本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２選抜東大数学

高２東大数学

問題

【1】(1) 7 個の黒球と 5 個の白球を横一列に並べる並べ方の総数は

$$\frac{12!}{7!5!} = 792\ (\text{通り})$$

白球が隣り合わない並べ方は，7 個の黒球の間または両端の 8 ヶ所のスペースに，5 個の白球を入れると考えて

$$_8C_5 = {}_8C_3 = 56\ (\text{通り})$$

であるから，求める確率は

$$\frac{56}{792} = \frac{7}{99} \qquad (\text{答})$$

(2) 横一列に並べたものの両端をつないで円状にするとき

○●●●○●○●○●●○

のような，両端に白球があるものは不適になる.

(1) の並べ方のうち，両端に白球があるものは，7 個の黒球の間の 6 ヶ所のスペースに残り 3 個の白球を入れると考えて

$$_6C_3 = 20\ (\text{通り})$$

であるから，求める確率は

$$\frac{56-20}{792} = \frac{1}{22} \qquad (\text{答})$$

【2】(1) 1 番目の i_1 と 2 番目の i_2 だけを考えれば十分で，そのとり方はそれぞれ $n,\ n-1$ 通りであるから，組のとり方は $n(n-1)$ 通りで，これらは同様に確からしい．$i_1+i_2=n$ となるのは

(i) n が奇数のとき

$$(1,\ n-1),\ (2,\ n-2),\ldots,\ (n-1,\ 1)$$

の $n-1$ 通り．

(ii) n が偶数のとき

$$(1,\ n-1),\ (2,\ n-2),\ldots,\ (n-1,\ 1)$$

から $\left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}\right)$ を除く $n-2$ 通り．

よって

$$P(A)=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n} & (n\text{ が奇数のとき})\\ \dfrac{n-2}{n(n-1)} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases} \qquad (答)$$

(2) $|i_1-i_2|=1$ となるのは $i_2=i_1\pm1$ のときであり，$A\cap B$ をみたす $(i_1,\ i_2)$ は

(i) n が奇数のとき

$$\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right),\ \left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)$$

の 2 通り．

(ii) n が偶数のとき，存在しない．

よって

$$P(A\cap B)=\begin{cases}\dfrac{2}{n(n-1)} & (n\text{ が奇数のとき})\\ 0 & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases} \qquad (答)$$

(3) $|i_1-i_2|=1$ すなわち $i_2=i_1\pm1$ をみたす $(i_1,\ i_2)$ は，n の偶奇にかかわらず

$$\begin{gathered}(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ldots,\ (n-1,\ n)\\ (2,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ldots,\ (n,\ n-1)\end{gathered}$$

の $2(n-1)$ 通り．ゆえに，$P(B)$ は

$$P(B)=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$$

よって

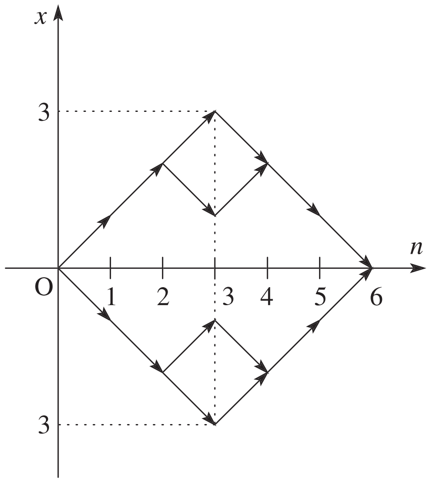
$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ &=\begin{cases}\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n(n-1)}=\dfrac{3n-5}{n(n-1)} & (n\text{ が奇数のとき})\\ \dfrac{n-2}{n(n-1)}+\dfrac{2}{n}-0=\dfrac{3n-4}{n(n-1)} & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}\end{aligned} \qquad (答)$$

【3】(1) 点 A が原点に戻るのは，表が 3 回，裏が 3 回出る場合だから

$$ {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{5}{16} \qquad \text{(答)} $$

(2) 回数を n として，nx 平面に移動の仕方を図示すると，図 11.1 のように 4 通りの経路がある．

図 11.1



よって，求める確率は

$$ 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{16} \qquad \text{(答)} $$

【4】(1) $2n$ 個の白玉と n 個の赤玉を横一列に並べる並べ方の総数は

$$\frac{(3n)!}{(2n)!n!} \text{ (通り)}$$

赤玉が隣り合わないのは，白玉 $2n$ 個の間または両端の $2n+1$ 個のスペースに赤玉を入れると考えて

$${}_{2n+1}\mathrm{C}_n = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \text{ (通り)}$$

あるから，求める確率は

$$\frac{\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}}{\dfrac{(3n)!}{(2n)!n!}} = \frac{(2n+1)!(2n)!}{(n+1)!(3n)!} \qquad \text{(答)}$$

(2) 横一列に並べたものの両端をつないで円形にするとき，両端が赤玉の場合は不適である．

(1) の並べ方のうち，赤玉が隣り合わず，両端が赤玉になるものは

$${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-2} = \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \text{ (通り)}$$

あるから，(1) の並べ方のうち，両端が赤玉でない並べ方は

$$\begin{aligned}
{}_{2n+1}\mathrm{C}_n - {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-2} &= \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} - \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!}\left\{\frac{(2n+1)(2n)}{n(n-1)} - 1\right\} \\
&= \frac{(2n-1)!}{(n+1)!(n-2)!} \cdot \frac{3(n+1)}{n-1} = \frac{3(2n-1)!}{n!(n-1)!}
\end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$\frac{\dfrac{3(2n-1)!}{n!(n-1)!}}{\dfrac{(3n)!}{(2n)!n!}} = \frac{3(2n-1)!(2n)!n!}{(3n)!n!(n-1)!} = \frac{(2n-1)!(2n)!}{(3n-1)!n!} \qquad \text{(答)}$$

【5】2 次方程式 $f(x) = x^2 + ax + 2a = 0$ の判別式を D とおくと

$$D = a^2 - 8a = a(a-8)$$

以下，a の値で場合分けして考える．

(i) $1 \leqq a < 8$ のとき

$D < 0$ であるから，すべての x に対して

$$f(x) > 0$$

よって，$f(x) \leqq 0$ となる確率を P_a とすると，このとき

$$P_a = 0$$

(ii) $a = 8$ のとき

$$S = \{x \mid x \text{ は } |x| \leqq 8 \text{ をみたす整数}\}$$

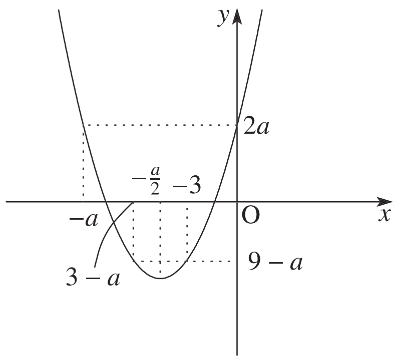
で，$f(x) \leqq 0$ となるのは $x = -4$ だけであるから

$$P_a = \frac{1}{17}$$

(iii) $a > 8$ のとき

$y = f(x)$ のグラフは直線 $x = -\dfrac{a}{2}$ を対称軸とする図 11.2 のような放物線である．

図 11.2



また

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(-a) = 2a > 0 \\
f(-1) &= f(-a+1) = 1 + a > 0 \\
f(-2) &= f(-a+2) = 4 > 0 \\
f(-3) &= f(-a+3) = 9 - a \leqq 0
\end{aligned}$$

よって，$f(x) \leqq 0$ となる x の値は

$$-a+3,\ -a+2, \ldots,\ -3$$

の $a-5$ 個であるから

$$P_a = \frac{a-5}{2a+1}$$

以上から，求める確率は

$$\begin{cases} 1 \leqq a < 8 \text{ のとき} & 0 \\ a = 8 \text{ のとき} & \dfrac{1}{17} \\ a > 8 \text{ のとき} & \dfrac{a-5}{2a+1} \end{cases} \quad \text{(答)}$$

添削課題

【1】$M_n - m_n \leqq 1$ となる確率を求める.

(i) $M_n - m_n = 0$ となるのは, n 個とも同じ目が出る場合を考えて

$$6 \cdot \frac{1^n}{6^n} = \frac{6}{6^n}$$

(ii) $M_n - m_n = 1$ となるのは, n 個とも k か $k+1$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の目が出る場合

$$2^n \text{ (通り)}$$

のうち n 個とも k の目, $k+1$ の目が出る場合を除いて

$$2^n - 2 \text{ (通り)}$$

なので, このときの確率は

$$\frac{5(2^n - 2)}{6^n}$$

(i), (ii) より, 求める確率は

$$1 - \frac{6}{6^n} - \frac{5(2^n - 2)}{6^n} = \frac{6^n - 5 \cdot 2^n + 4}{6^n} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 360 を素因数分解すると

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

となる．ここで，360 の正の約数は

$$360 = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ m = 0,\ 1) \qquad \cdots\cdots(*)$$

と表せるから，360 の正の約数の総数は

$$4 \times 3 \times 2 = 24\ (\text{個}) \qquad (\text{答})$$

(2) 次の式

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$$

を展開すれば，$(*)$ で得られる約数が 1 回ずつすべて現れるから，求める約数の総和は

$$\begin{aligned} &(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1) \\ &= (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5) \\ &= 15 \times 13 \times 6 = 1170 \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 360 の正の約数を小さい順に

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{24}$$

とおく．このとき

$$a_1 \cdot a_{24} = 360,\ a_2 \cdot a_{23} = 360, \ldots,\ a_{12} \cdot a_{13} = 360$$

であるから，これら 12 個の組をすべてかけあわせると

$$(a_1 \cdot a_{24}) \times (a_2 \cdot a_{23}) \times \cdots \times (a_{12} \cdot a_{13}) = 360^{12}$$

よって，求める値は

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{24} = 360^{12} \qquad (\text{答})$$

【2】(1) 与式の両辺に $2ab\ (\neq 0)$ をかけて

$$2a + 2b = ab$$
$$ab - 2a - 2b = 0$$
$$(a-2)(b-2) = 4$$

ここで，$a,\ b$ は正整数より $a - 2 \geqq -1,\ b - 2 \geqq -1$ であるから

$$(a-2,\ b-2) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$$
$$\therefore\quad (a,\ b) = (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3) \qquad \text{(答)}$$

(2) $a \leqq b \leqq c$ と仮定すると

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{3}{a}$$

より

$$a \leqq 3$$
$$\therefore\quad a = 1,\ 2,\ 3 \quad (\because\ a \text{ は正整数})$$

(i) $a = 1$ のとき

$$(\text{与式}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

となり不適.

(ii) $a = 2$ のとき

$$(\text{与式}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

となるから，(1) の結果を利用して

$$(b,\ c) = (3,\ 6),\ (4,\ 4)$$

(iii) $a = 3$ のとき

$$(\text{与式}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$$

となるが，このとき

$$3 \leqq b \leqq c$$

より

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

だから

$$(b,\ c) = (3,\ 3)$$

に限る.

以上より，求める $a,\ b,\ c\ (a \leqq b \leqq c)$ の組は

$$(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$$

となる．対称性より，求める $a,\ b,\ c$ の組は

$$(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),$$
$$(6,\ 3,\ 2),\ (2,\ 4,\ 4),\ (4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$$

である.　　(答)

【3】与式の左辺を因数分解し，右辺を素因数分解すると

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$65 = 5 \cdot 13$$

であるから，まず，$a-b$, a^2+ab+b^2 の値の組を考える．

ここで，$a^3-b^3>0$ であり

$$a^2+ab+b^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geqq 0$$

であるから，$a-b>0$ である．また

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)-(a-b) &= a^2+(b-1)a+b^2+b \\ &= \left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(b+1)^2 - 1 \\ &\geqq -1\end{aligned}$$

であるから

$$(a-b,\ a^2+ab+b^2) = (1,\ 65),\ (5,\ 13)$$

の場合を考えれば十分．

ここで

$$a^2+ab+b^2 = (a-b)^2+3ab$$

であるから

$$(a-b,\ 3ab) = (1,\ 64),\ (5,\ -12)$$

ab は整数であるから，$(a-b,\ 3ab) = (1,\ 64)$ は不適であり

$$(a-b,\ ab) = (5,\ -4)$$
$$\therefore\quad (a-b,\ -ab) = (5,\ 4)$$

である．このとき，a, $-b$ は方程式

$$t^2-5t+4=0 \iff (t-1)(t-4)=0$$

の 2 解であるから，求める a, b の値は

$$(a,\ b) = (1,\ -4),\ (4,\ -1) \qquad (\text{答})$$

【4】対称性より，$a \geqq c$ について考えれば十分なので，以下 $a \geqq c$ とする．

3 角形 ABC について，余弦定理より

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - ac \\
b^2 &= (a-c)^2 + ac \\
b^2 - (a-c)^2 &= ac \\
(b+a-c)(b-a+c) &= ac
\end{aligned}$$

$a \geqq c$ より $b+a-c \geqq b-a+c$，3 角形の成立条件より $b-a+c>0$．また，a と c は素数だから

$$(b+a-c,\ b-a+c) = (a,\ c),\ (ac,\ 1)$$

(i) $(b+a-c,\ b-a+c) = (a,\ c)$ のとき

$$b-c=0,\ b-a=0 \qquad \therefore \quad a=b=c$$

(ii) $(b+a-c,\ b-a+c) = (ac,\ 1)$ のとき

$$\begin{cases} b+a-c = ac & \cdots ① \\ b-a+c = 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$\begin{aligned}
2a-2c &= ac-1 \\
ac-2a+2c &= 1 \\
(a+2)(c-2) &= -3
\end{aligned}$$

ここで，$a,\ c$ は素数より

$$a \geqq 2,\ c \geqq 2 \qquad \therefore \quad (a+2)(c-2) \geqq 0$$

だから，このとき題意をみたす $a,\ b,\ c$ は存在しない．

以上より，題意をみたす 3 角形 ABC は $a=b=c$ をみたす 3 角形，すなわち正 3 角形に限る．

〔証明終〕

【5】(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ をみたす整数 r が存在するとき，明らかに $r>0$ で

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r} \iff pq=r(p+q)$$

より，r は pq の正の約数である．$p,\ q$ は異なる素数であるから

$$r=1,\ p,\ q,\ pq$$

となる．各場合について

$$\begin{cases} r=1 \text{ のとき} \quad 2 \leqq p<q \text{ より，} 1=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}<\dfrac{2}{p} \leqq 1 \\ r=p \text{ のとき} \quad q=p+q \iff p=0 \\ r=q \text{ のとき} \quad p=p+q \iff q=0 \\ r=pq \text{ のとき} \quad p+q=1 \end{cases}$$

であるから，いずれも成り立たない．すなわち，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ をみたす整数 r は存在しない．

〔証明終〕

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ をみたす整数 r が存在するとき，明らかに $r>0$ で

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{r} \iff pq=r(q-p)$$

より，(1) と同様にして

$$r=1,\ p,\ q,\ pq$$

となる．はじめの 3 つの場合について

$$\begin{cases} r=1 \text{ のとき} \quad q<pq=q-p<q \\ r=p \text{ のとき} \quad q=q-p \iff p=0 \\ r=q \text{ のとき} \quad p=q-p \iff q=2p \end{cases}$$

であるから，これらは成り立たない．

$$r=pq \text{ のとき} \quad q-p=1$$

であるが，$q-p=1$ をみたす素数 $p,\ q$ は $p=2,\ q=3$ だけである．

逆に，$p=2,\ q=3$ のとき，$r=6$ とすれば $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ が成り立つ．

以上より，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ をみたす整数 r が存在するのは $p=2,\ q=3$ のときに限る．

〔証明終〕

添削課題

【1】(1) 与式を変形すると

$$xy - 2x - 3y + 6 = 6$$
$$(x-3)(y-2) = 6$$

6 の約数は $\pm1, \pm2,\ \pm3,\ \pm6$ であり

$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ より $x - 3 \geqq -2,\ y - 2 \geqq -1$ に注意して

$$(x-3,\ y-2) = (1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)$$
$$\therefore \quad (x,\ y) = (4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3) \qquad \text{(答)}$$

(2) 与方程式

$$5x^2 - 2(6y+3)x + 10y^2 - 4y + 13 = 0 \cdots ①$$

を x についての 2 次方程式とみて，判別式を D とすると，整数解 x をもつので

$$\frac{D}{4} = (6y+3)^2 - 5(10y^2 - 4y + 13) \geqq 0$$
$$-14(y-2)^2 \geqq 0$$
$$\therefore \quad y = 2$$

①より

$$5x^2 - 30x + 45 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$\therefore \quad x = 3$$

よって

$$(x,\ y) = (3,\ 2) \qquad \text{(答)}$$

(3) m を正整数として

$$\sqrt{n^2 + 15} = m$$

とおける．辺々正より 2 乗して

$$n^2 + 15 = m^2$$
$$m^2 - n^2 = 15$$
$$(m+n)(m-n) = 15$$

15 の約数は 1, 3, 5, 15 であり，$m+n > 0,\ n > 0$ より $m+n > m-n \geqq 0$ であるから

$$(m+n,\ m-n) = (5,\ 3),\ (15,\ 1)$$
$$(m,\ n) = (4,\ 1),\ (8,\ 7)$$
$$\therefore \quad n = 1,\ 7 \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) n は奇数より，$n = 2k + 1$ とおく.

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= (2k+1+1)(2k+1-1) \\ &= 4k(k+1) \end{aligned}$$

ここで，$k(k+1)$ は連続した 2 整数の積なので，偶数だから，$4k(k+1)$ は 8 の倍数である.

すなわち，$n^2 - 1$ は 8 の倍数である.　　　〔証明終〕

(2) 与式を因数分解すると

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \ \cdots\cdots ① \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2+1) \end{aligned}$$

ここで，$(n-1)n(n+1)$ は連続した 3 整数の積なので，3 の倍数だから，$n^5 - n$ は 3 の倍数である.　　　〔証明終〕

(3) $f(n) = n^5 - n$ とおく．①より，$f(n)$ は $n^2 - 1$ を因数にもち，(1) の結果から

$$f(n) \text{ は 8 の倍数} \ \cdots\cdots ②$$

であり，また，(2) の結果より

$$f(n) \text{ は 3 の倍数} \ \cdots\cdots ③$$

である．②，③および 3 と 8 は互いに素であることから

$$f(n) \text{ は 24 の倍数}$$

すなわち，$f(n)$ が 5 の倍数であることを示せば，24 と 5 が互いに素であることから，$f(n)$ が 120 の倍数であるといえる．以下，$f(n)$ が 5 の倍数であることを示す.

l を整数として，n について 5 の剰余で場合を分けると

(i) $n = 5l$ のとき

n が 5 の倍数であるので，$f(n)$ は 5 の倍数.

(ii) $n = 5l \pm 1$ のとき

$n^2 - 1 = 25l^2 \pm 10l$ が 5 の倍数であるので，$f(n)$ は 5 の倍数.

(iii) $n = 5l \pm 2$ のとき

$n^2 + 1 = 25l^2 \pm 20l + 5$ が 5 の倍数であるので，$f(n)$ は 5 の倍数.

よって，任意の自然数 n について，$f(n)$ は 5 の倍数.

以上から，$f(n)$ は 120 の倍数である.　　　〔証明終〕

【2】求める自然数を N $(10 \leqq N \leqq 99)$ とおく．条件より

$$\begin{aligned} &N^2 \text{と} N \text{の下 2 桁の数が等しい} \\ \iff \quad &N^2 - N \text{が 100 で割り切れる} \end{aligned}$$

となるから，以下 $N^2 - N = N(N-1)$ が 100 で割り切れる条件を求める．ここで

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

であるが，N, $N-1$ は連続する整数であるからともに 5 で割り切れるということはなく，さらに，ともに 2 で割り切れるということもない．
よって，N, $N-1$ のどちらかは 25 で割り切れ，どちらかは 4 で割り切れる．
ここで，N または $N-1$ が 25 で割り切れる

$$N = 25,\ 26,\ 50,\ 51,\ 75,\ 76$$

の各場合をそれぞれ考えて，求める N の値は

$$25,\ 76 \qquad \text{(答)}$$

【3】p 個の整数

$$n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots,\ pn$$

を p で割った余りがそれぞれ互いに異なることを示せば題意の成立がいえる．
ここで

$$n,\ 2n,\ 3n,\ \ldots,\ pn$$

を p で割った余りに，等しい 2 数の組があるとし，その組を

$$kn,\ ln \quad (k,\ l \text{ は整数で，} 1 \leqq k < l \leqq p)$$

とおく．このとき，kn, ln を p で割った余りが等しいから

$$ln - kn = (l-k)n \text{ が } p \text{ で割り切れる．}$$

さらに，$p > n$ かつ p は素数だから

$$l - k \text{ が } p \text{ で割り切れる．}$$

しかし，$1 \leqq k < l \leqq p$ であるから

$$1 \leqq l - k \leqq p - 1$$

となり，$l-k$ は p で割り切れない．
以上から，結論は正しい．　　〔証明終〕

【4】(1) k を整数として，$a=5k$ または $5k\pm1$ または $5k\pm2$ と分類できる．そこで，各場合について a^2 を 5 で割った余りを求める．

(i) $a=5k$ のとき

$$a^2=(5k)^2=5\cdot5k^2$$

より，5 で割った余りは 0 である．

(ii) $a=5k\pm1$ のとき

$$a^2=(5k\pm1)^2=25k^2\pm10k+1=5(5k^2\pm2k)+1$$

より，5 で割った余りは 1 である．

(iii) $a=5k\pm2$ のとき

$$a^2=(5k\pm2)^2=25k^2\pm20k+4=5(5k^2\pm4k)+4$$

より，5 で割った余りは 4 である．

以上より，a^2 を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかである．　〔証明終〕

(2) a^2+3b^2 が 5 の倍数で，a, b の少なくとも一方が 5 の倍数でないと仮定する．このとき

$$a^2+3b^2=5l\ (l\text{ は整数})$$

であり，

(i) a が 5 の倍数でないとき，(1) より a^2 を 5 で割った余りは 1 または 4 だから，m を整数として

$$3b^2=5l-(5m+1)=5(l-m-1)+4$$
または
$$3b^2=5l-(5m+4)=5(l-m-1)+1$$

と表せる．しかし，(1) より n を整数として

$$3b^2=\begin{cases}3(5n)=5\cdot3n\\3(5n+1)=5\cdot3n+3\\3(5n+4)=5(3n+2)+2\end{cases}$$

となるから，矛盾である．

(ii) a が 5 の倍数のとき，(1) より a^2 も 5 の倍数だから，m を整数として

$$3b^2=5l-5m=5(l-m)$$

このとき，b が 5 の倍数でないから，(1) より n を整数として

$$3b^2=\begin{cases}3(5n+1)=5\cdot3n+3\\3(5n+4)=5(3n+2)+2\end{cases}$$

であり，矛盾である．

したがって，a, b はともに 5 の倍数である．　〔証明終〕

(3) a, b, c, d のうち少なくとも 1 つは 0 でないものが存在すると仮定する．
0 はすべての整数を約数としてもつから，この 4 つの数の最大公約数を g とすると

$$a = ga_0,\ b = gb_0,\ c = gc_0,\ d = gd_0$$

と表せる．ただし，a_0, b_0, c_0, d_0 の最大公約数は 1 である．

$$a^2 - 5b^2 + 3c^2 - 15d^2 = 0$$

に代入すると

$$g^2({a_0}^2 - 5{b_0}^2 + 3{c_0}^2 - 15{d_0}^2) = 0$$

$$\therefore\quad a_0^2 + 3{c_0}^2 = 5({b_0}^2 + 3{d_0}^2)$$

すなわち，$a_0^2 + 3{c_0}^2$ が 5 の倍数となるから，(2) より a_0, c_0 はともに 5 の倍数である．よって

$$a_0 = 5a_1,\ c_0 = 5c_1\ (a_1,\ c_1 \text{は整数})$$

とおいて，上の式に代入すれば

$$25{a_1}^2 + 75{c_1}^2 = 5({b_0}^2 + 3{d_0}^2)$$

$$\therefore\quad {b_0}^2 + 3{d_0}^2 = 5({a_1}^2 + 3{c_1}^2)$$

となり，上と同様にして b_0, d_0 はともに 5 の倍数であるが，これは a_0, b_0, c_0, d_0 の最大公約数が 1 であることに反する．
したがって，$a = b = c = d = 0$ となる．　〔証明終〕

【5】(1) $0 < \dfrac{2}{y} + \dfrac{3}{z} = 1 - \dfrac{1}{x},\ 1 \leqq x \leqq 3$ より

$$x = 2,\ 3$$

(i) $x = 2$ のとき

$$\frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad (y-4)(z-6) = 24$$

$3 \leqq y \leqq 6$ より，$-1 \leqq y - 4 \leqq 2$ であるから

$$(y-4,\ z-6) = (-1,\ -24),\ (1,\ 24),\ (2,\ 12)$$

$$\therefore\quad (y,\ z) = (3,\ -18),\ (5,\ 30),\ (6,\ 18)$$

これらはいずれも $6 \leqq z \leqq 9$ を満たさないので不適.

(ii) $x=3$ のとき

$$\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad (y-3)(2z-9)=27$$

$3 \leqq y \leqq 6$ より，$0 \leqq y-3 \leqq 3$ で，$2z-9$ は奇数であるから，$y-3$ も奇数で

$$(y-3,\ 2z-9)=(1,\ 27),\ (3,\ 9)$$

$$\therefore \quad (y,\ z)=(4,\ 18),\ (6,\ 9)$$

$6 \leqq z \leqq 9$ より

$$(y,\ z)=(6,\ 9)$$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(3,\ 6,\ 9)} \quad \textbf{(答)}$$

(2) $4 \leqq x \leqq y \leqq z$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{3}{x} \geqq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x=4,\ 5,\ 6$$

(i) $x=4$ のとき

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad (y-4)(z-4)=16$$

$4 \leqq y \leqq z$ より，$0 \leqq y-4 \leqq z-4$ であるから

$$(y-4,\ z-4)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4)$$

$$\therefore \quad (y,\ z)=(5,\ 20),\ (6,\ 12),\ (8,\ 8)$$

(ii) $x=5$ のとき

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore \quad (3y-10)(3z-10)=100$$

$5 \leqq y \leqq z$ より，$5 \leqq 3y-10 \leqq 3z-10$ であるから

$$(3y-10,\ 3z-10)=(5,\ 20),\ (10,\ 10)$$

$$\therefore \quad (y,\ z)=(5,\ 10),\ \left(\frac{20}{3},\ \frac{20}{3}\right)$$

y, z は整数なので

$$(y,\ z)=(5,\ 10)$$

(iii) $x = 6$ のとき

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad (y-3)(z-3) = 9$$

$6 \leqq y \leqq z$ より，$3 \leqq y-3 \leqq z-3$ であるから

$$(y-3,\ z-3) = (3,\ 3)$$

$$\therefore \quad (y,\ z) = (6,\ 6)$$

(i) ～ (iii) より

$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (4,\ 5,\ 20),\ (4,\ 6,\ 12),\ (4,\ 8,\ 8),\ (5,\ 5,\ 10),\ (6,\ 6,\ 6)}$ **(答)**

【6】(1) $1F7B_{(16)}$

$= 1 \times 16^3 + 15 \times 16^2 + 7 \times 16 + 11$

$= \mathbf{8059}$

(2)

$$\begin{array}{rrl} 16) & \underline{1000} & \\ 16) & \underline{62} & \cdots 8 \\ & 3 & \cdots E \end{array}$$

よって　$\mathbf{3E8_{(16)}}$

(3)

$$\begin{array}{r} 24BD_{(16)} \\ +)\ A1E6_{(16)} \\ \hline C6A3_{(16)} \end{array}$$

よって　$\mathbf{C6A3_{(16)}}$

添削課題

【1】a, b, c がいずれも 3 の倍数でないとすると，整数 l, m, n により

$$a = 3l \pm 1,\ b = 3m \pm 1,\ c = 3n \pm 1 \quad (\text{複号任意})$$

と表せて，このとき

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= (3l \pm 1)^2 + (3m \pm 1)^2 - (3n \pm 1)^2 \\ &= 3(3l^2 + 3m^2 - 3n^2 \pm 2l \pm 2m \mp 2n) + 1 \end{aligned}$$

これは 3 で割って 1 余る整数だから，$a^2 + b^2 - c^2 = 0$ に反する．したがって，a, b, c の少なくとも 1 つは 3 の倍数である．　　〔証明終〕

【2】n を 3 で割った余りで分類すると

(i) $n = 3k$ $(k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ のとき

n は 3 の倍数であるので，$k = 1$ のとき，$n = 3$ と $n^2 + 2 = 11$ はともに素数となり，$k \geqq 2$ のとき，n は合成数となる.

(ii) $n = 3k + 1$ $(k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= (3k + 1)^2 + 2 \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

ここで

$$3k^2 + 2k + 1 \geqq 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 6$$

より，$n^2 + 2$ は合成数となる.

(iii) $n = 3k - 1$ $(k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= (3k - 1)^2 + 2 \\ &= 3(3k^2 - 2k + 1) \end{aligned}$$

ここで

$$3k^2 - 2k + 1 \geqq 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

より，$n^2 + 2$ は合成数となる.

以上より，2 以上のすべての自然数 n について，n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限る.　　〔証明終〕

M2JS/M2J
高２選抜東大数学
高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	