だから，

1 組の対辺が平行で，その長さが等しいので，四角形 AGDF は平行四辺形である．

（証明終）

(3) △ BCF において，BD=DC と ① から，中点連結定理の逆より

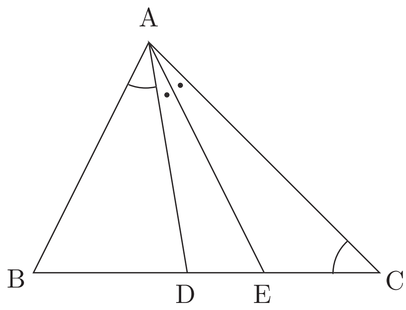
$\mathrm{FC} = 2\mathrm{GD}$ $\cdots$ ④

(2) の結論より，AF=GD だから，④ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AF} : \mathrm{FC} &= \mathrm{GD} : \mathrm{FC} \\ &= \mathrm{GD} : 2\mathrm{GD} \\ &= 1 : 2\end{aligned}$$

よって，AF : FC = **1 : 2**

【7】△ ABD と△ CBA において，



$\angle$ABD=$\angle$CBA（共通）

$\angle$BAD=$\angle$BCA（仮定より）

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから，

△ ABD ∽ △ CBA

これより，

$\mathrm{AB} : \mathrm{CB} = \mathrm{DB} : \mathrm{AB}$

$6 : 10 = \mathrm{DB} : 6$

$$\mathrm{DB} = \frac{6^2}{10} = \frac{18}{5}(\mathrm{cm})$$

また，△ AED において，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{AEB} &= \angle\mathrm{CAE} + \angle\mathrm{ACE} \\ &= \angle\mathrm{DAE} + \angle\mathrm{BAD}\ (\angle\mathrm{CAE} = \angle\mathrm{DAE},\ \angle\mathrm{ACE} = \angle\mathrm{BAD}) \\ &= \angle\mathrm{BAE}\end{aligned}$$

△ BAE は BA = BE の二等辺三角形といえるから，

$$\mathrm{DE} = \mathrm{BE} - \mathrm{BD} = 6 - \frac{18}{5} = \mathbf{\frac{12}{5}(cm)}$$

【8】(1) △ DPT∽ △ DAQ で相似比が DP : DA = 1 : 2 より，

PT : AQ = 1 : 2

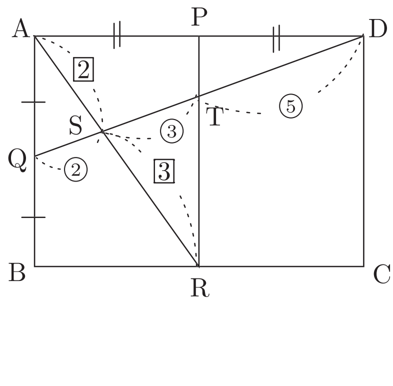
AB = PR, AQ = QB より，

AQ : RT = 2 : 3

△ ASQ∽ △ RST より，

QS : TS = AQ : RT = **2 : 3**

(2)



$$\begin{aligned}&\triangle\mathrm{RST} \\ =&\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{RA}} \times \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RP}} \times \triangle\mathrm{RAP} \\ =&\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{RA}} \times \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RP}} \times \frac{1}{4} \times \text{長方形 ABCD} \\ =&\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \text{長方形 ABCD} \\ =&\frac{9}{80} \times \text{長方形 ABCD}\end{aligned}$$

よって，

$a : b =$ △ RST : 長方形 ABCD = **9 : 80**

【9】右の図で，

　$\mathrm{FG} : \mathrm{GE} = \triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ADE}$

よって，$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ADE}$ を求めればよい．

$\triangle\mathrm{ABD}= T$ とすると，

　$\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ADC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC} = 1 : 2$

よって，$\triangle\mathrm{ADC}=2T$

また

　$\triangle\mathrm{ADC} : \triangle\mathrm{ADE} = \mathrm{AC} : \mathrm{AE} = 7 : 4$

よって

　$\triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{4}{7}\triangle\mathrm{ADC} = \dfrac{4}{7} \times 2T = \dfrac{8}{7}T$ $\cdots$①

また

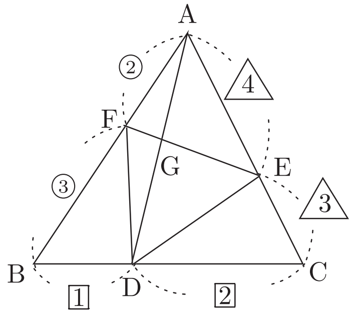
　$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ABD} = \mathrm{AF} : \mathrm{AB} = 2 : 5$

よって，$\triangle\mathrm{ADF}=\dfrac{2}{5}T$ $\cdots$②

①，② より，

　$\triangle\mathrm{ADF} : \triangle\mathrm{ADE} = \dfrac{2}{5}T : \dfrac{8}{7}T = 7 : 20$

すなわち，$\mathrm{FG} : \mathrm{GE} = \mathbf{7 : 20}$



【10】P を通り BQ に平行な線を引き，AC との交点をS とする．

BQ//PS だから

$$\frac{\mathrm{QS}}{\mathrm{SC}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{3}{4}$$

ゆえに，$\mathrm{QS} : \mathrm{SC}=3 : 4$ より

　$\mathrm{QS} : \mathrm{QC} = 3 : (3 + 4) = 3 : 7$ $\cdots$①

また，$\mathrm{AQ} : \mathrm{QC}=2 : 5$ $\cdots$②

①，② より

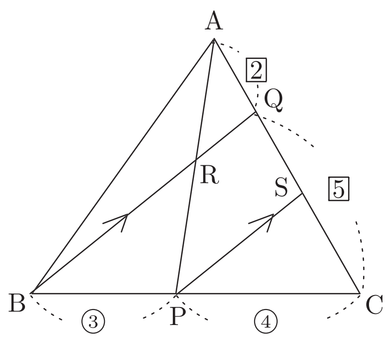
		QS	:	QC	=			3	:	7
AQ	:			QC	=	2	:			5
AQ	:	QS	:	QC	=	14	:	15	:	35

よって，$\mathrm{AQ} : \mathrm{QS} = 14 : 15$

BQ//PS だから，$\mathrm{AR} : \mathrm{RP} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QS} = 14 : 15$

つまり

　$\mathrm{AR} : \mathrm{RP} = \mathbf{14 : 15}$



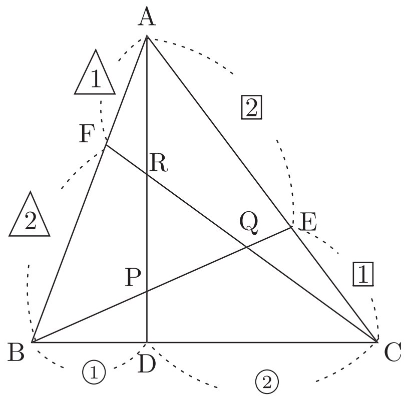
【11】(1) メネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PD} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

よって，$\frac{AP}{PD} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = 1$ より，$\frac{AP}{PD} = \frac{6}{1}$

したがって

AP：PD $=$ **6：1**



＜別解＞ (平行線の補助線を引いて解くと，次のようになる．)

右の図のように，AG//BC となる点 G を BE の延長上にとる．

△ AEG∽△ CEB より

GA：BC $=$ AE：CE $= 2：1$

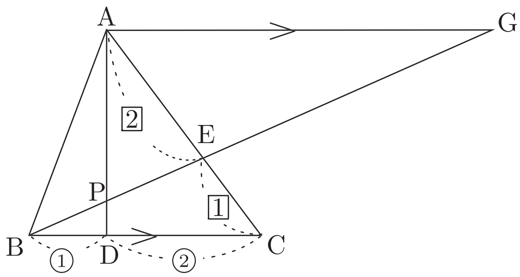
よって，GA=2BC

また，△ APG∽△ DPB より

AP：DP $=$ GA：BD

$= 2\text{BC} : \frac{1}{3}\text{BC}$

$=$ **6：1**



(2) メネラウスの定理より

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DR}{RA} = 1$$

よって，$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{DR}{RA} = 1$ より，$\frac{DR}{RA} = \frac{4}{3}$

したがって

AR：RD $= 3：4$

(1) より，AP：PD $= 6：1$ だから，AR：RP：PD $= 3：3：1$

同様にして，BP：PQ：QE $= 3：3：1$

以上より

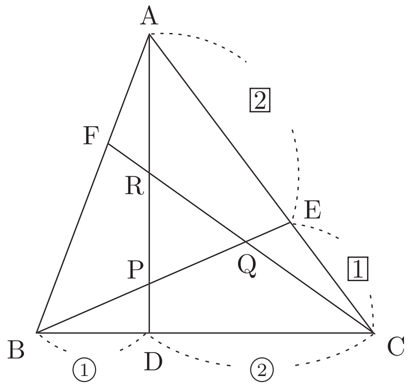
$$\triangle PQR = \frac{PQ}{PE} \times \frac{PR}{PA} \times \triangle PAE$$
$$= \frac{PQ}{PE} \times \frac{PR}{PA} \times \frac{AP}{AD} \times \frac{AE}{AC} \times \triangle ADC$$
$$= \frac{PQ}{PE} \times \frac{PR}{PA} \times \frac{AP}{AD} \times \frac{AE}{AC} \times \frac{DC}{BC} \times \triangle ABC$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \triangle ABC$$
$$= \frac{1}{7}\triangle ABC$$

すなわち

△ ABC：△ PQR $=$ **7：1**

＜別解＞ (面積の比だけを用いて解くと，次のようになる．)

$$\triangle \mathrm{ABP} = \frac{6}{7}\triangle \mathrm{ABD}$$
$$= \frac{6}{7} \times \frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC}$$
$$= \frac{2}{7}\triangle \mathrm{ABC}$$



同様に考えて

$$\triangle \mathrm{BCQ} = \triangle \mathrm{CAR} = \frac{2}{7}\triangle \mathrm{ABC}$$

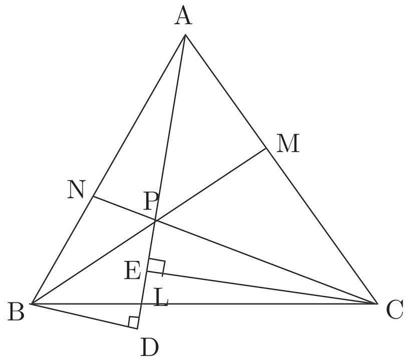
よって

$$\triangle \mathrm{PQR} = \triangle \mathrm{ABC} - 3 \times \frac{2}{7}\triangle \mathrm{ABC}$$
$$= \frac{1}{7}\triangle \mathrm{ABC}$$

ゆえに

$\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{PQR} = \mathbf{7 : 1}$

【12】 (1) 直線 AL に B，C から下した垂線の足をそれぞれ D，E とすると



$\triangle \mathrm{BDL} \backsim \triangle \mathrm{CEL}$ より

$\mathrm{BD} : \mathrm{CE} = \mathrm{BL} : \mathrm{LC}$ $\cdots$①

一方，AP 共通より

$\triangle \mathrm{ABP} : \triangle \mathrm{CAP} = \mathrm{BD} : \mathrm{CE}$ $\cdots$②

①，② より

$\triangle \mathrm{ABP} : \triangle \mathrm{CAP} = \mathrm{BL} : \mathrm{LC}$

$$\therefore \frac{\triangle \mathrm{ABP}}{\triangle \mathrm{CAP}} = \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}$$ （証明終）

(2) 同様にして

$$\frac{\triangle \mathrm{CAP}}{\triangle \mathrm{BCP}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}},\ \frac{\triangle \mathrm{BCP}}{\triangle \mathrm{ABP}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}} \times \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}} \times \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}} = \frac{\triangle \mathrm{CAP}}{\triangle \mathrm{BCP}} \times \frac{\triangle \mathrm{ABP}}{\triangle \mathrm{CAP}} \times \frac{\triangle \mathrm{BCP}}{\triangle \mathrm{ABP}} = 1$$ （証明終）

＜注＞ この結果を**チェバの定理**という．

(3) (2) より

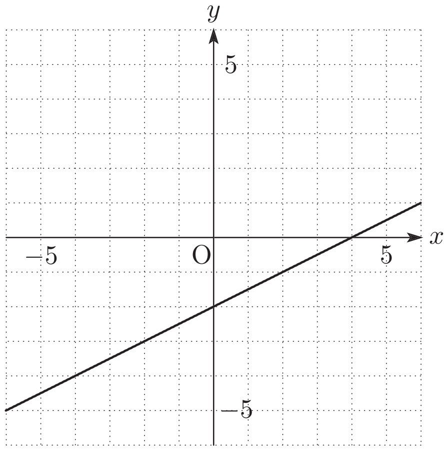
$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}} \times \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}} \times \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}} = 1$$
$$\frac{3}{2} \times \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}} \times \frac{3}{1} = 1$$
$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}} = \frac{2}{9}$$

$\therefore \mathrm{BL} : \mathrm{LC} = \mathbf{2 : 9}$

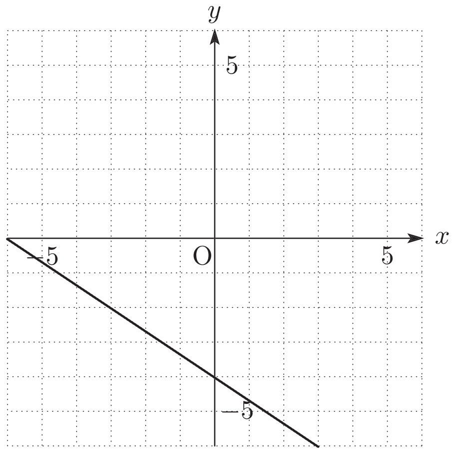
問題

【1】

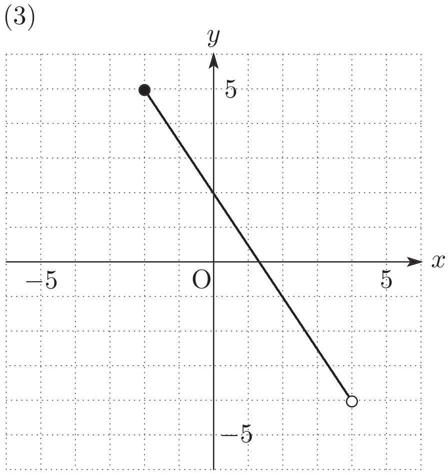
(1)



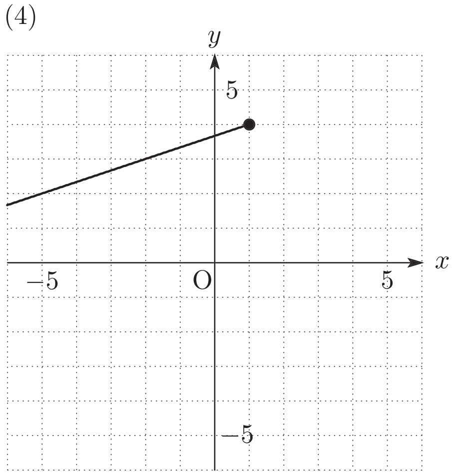
(2)



(3)



(4)



【2】 (1) a は比例定数（傾き）であるから，$a > 0$

よって，(ア)

(2) $x = 0$ のとき，$y = b - 1$

グラフより，$-1 > y = b - 1$

$\therefore b < 0$

よって，(イ)

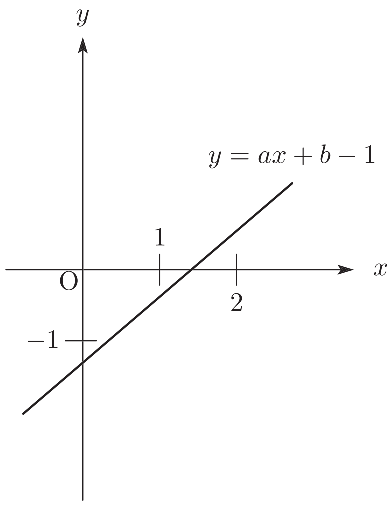
(3) $x = 1$ のとき，$y = a + b - 1$

グラフより，$y < 0$ であるから，(イ)

(4) $x = 2$ のとき，$y = 2a + b - 1$

グラフより，$y > 0$ であるから，$2a + b - 1 > 0$

よって，(ア)



【3】 $y = ax - b + 1$ のグラフが右下がりだから

$a < 0$ $\cdots$①

$y = ax - b + 1$ において，グラフより

(i) $x = 0$ のとき，$y > -1$ だから

$$y = a \times 0 - b + 1 > -1$$
$$b < 2 \quad \cdots ②$$

(ii) $x = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y < 0$ だから

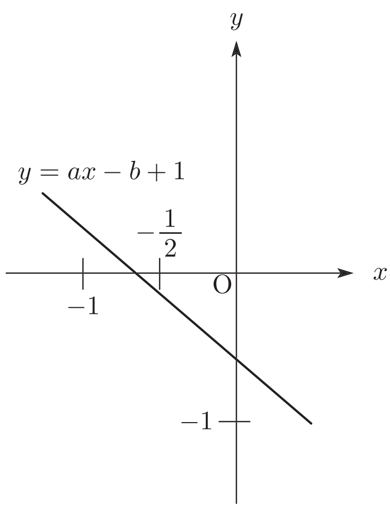
$$y = -\frac{1}{2}a - b + 1 < 0$$
$$-a - 2b + 2 < 0$$
$$a + 2b - 2 > 0 \quad \cdots ③$$

(iii) $x = -1$ のとき，$y > 0$ だから

$$y = -a - b + 1 > 0$$
$$a + b < 1 \quad \cdots ④$$

①，②，③，④ より，

(b)，(d)，(f)，(g)



【4】(1) $2 \leqq x \leqq 4$ ということは，点 P が BC 上にあるときなので，

$$\triangle \mathrm{EAP} = \triangle \mathrm{ABC} - (\triangle \mathrm{APB} + \triangle \mathrm{CEP})$$

である．

$$\mathrm{BP} = x - 2$$

$$\mathrm{CP} = 2 - (x - 2) = 4 - x$$

ここで，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{APB} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{BP} \times \mathrm{AB} \\ &= \frac{1}{2} \times (x - 2) \times 2 = x - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{CEP} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{CP} \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \times (4 - x) \times 1 = \frac{4 - x}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{EAP} &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - \left\{(x - 2) + \frac{4 - x}{2}\right\} \\ &= \frac{4 - x}{2}\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{y = \dfrac{4 - x}{2}}$

(2) $4 \leqq x \leqq 6$ ということは，点 P が CD 上にあるときなので，

$$\triangle \mathrm{EAP} = \triangle \mathrm{ACD} - (\triangle \mathrm{ADP} + \triangle \mathrm{CEP})$$

である．

$$\mathrm{CP} = x - 4$$

$$\mathrm{DP} = 2 - (x - 4) = 6 - x$$

ここで，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ADP} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{DP} \times \mathrm{AD} \\ &= \frac{1}{2} \times (6 - x) \times 2 = 6 - x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{CEP} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{CP} \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \times (x - 4) \times 1 = \frac{x - 4}{2}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{EAP} &= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} - \left\{(6 - x) + \frac{x - 4}{2}\right\} \\ &= \frac{x - 4}{2}\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{y = \dfrac{x - 4}{2}}$

【5】(1) $\begin{cases} y = 4x - 5 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$ を解いて，$x = \dfrac{5}{3}$, $y = \dfrac{5}{3}$

$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ と $(4,\ 7)$ を通る直線を $y = ax + b$ とおくと，

$\begin{cases} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}a + b \\ 7 = 4a + b \end{cases}$ より，$a = \dfrac{16}{7}$, $b = -\dfrac{15}{7}$

よって，$\boldsymbol{y = \dfrac{16}{7}x - \dfrac{15}{7}}$

(2) $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ を解いて，$x = 3$, $y = 1$

$y = -\dfrac{1}{2}x + 4$ に平行なので，$y = -\dfrac{1}{2}x + b$ とおける．

$(x,\ y) = (3,\ 1)$ を代入して

$1 = -\dfrac{1}{2} \times 3 + b$

$b = \dfrac{5}{2}$

よって，$\boldsymbol{y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}}$

(3) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 5y = -21 \end{cases}$ を解いて，$x = -1$, $y = 4$

$y = -3x + 8$ に垂直なので，$y = \dfrac{1}{3}x + b$ とおける．

$(x,\ y) = (-1,\ 4)$ を代入して

$4 = -\dfrac{1}{3} + b$

$b = \dfrac{13}{3}$

よって，$\boldsymbol{y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{3}}$

【6】(1) $3x-y=9$，$x+2y=-4$ の交点は，

$\begin{cases} 3x-y=9 \\ x+2y=-4 \end{cases}$ を解いて，$x=2$，$y=-3$

よって，$2x-5y=a$ が $(2,\ -3)$ を通ればよいから，

$2\times 2-5\times(-3)=a$

$\boldsymbol{a=19}$

(2) 3 直線で三角形をつくることができないのは，

① どれか 2 直線が平行

② 3 直線が 1 点で交わる

のいずれかの場合である．

① のとき，$a=1,\ -2\ \cdots$ ①′

② のとき，$y=x+1$，$y=-2x+7$ の交点は，

$\begin{cases} y=x+1 \\ y=-2x+7 \end{cases}$ を解いて，$x=2$，$y=3$

よって，$y=ax+4$ が $(2,\ 3)$ を通るから，

$3=2a+4$

$a=-\dfrac{1}{2}\ \cdots$ ②′

①′，②′ より，$\boldsymbol{a=1,\ -\dfrac{1}{2},\ -2}$

【7】求める点の座標を B$(a,\ b)$ とおくと，AB の中点 M は $\left(\dfrac{a+6}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$ となる．

これが $y=-\dfrac{3}{4}x+3$ 上にあるので，

$$\frac{b+4}{2}=-\frac{3}{4}\times\frac{a+6}{2}+3$$
$$4(b+4)=-3(a+6)+24$$
$$3a+4b=-10\ \cdots ①$$

一方，AB の傾きは $\dfrac{b-4}{a-6}$

これが $y=-\dfrac{3}{4}x+3$ と直交するので

$$\frac{b-4}{a-6}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$$
$$3(b-4)=4(a-6)$$
$$3b-12=4a-24$$
$$\therefore 4a-3b=12\ \cdots ②$$

① $\times 3+$ ② $\times 4$ より

$$25a=18$$
$$a=\frac{18}{25}$$

② に代入して

$$4\times\frac{18}{25}-3b=12$$
$$4\times\frac{18}{25}-12=3b$$
$$b=\frac{4\times 6}{25}-4$$
$$=\frac{24-100}{25}$$
$$=-\frac{76}{25}$$

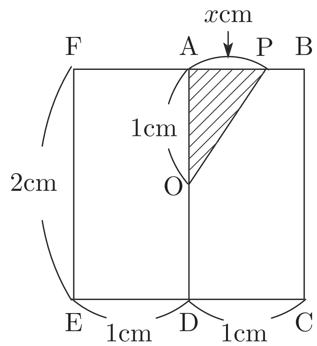
よって，$\left(\boldsymbol{\dfrac{18}{25},\ -\dfrac{76}{25}}\right)$

【8】(1) 点 P が AB 上にあるとき，

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{AP}$$

$$y = \frac{1}{2} \times 1 \times x$$

よって，$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$ **(ただし，$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1}$)**

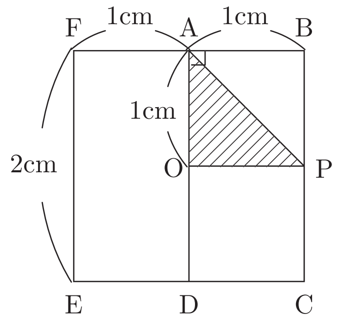


(2) 点 P が BC 上にあるとき，底辺を OA とすると，高さはつねに AB に等しいから，

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{AB}$$

$$y = \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

よって，$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$ **(ただし，$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 3}$)**



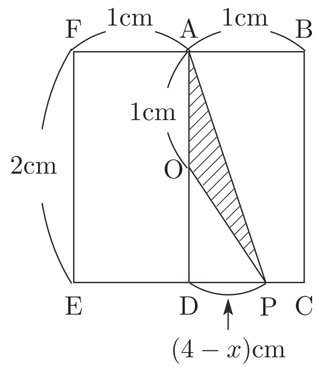
(3) 点 P が CD 上にあるとき，底辺を OA とすると，高さ PD は $(4-x)$cm だから，

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{PD}$$

$$y = \frac{1}{2} \times 1 \times (4-x)$$

よって，

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 2}$ **(ただし，$\boldsymbol{3 \leqq x \leqq 4}$)**



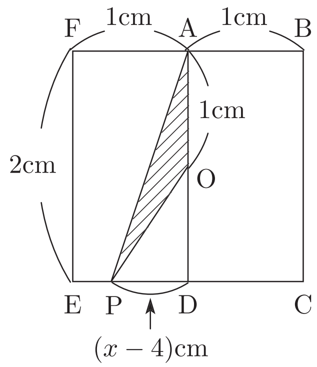
(4) 点 P が DE 上にあるとき，底辺を OA とすると，高さ PD は $(x-4)$cm だから，

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{PD}$$

$$y = \frac{1}{2} \times 1 \times (x-4)$$

よって，

$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 2}$ **(ただし，$\boldsymbol{4 \leqq x \leqq 5}$)**

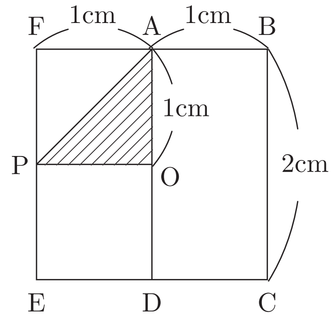


(5) 点 P が EF 上にあるとき，底辺を OA とすると，高さはつねに FA に等しいから，

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{FA}$$

$$y = \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

よって，$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}}$ **(ただし，$\boldsymbol{5 \leqq x \leqq 7}$)**



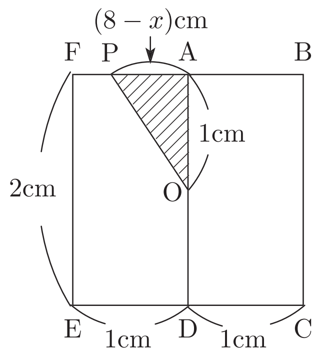
(6) 点 P が FA 上にあるとき，底辺を OA とすると，高さ PA は $(8-x)$cm だから，

$$\triangle \mathrm{APO} = \frac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{PA}$$

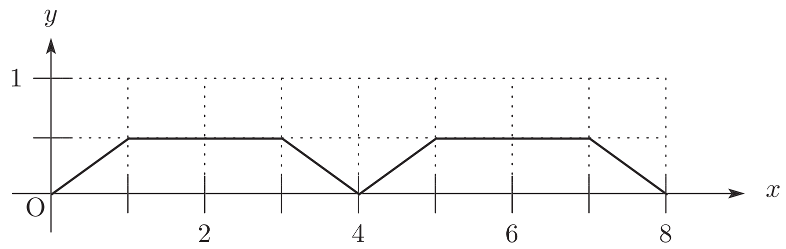
$$y = \frac{1}{2} \times 1 \times (8-x)$$

よって，

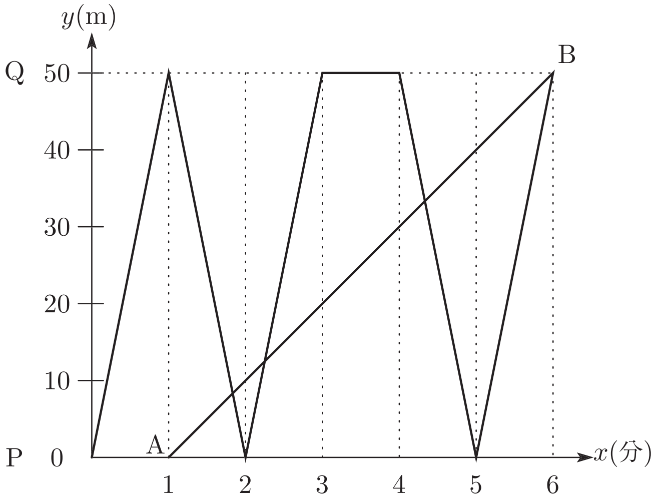
$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 4}$ **(ただし，$\boldsymbol{7 \leqq x \leqq 8}$)**



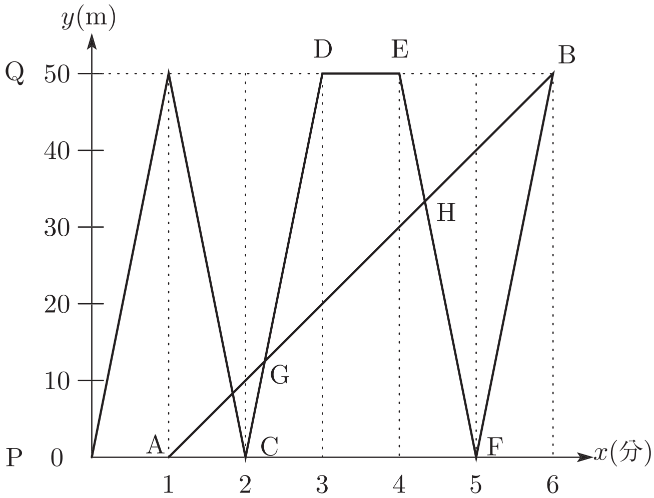
(1)〜(6) より，グラフは下のようになる．



【9】(1) 下の図の線分 AB



(2)



上の図において，A(1, 0)，B(6, 50) より，直線 AB の式は

$y = 10x - 10$ $\cdots$①

C(2, 0)，D(3, 50) より，直線 CD の式は

$y = 50x - 100$ $\cdots$②

よって，①，② を連立させて解いて，交点 G の座標を求めると，

$\mathrm{G}\left(\dfrac{9}{4}, \dfrac{25}{2}\right)$

すなわち，$\boldsymbol{\dfrac{25}{2}}$**m の地点**

(3) E(4, 50)，F(5, 0) より，直線 EF の式は

$y = -50x + 250$ $\cdots$③

① と ③ を連立させて解いて，交点 H の座標を求めると，

$$\mathrm{H}\left(\frac{13}{3},\ \frac{100}{3}\right)$$

より，花子と太郎が最後にすれ違ったのは，太郎が泳ぎ始めてから $\dfrac{13}{3}$ 分後だから，
それから Q に着くまでは

$$6-\frac{13}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}(\text{分})$$

よって，**1 分 40 秒後**

【10】(1) 45 分で入れた水の量は $45\times1000=45000(\mathrm{cm}^3)$
このときの水面の高さが 40cm なので，底面積は

$$\frac{45000}{40}=\mathbf{1125(cm^2)}$$

(2) 20 分〜50 分における水面の底が，石のない状態の A の底面積と考えられる．
このとき 30 分で水面が 15cm 上昇しているので，底面積は

$$\frac{30\times1000}{15}=\mathbf{2000(cm^2)}$$

(3) 底面積が $2000\mathrm{cm}^2$ で水深が 40cm となったとき，石がなければ

$$2000\times40=80000(\mathrm{cm}^3)$$

となるが，実際に入った水量の合計は

$$1000\times50=50000(\mathrm{cm}^3)$$

よってこの差が石の体積となるから

$$80000-50000=\mathbf{30000(cm^3)}$$

(4) $20 \leqq x \leqq 50$ での A の水面の上昇速度は

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

よって $y = \frac{1}{2}x + b$ とおける.

$x = 20$ のとき $y = 25$ より，$b = 15$ 　　$\therefore y = \frac{1}{2}x + 15$

一方，B の水面の高さを表す式は 45 分で 40cm より，傾きが $\frac{40}{45} = \frac{8}{9}$ なので

$y = \frac{8}{9}x$

よって連立方程式

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 15 & \cdots ① \\ y = \frac{8}{9}x & \cdots ② \end{cases}$$

を解けばよい.

① = ② より

$$\frac{1}{2}x + 15 = \frac{8}{9}x$$

$$-\frac{7}{18}x = -15$$

$$x = \frac{18 \times 15}{7} = \mathbf{\frac{270}{7}}\textbf{(分後)}$$

【11】(1) $\ell \perp m$ より, m の方程式は $y = 3x$

よって AB と m との交点 M の座標を求めると,

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + 10 \\ y = 3x \end{cases}$$

より，$x = 3$，$y = 9$

$\therefore$ M(3, 9)

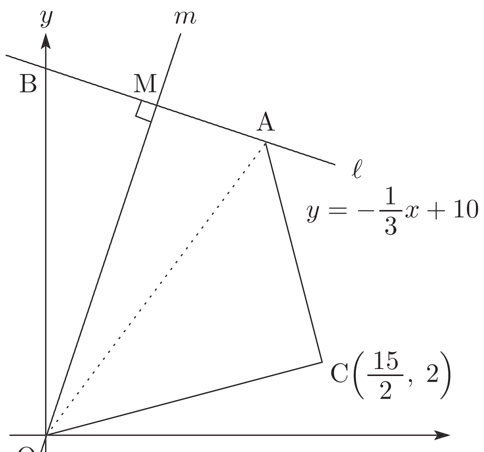
一方，B(0, 10) なので，A(x, y) とおくと

$$\frac{x+0}{2} = 3,\ \frac{y+10}{2} = 9$$

$\therefore x = 6,\ y = 8$

よって，**A(6, 8)**

△ OAB は二等辺三角形となるので，OA = OB = **10**



(2) OA の傾きは $\dfrac{4}{3}$ なので，$y=\dfrac{4}{3}x+b$ とおける．

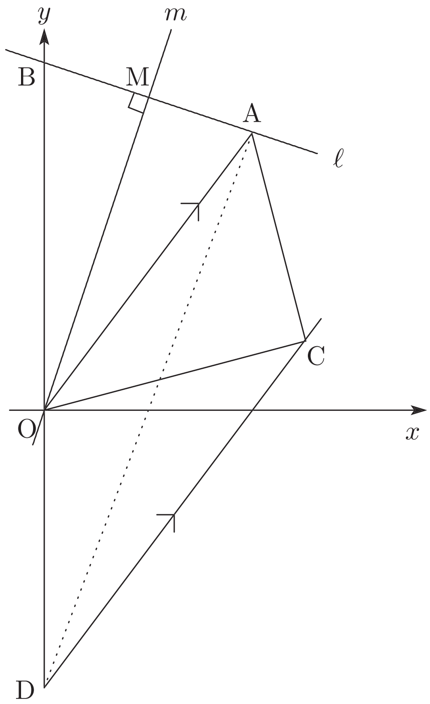
$\left(\dfrac{15}{2},\ 2\right)$ を通るので

$2=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{15}{2}+b$

$b=-8$

よって，$\boldsymbol{y=\dfrac{4}{3}x-8}$

(3) C を通り OA に平行な直線が y 軸と交わる点を D とすると，OA//CD より△ AOC= △ AOD



$\therefore$△ OAB : △ AOC

=△ OAB : △ AOD

=BO : OD

=10 : 8

=5 : 4

△ OMB= $\dfrac{1}{2}$ △ OAB なので

△ OMB : 四角形 OMAC

$=\dfrac{1}{2}$△ OAB : $\left(\dfrac{1}{2}\text{△ OAB}+\dfrac{4}{5}\text{△ OAB}\right)$

$=\dfrac{1}{2}:\dfrac{13}{10}$

=**5 : 13**

【12】(1) $\begin{cases} \angle\mathrm{OAC}=90^\circ-\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{BOC} \\ \angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{OCB}=90^\circ \end{cases}$

より，△ OAC∽ △ BOC

一方，AC : CB = 16 : 9 より

△ OAC : △ BOC = 16 : 9 = $4^2 : 3^2$

相似な図形の面積比は相似比の 2 乗となるから，△ OAC と△ BOC の相似比は 4 : 3

OA，BO は対応する辺なので

OA : BO = **4 : 3**

(2) $\triangle \mathrm{OAC} \backsim \triangle \mathrm{BOC}$ より

$$\mathrm{AC} : \mathrm{OC} = \mathrm{OA} : \mathrm{BO}$$
$$16 : \mathrm{OC} = 4 : 3$$
$$\mathrm{OC} = 12$$
$$\therefore \triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \times \mathrm{OC} \times \mathrm{AB} = \frac{1}{2} \times 12 \times 25$$

一方，$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$

$\mathrm{OA} = 4x$，$\mathrm{OB} = 3x$ とおくと

$$\frac{1}{2} \times 4x \times 3x = \frac{1}{2} \times 12 \times 25$$
$$\therefore \quad x^2 = 25$$
$$x = 5$$

以上より

$\mathrm{OA} = 4 \times 5 = \mathbf{20}$

$\mathrm{OB} = 3 \times 5 = \mathbf{15}$

(3) $\angle\mathrm{AOC}$ の二等分線と AC との交点を D とすると，

角の二等分線の性質より

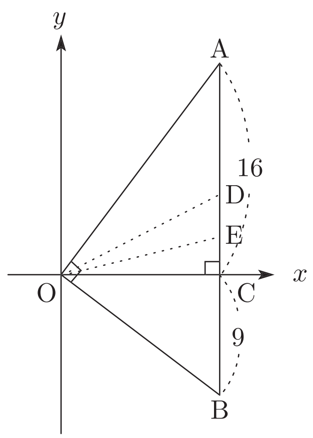
$$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AO} : \mathrm{CO} = 20 : 12 = 5 : 3$$

AC = 16 より

$$\mathrm{CD} = 16 \times \frac{3}{5+3} = 6$$

$\therefore \mathrm{D}(12,\ 6)$

よって，OD の式は $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x}$



$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と AC との交点を E とすると

$$\mathrm{AE} : \mathrm{EB} = \mathrm{AO} : \mathrm{BO} = 4 : 3$$

AB=25 より

$$\mathrm{AE} = 25 \times \frac{4}{4+3} = \frac{100}{7}$$
$$\therefore \quad \mathrm{EC} = 16 - \frac{100}{7} = \frac{12}{7}$$

よって，$\mathrm{E}\left(12,\ \dfrac{12}{7}\right)$

OE の式は $\boldsymbol{y = \frac{1}{7}x}$

【13】(1) A $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x \\ y = -\dfrac{4}{3}x + 16 \end{cases}$

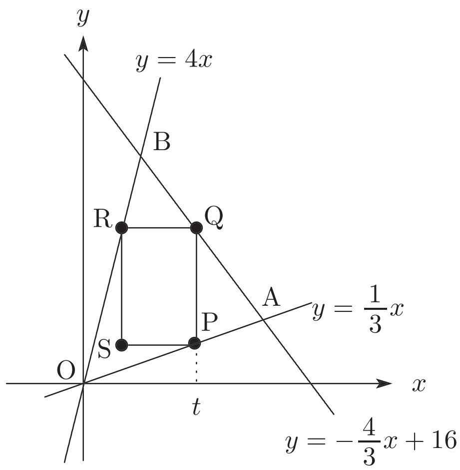
連立して，$x = \dfrac{48}{5}$，$y = \dfrac{16}{5}$

よって，$\mathbf{A}\left(\dfrac{\mathbf{48}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}\right)$

B $\begin{cases} y = 4x \\ y = -\dfrac{4}{3}x + 16 \end{cases}$

連立して，$x = 3$，$y = 12$

よって，$\mathbf{B(3,\ 12)}$



(2) Q が線分 AB 上にあれば P は OA 上，R は OB 上に必ずある．

よって，Q が AB 上にある条件を求めればよい．

$\mathbf{3 < t < \dfrac{48}{5}}$

(3) P は $y = \dfrac{1}{3}x$ 上にあるので，P の y 座標 $= \dfrac{1}{3}t$ $\cdots$ これは S の y 座標と一致

Q は $y = -\dfrac{4}{3}x + 16$ 上にあるので，Q の y 座標 $= -\dfrac{4}{3}t + 16$ $\cdots$ これは R の y 座標と一致

R は $y = 4x$ 上にあるので，

$$-\frac{4}{3}t + 16 = 4x$$

$$\therefore x = -\frac{1}{3}t + 4$$

これは S の x 座標でもあるから，

$\mathbf{S}\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{t} + \mathbf{4},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{t}\right)$

(4) $\mathrm{SP} = t - \left(-\dfrac{1}{3}t + 4\right) = \dfrac{4}{3}t - 4$　（S と P の x 座標の差）

$\mathrm{PQ} = \left(-\dfrac{4}{3}t + 16\right) - \dfrac{1}{3}t = -\dfrac{5}{3}t + 16$　（P と Q の y 座標の差）

SP = PQ となればよいから

$$\frac{4}{3}t - 4 = -\frac{5}{3}t + 16$$

$$3t = 20$$

$$t = \frac{20}{3}$$

これは $3 < t < \dfrac{48}{5}$ をみたすから

$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}},\ \dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{9}}\right)$

(5) $\mathrm{SP}+\mathrm{PQ}=20\div 2=10$ となればよいから

$$\left(\frac{4}{3}t-4\right)+\left(-\frac{5}{3}t+16\right)=10$$
$$-\frac{1}{3}t+12=10$$
$$t=6$$

これは $3<t<\dfrac{48}{5}$ をみたすから

P(6, 2)

【14】(1) P は $y=2x+4$ 上の点なので，P の y 座標は $y=2t+4$ $\cdots$ S の y 座標にもなる.

$\mathrm{QR}=\dfrac{3}{2}\mathrm{PQ}$ より，$\mathrm{QR}=\dfrac{3}{2}\times(2t+4)=3t+6$

$\therefore$ R の x 座標 $=t+3t+6=4t+6$ $\cdots$ S の x 座標

よって

$\boldsymbol{\mathrm{S}(4t+6,\ 2t+4)}$

(2) $\mathrm{PQ}=2t+4$，$\mathrm{QR}=3t+6$ より

$$\text{四角形 PQRS}=(2t+4)\times(3t+6)=150$$
$$2(t+2)\times 3(t+2)=150$$
$$6(t+2)^2=150$$
$$\therefore\quad (t+2)^2=25=5^2$$

ここで P の y 座標 $=2t+4>0$ なので，$t+2>0$

よって，$t+2=5$ $\qquad\therefore\quad t=3$

このとき S は

$x=4t+6=18$

$y=2t+4=10$

以上より

S(18, 10)

(3) S の座標は

$x=4t+6$ $\cdots$①

$y=2t+4$ $\cdots$②

ここから x と y のみの関係を導けばよい.

① より

$$t=\frac{x-6}{4}$$

② に代入して

$$y=2\times\frac{x-6}{4}+4=\frac{1}{2}x-3+4=\frac{1}{2}x+1$$

これが $\mathrm{S}(x,\ y)$ のみたす直線の式となる.

$$\therefore\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+1}$$

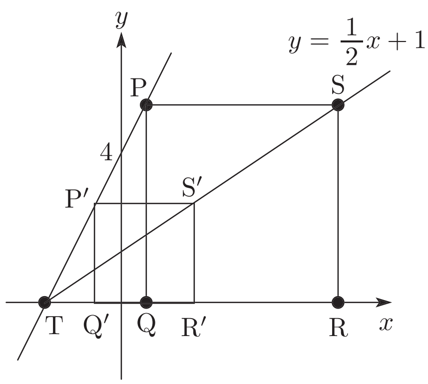
(4) $y=2x+4$ において，$y=0$ とすると

$x=-2$

$\therefore$ T$(-2,\ 0)$

よって T は (3) の直線上にある．

右の図のように記号を定めると



P′S′ // PS より

P′S′ : PS = TS′ : TS ⋯①

S′R′ // SR より

S′R′ : SR = TS′ : TS ⋯②

①，② より

P′S′ : PS = S′R′ : SR = R′Q′ : RQ = Q′P′ : QP

が常に成り立つ．これと対応する頂点を結ぶ直線 (PP′，SS′，RR′，QQ′) が 1 点 T を通っていることから，四角形 P′Q′R′S′ と 四角形 PQRS は相似であり かつ 相似の位置にあることが分かる．すなわち T はこれら四角形の**相似の中心**である．

【15】(1) 右の図より，直線 $y=ax+b$ の傾き a は，この直線が

① 2 点 A$(2,\ 3)$，D$(-1,\ -1)$ を通るとき最大

② 2 点 B$(2,\ 2)$，C$(-2,\ -1)$ を通るとき最小

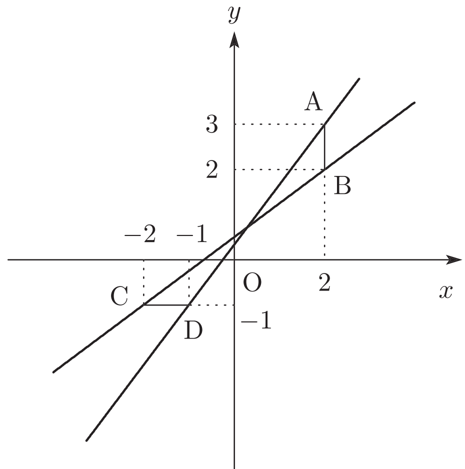
となり，この間のすべての値をとる．

よって，

①のとき，$a=\dfrac{3+1}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

②のとき，$a=\dfrac{2+1}{2+2}=\dfrac{3}{4}$

以上より，$\boldsymbol{\dfrac{3}{4} \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}}$

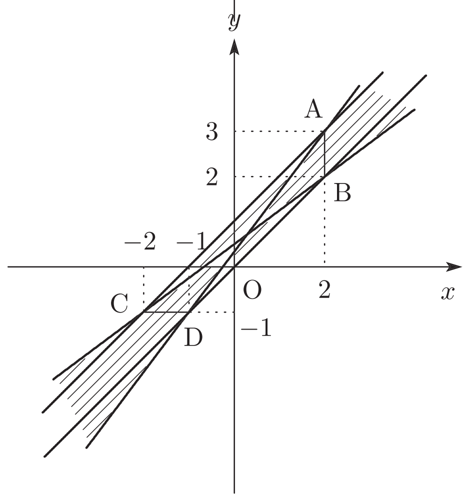


(2) $\dfrac{a}{2}+b$ は，$y=ax+b$ において，$x=\dfrac{1}{2}$ のときの y の値である．

線分 AB と線分 CD を通る直線 $y=ax+b$ のとりうる範囲は右図の斜線部分だから，$\dfrac{a}{2}+b$ の値は，$y=ax+b$ が，

① 2 点 A$(2,\ 3)$，C$(-2,\ -1)$ を通るとき最大

② 2 点 B$(2,\ 2)$，D$(-1,\ -1)$ を通るとき最小



となり，この間のすべての値をとる．よって，

① のとき，直線 AC は $y=x+1$ だから，これに $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，$y=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

② のとき，BD は $y=x$ だから，これに $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，$y=\dfrac{1}{2}$

以上より

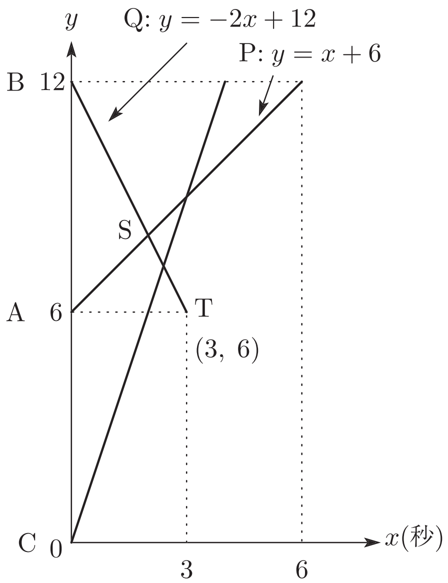
$$\boldsymbol{\frac{1}{2} \leqq \frac{a}{2}+b \leqq \frac{3}{2}}$$

【16】3 点が同時に出発してから x 秒後の，△ ABC の周上における C からの距離を y とする (A までの距離を 6，B までの距離を 12 とする)．このとき，P，Q，R の動きは

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: y=x+6 & (0 \leqq x \leqq 6) & \cdots① \\ \mathrm{Q}: y=-2x+12 & (0 \leqq x \leqq 3) & \cdots② \\ \mathrm{R}: y=ax & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{12}{a}\right) & \cdots③ \end{array}$$

と表される．

(1)



$a=3$ より，③ は

$y=3x \quad (0 \leqq x \leqq 4) \cdots ③'$

となるので，①，②，③$'$ をグラフに表すと上の図のようになる．よって，確かに点 R は点 Q に出会ってから，点 P に追いつく．

R が Q に出会うのは，② と ③$'$ より，x を求めて，

$-2x+12=3x$

$x=\dfrac{12}{5}$(秒後)

R が P に追いつくのは，① と ③$'$ より，x を求めて，

$x+6=3x$

$x=3$(秒後)

したがって，R が Q に出会ってから，P に追いつくまでの時間は，

$3-\frac{12}{5}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$**(秒)**

(2) Q が P とすれ違ってから A に着くまでの間に，R が Q とすれ違えばよい．

① と ② を解いて，交点 S の座標を求めると，

S(2, 8)

R の動きを表す直線は，点 C(0, 0) を通り，線分 ST(端点を除く) と交わればよい．

直線 CT: $y=2x$

直線 CS: $y=4x$

よって，R の速さ a の範囲は，

$\boldsymbol{2<a<4}$

【17】(1) P，Q が AB 間を走るのにかかる時間が同じであることに着目して，

$\frac{x}{90}+\frac{30-x}{60}=\frac{y}{40}+\frac{30-y}{120}$

これを整理して，

$\boldsymbol{y=-\frac{1}{3}x+15}$ $\cdots$①

(2) C と D が同じ地点より，

$x+y=30$ $\cdots$②

①，② を解くと，

$x=\frac{45}{2}$, $y=\frac{15}{2}$

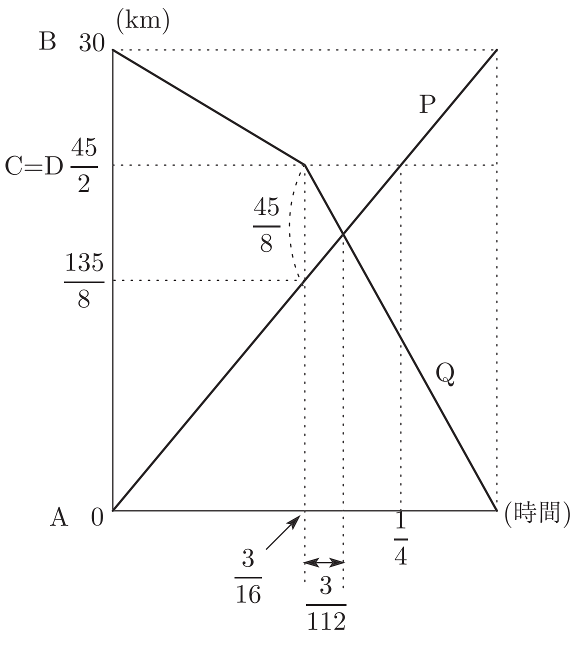
P が C 地点に到着するのは，

$\frac{45}{2}\div 90=\frac{1}{4}$(時間後)

Q が C(=D) 地点に到着するのは，

$\frac{15}{2}\div 40=\frac{3}{16}$(時間後)

よって，Q の方が早く C 地点に着くから，Q が C 地点に着いた後で，P と Q は出会う．



Q が C 地点を走っているときの P の位置は，A から，

$90\times\frac{3}{16}=\frac{135}{8}$(km)

このとき，P と Q の間の距離は，

$30-\left(\frac{15}{2}+\frac{135}{8}\right)=\frac{45}{8}$(km)

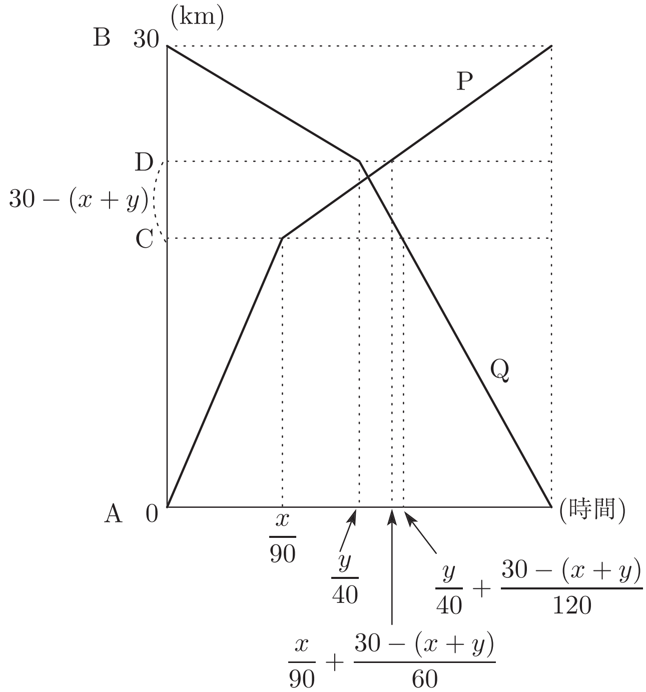
$\frac{45}{8}$km の距離を P と Q は時速 $(90+120)$km で近づくから，それから出会うまでの時間は，

$\frac{45}{8}\div(90+120)=\frac{3}{112}$(時間)

出会うまでに P が走った距離に着目して，

$90\times\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{112}\right)=\boldsymbol{\frac{135}{7}}$**(km)**

(3)



A 駅から地点 D までの距離を x で表すと,

$$30-y=30-\left(-\frac{1}{3}x+15\right)$$
$$=\frac{1}{3}x+15(\mathrm{km})$$

C と D の位置関係は，次の (i)，(ii) の 2 つの場合に分けられる.

(i) C の方が D よりも A に近い場合

$\left(\text{つまり，} x<\frac{1}{3}x+15 \text{ より，} x<\frac{45}{2}(\mathrm{km})\right)$

このとき，P と Q が C，D の間で出会う条件は,

① (P が C に着く時間)<(Q が C に着く時間)

② (P が D に着く時間)>(Q が D に着く時間)

の 2 つである.

① より,

$$\frac{x}{90}<\frac{y}{40}+\frac{30-(x+y)}{120}$$

整理して,

$$7x-6y<90$$

(1) より，$y=-\frac{1}{3}x+15$ を代入して,

$$7x-6\left(-\frac{1}{3}x+15\right)<90$$

よって，$x<20 \cdots ①'$

② より,

$$\frac{x}{90}+\frac{30-(x+y)}{60}>\frac{y}{40}$$

同様に解いて，$x > 15 \ \cdots ②'$

①'，②' より，

$15 < x < 20$

(ii) C よりも D の方が A に近い場合

$\left(\text{つまり，} x > \frac{1}{3}x + 15 \text{ より，} x > \frac{45}{2}(\mathrm{km})\right)$

このとき，P と Q が C，D の間で出会う条件は，

③ (P が C に着く時間)>(Q が C に着く時間)

④ (P が D に着く時間)<(Q が D に着く時間)

の 2 つである．

③ より，

$$\frac{x}{90} > \frac{30-x}{40}$$

整理して，$x > \frac{270}{13} \ \cdots ③'$

④ より，

$$\frac{30-y}{90} < \frac{y}{40}$$

$$y > \frac{120}{13}$$

$$-\frac{1}{3}x + 15 > \frac{120}{13}$$

$$x < \frac{225}{13} \ \cdots ④'$$

③'，④' より解なし．

すなわち，C よりも D が A に近い場合は，P と Q は C，D 間では出会わない．

(i)，(ii) より，$\boldsymbol{15 < x < 20}$

【18】(1) $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，②，③ より

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{2}X + a \ \cdots ②' \\ Y = X + \frac{1}{2}a + 1 \ \cdots ③' \end{cases}$$

よって，$③' \times 2 - ②'$ より

$$Y = \frac{5}{2}X + 2$$

P の座標 $(X,\ Y)$ について，a の値にかかわらず，$Y = \frac{5}{2}X + 2$ の関係が成り立つから，P は定直線 $y = \frac{5}{2}x + 2$ 上にあるといえる．

よって，$\boldsymbol{y = \frac{5}{2}x + 2}$

(2) $y = 2x$ と $y = \frac{5}{2}x + 2$ の交点が P だから

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{5}{2}x + 2 \end{cases}$$ を解いて，$x = -4$，$y = -8$

よって，$\mathbf{P(-4,\ -8)}$

2MJSS/2MJS/2MJ
中２選抜東大・医学部数学
中２数学
中２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	