2MJS/2MJ

夏期講習　確認テスト

解答

Ｚ会東大進学教室

中２数学

中２東大数学

【1】(1) ①
$$(2x-5)(3x+7)=2\times3\times x^2+\{2x\times7+(-5)\times3x\}+(-5\times7)$$
$$=\mathbf{6x^2-x-35}$$

②
$$(xy+3)(xy-2)=(xy)^2+\{xy\times(-2)+3\times xy\}+\{3\times(-2)\}$$
$$=\mathbf{x^2y^2+xy-6}$$

③
$$(a+b)^2(a-b)^2=\{(a+b)(a-b)\}^2$$
$$=(a^2-b^2)^2$$
$$=\mathbf{a^4-2a^2b^2+b^4}$$

④
$$(x+y-z)(x-y+z)-(x-y+z)(x+y+z)$$
$$=\{(x+y-z)-(x+y+z)\}(x-y+z)$$ ［共通因数をくくり出した］
$$=-2z(x-y+z)$$
$$=\mathbf{-2xz+2yz-2z^2}$$

＜別解＞
$$(x+y-z)(x-y+z)-(x-y+z)(x+y+z)$$
$$=\{x+(y-z)\}\{x-(y-z)\}-\{(x+z)-y\}\{(x+z)+y\}$$
$$=x^2-(y-z)^2-(x+z)^2+y^2$$
$$=x^2-y^2+2yz-z^2-x^2-2xz-z^2+y^2$$
$$=\mathbf{-2xz+2yz-2z^2}$$

(2) ①
$$6x^2-5x-6$$
$$=\mathbf{(2x-3)(3x+2)}$$

②
$$x^2+xy-12y^2$$
$$=\mathbf{(x+4y)(x-3y)}$$

③
$$27a^2-18ab+3b^2$$
$$=3(9a^2-6ab+b^2)$$
$$=\mathbf{3(3a-b)^2}$$

④
$$5a^2-45$$
$$=5(a^2-9)$$
$$=\mathbf{5(a+3)(a-3)}$$

⑤
$$x^2+xy+y-1$$
$$=(x+1)y+(x^2-1)$$
$$=(x+1)y+(x+1)(x-1)$$
$$=\mathbf{(x+1)(x+y-1)}$$

⑥
$$
\begin{aligned}
&2x^2-xy-6y^2+xz-2yz\\
=&(2x^2-xy-6y^2)+z(x-2y)\\
=&(x-2y)(2x+3y)+z(x-2y)\\
=&\boldsymbol{(x-2y)(2x+3y+z)}
\end{aligned}
$$

⑦
$$
\begin{aligned}
&(x^2+2x)^2+4(x^2+2x)+3 \quad [x^2+2x=A \text{ とおく}]\\
=&A^2+4A+3\\
=&(A+1)(A+3) \quad [A \text{ をもとにもどす}]\\
=&(x^2+2x+1)(x^2+2x+3)\\
=&\boldsymbol{(x+1)^2(x^2+2x+3)}
\end{aligned}
$$

【2】(1) △ABC と△DAC において

$\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{DCA}$ (共通)

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAC}$ (仮定より)

より，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC ∽ △DAC

相似な図形の対応する辺の長さの比は等しいので

BC : AC = AC : DC

∴ 10 : 8 = 8 : DC

∴ $\mathrm{CD}=\boldsymbol{\frac{32}{5}}$ (①の答)

これより

$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}-\mathrm{CD}=10-\frac{32}{5}=\frac{18}{5}$

したがって

$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\frac{18}{5}$

(∵ $\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DAB}$)

同様に

AB : BC = DA : AC

∴ AB : 10 = $\frac{18}{5}$: 8

∴ $\mathrm{AB}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$ (②の答)

(2) BF // EG より

CG : GF = CE : EB = x : 15

したがって，AF = FG より

CF : FA = $(x+15)$: 15

また，AD // FE より

CF : FA = CE : ED

∴ $(x+15)$: 15 = x : 6

∴ $x=\boldsymbol{10}$

(3) ① △APD∽△MPB で，相似比が 2 : 1 より

AP : MP = 2 : 1

したがって

$$\triangle \mathrm{ABP} : \triangle \mathrm{PBM} = \mathrm{AP} : \mathrm{PM} = \mathbf{2 : 1}$$

② $\triangle$ BCD において，中点連結定理より

$$\mathrm{MN} : \mathrm{BD} = 1 : 2$$

$$\therefore \quad \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{BD} \quad \cdots\cdots ㋐$$

また，BP : PD = BM : DA = 1 : 2，BQ : QD = AB : ND = 2 : 1 より

$$\mathrm{BP} = \frac{1}{3}\mathrm{BD} \qquad \mathrm{QD} = \frac{1}{3}\mathrm{BD}$$

$$\therefore \quad \mathrm{PQ} = \mathrm{BD} - \mathrm{BP} - \mathrm{QD} = \frac{1}{3}\mathrm{BD} \quad \cdots\cdots ㋑$$

㋐，㋑ より

$$\mathrm{PQ} : \mathrm{MN} = \frac{1}{3}\mathrm{BD} : \frac{1}{2}\mathrm{BD} = \mathbf{2 : 3}$$

③ $\triangle \mathrm{ABQ} \backsim \triangle \mathrm{NDQ}$ で，相似比が 2 : 1 より

$$\triangle \mathrm{ABQ} : \triangle \mathrm{NDQ} = 2^2 : 1^2$$

すなわち

$$\triangle \mathrm{ABQ} : \triangle \mathrm{DQN} = \mathbf{4 : 1}$$

④ $\triangle \mathrm{APQ} : \triangle \mathrm{AQD} = \mathrm{PQ} : \mathrm{QD} = 1 : 1$

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{APQ} = \triangle \mathrm{AQD} \quad \cdots\cdots ㋒$$

また

$$\triangle \mathrm{AQD} : \triangle \mathrm{DQN} = \mathrm{AQ} : \mathrm{QN} = \mathrm{AB} : \mathrm{DN} = 2 : 1$$

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{DQN} = \frac{1}{2}\triangle \mathrm{AQD} \quad \cdots\cdots ㋓$$

よって，㋒，㋓ より

$$\triangle \mathrm{APQ} : \triangle \mathrm{DQN} = \triangle \mathrm{AQD} : \frac{1}{2}\triangle \mathrm{AQD} = \mathbf{2 : 1}$$

【3】(1) 2 点 (4, 6)，(7, 0) を通るので，傾きは

$$\frac{0-6}{7-4} = -2$$

したがって，求める直線の式は

$$y = -2(x-7) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y = -2x + 14}$$

(2) AD $/\!/$ x 軸

より，$\triangle \mathrm{PAD} \backsim \triangle \mathrm{PEF}$ であり，その面積比が 1 : 4 より，相似比は 1 : 2 である．

したがって，A が PE の中点になればよいから，点 A の座標は

$$\left(\frac{-2+4}{2},\ \frac{0+6}{2}\right) = \mathbf{(1,\ 3)}$$

(3) 直線 ℓ は，2 点 (4, 6)，(−2, 0) を通るので，ℓ の式は

$$y = x + 2$$

したがって，点 B の x 座標を a とすると

$$\mathrm{A}(a,\ a+2)$$

よって，点 D の y 座標は $a+2$

D は直線 m 上の点であるから，その x 座標を求めると

$$a + 2 = -2x + 14 \qquad \therefore \quad x = \frac{12-a}{2}$$

ゆえに，AB = AD より

$$a + 2 = \frac{12-a}{2} - a \qquad \therefore \quad a = \frac{8}{5}$$

したがって，A の座標は

$$\left(\mathbf{\frac{8}{5}},\ \mathbf{\frac{18}{5}}\right)$$

【4】(1) A；$y=ax$ に $x=a$ を代入し，$y=a^2$ 　　$\therefore$ 　$\boldsymbol{A(a,\ a^2)}$

B；$y=ax$ に直交するので，m の式は $y=-\dfrac{1}{a}x$

$x=a$ を代入して $y=-1$ 　　$\therefore$ 　$\boldsymbol{B(a,\ -1)}$

(2) $\begin{cases} \angle\mathrm{CAO}=90^\circ-\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{COB} \\ \angle\mathrm{OCA}=\angle\mathrm{BCO}=90^\circ \end{cases}$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから，$\triangle\mathrm{OAC}\backsim\triangle\mathrm{BOC}$

$\therefore \mathrm{OA}:\mathrm{OB}=\mathrm{AC}:\mathrm{OC}=a^2:a=a:1$

$\therefore \mathrm{OA}:\mathrm{OB}=\boldsymbol{a:1}$

(3) $\triangle$ OAB の面積に注目すると

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OC}$

$\therefore \mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\mathrm{AB}\times\mathrm{OC}=(a^2+1)\times a=\boldsymbol{a(a^2+1)}$ 　（証明終）

(4) $\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=a:1$ より，$\mathrm{OA}=a\cdot\mathrm{OB}$

これを $\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=a(a^2+1)$ に代入すると

$a\times\mathrm{OB}\times\mathrm{OB}=a(a^2+1)$

$\therefore$ 　$\mathrm{OB}^2=a^2+1$

$\therefore$ 　$\mathrm{OA}^2=(a\cdot\mathrm{OB})^2=a^2\cdot\mathrm{OB}^2=a^2(a^2+1)$

$\therefore$ 　$\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=a^2(a^2+1)+(a^2+1)=(a^2+1)(a^2+1)=(a^2+1)^2$ $\cdots$①

一方，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}+\mathrm{CB}=a^2+1$ より，$\mathrm{AB}^2=(a^2+1)^2$ $\cdots$②

①，② より

$\boldsymbol{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2=\mathrm{AB}^2}$ 　（証明終）