P2J

本科 1 期 7 月度

解答

Z会東大進学教室

高 2 東大物理

１１章　単振動（３）

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) それぞれの場合の運動方程式は，

$$\begin{cases}\text{図 1 の場合}\cdots ma=-mg \qquad \therefore \quad a=-g \\ \text{図 2 の場合}\cdots ma=-ky-mg \quad \cdots(*)\end{cases}$$

(2) 振動の中心位置を $y=y_0$ とすると，この位置では $a=0$ なので，

$$m\cdot 0=-ky_0-mg \qquad \therefore \quad y_0=-\frac{mg}{k}$$

y_0 を用いて $(*)$ を書き換えると，

$$ma=ky_0-ky \qquad \therefore \quad a=-\frac{k}{m}(y-y_0)$$

$y-y_0=X$ とおくと $a=-\dfrac{k}{m}X$ となるので，図 2 の場合の運動は単振動と分かり，角振動数を ω，周期を T とすると

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) 図 1 の場合は，$v-t$ グラフと t 軸の間の面積より，

$$y=-\frac{1}{2}gt^2$$

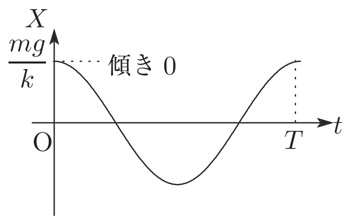


図 2 の場合は，初期条件をふまえると $X-t$ グラフは右図のようになり，つり合いの位置からのずれが $X=\dfrac{mg}{k}\cos(\omega t)$ と表せるので，

$$y-y_0=\frac{mg}{k}\cos(\omega t) \qquad \therefore \quad y=-\frac{mg}{k}+\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

【2】

《解答》

(ア) つり合いの位置を $x = x_1$ とすると，

$$0 = mg - kx_1 \qquad \therefore \quad x_1 = \frac{mg}{k}$$

(イ) (ア) をふまえると，

$$mg \cdot (-x_1) + \frac{1}{2}k{x_1}^2 = -\frac{(mg)^2}{2k}$$

(ウ) 位置 x における運動方程式は，

$$\begin{cases} 2m \cdot a = 2mg - N & \cdots ① \\ m \cdot a = mg + N - kx & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より，

$$3ma = 3mg - kx \quad \cdots (*)$$

振動の中心位置を $x = x_2$ とすると，この位置では $a = 0$ なので，

$$3mg - kx_2 = 0 \qquad \therefore \quad x_2 = \frac{3mg}{k}$$

(エ) x_2 を用いて $(*)$ を書き換えると，

$$3ma = kx_2 - kx \qquad \therefore \quad a = -\frac{k}{3m}(x - x_2)$$

$x - x_2 = X$ とおくと，$a = -\dfrac{k}{3m}X$ となるので，運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数}\ \omega = \sqrt{\frac{k}{3m}} \qquad \therefore \quad \text{周期}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

(オ) $2mg - N$

(カ) $mg + N - kx$

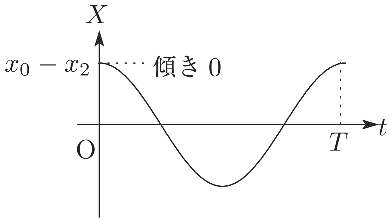
(キ) ① − ② × 2 より，

$$0 = -N - 2(N - kx) \qquad \therefore \quad N = \frac{2}{3}kx$$

おもりが板から離れる位置を $x = x_3$ とすると，この位置では $N = 0$ なので，

$$\frac{2}{3}kx_3 = 0 \qquad \therefore \quad x_3 = 0$$

(ク) 初期条件をふまえると，$X-t$ グラフは右図で表され，つり合いの位置からのずれは $X=(x_0-x_2)\cos(\omega t)$ と表せるので，



$$x - x_2 = (x_0 - x_2)\cos(\omega t)$$

$$\therefore \quad x = x_2 + (x_0 - x_2)\cos(\omega t)$$

(キ) より，おもりが板から離れないための条件が $x_{\min} \geqq 0$ なので，離れるための条件は形式上 $x_{\min} < 0$ として得られ，

$$\frac{3mg}{k} + \left(x_0 - \frac{3mg}{k}\right)\cdot(-1) < 0 \qquad \therefore \quad x_0 > \frac{6mg}{k}$$

【3】

《解答》

(a) 鉛直方向の力のつり合いより，垂直抗力 N は $N=mg$ と分かる．よって，滑り出すための条件は，

$$ka > \mu mg \qquad \therefore \quad a > \frac{\mu mg}{k}$$

(b) 小物体が左へ滑っているとき，ばねの伸びが x の位置における加速度の x 成分を α とすると，x 方向の運動方程式は，

$$m\alpha = -kx + \mu' \cdot mg \quad \cdots (*)$$

振動の中心位置を $x=x_0$ とすると，この位置では $\alpha=0$ なので，

$$m \cdot 0 = -kx_0 + \mu' mg \qquad \therefore \quad x_0 = \frac{\mu' mg}{k}$$

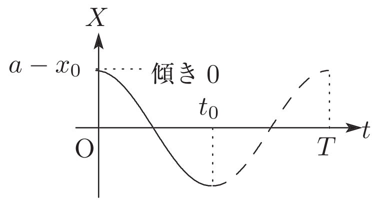
x_0 を用いて $(*)$ を書き換えると，

$$m\alpha = -kx + kx_0 \qquad \therefore \quad \alpha = -\frac{k}{m}(x-x_0)$$

$x - x_0 = X$ とおくと $\alpha = -\dfrac{k}{m}X$ となるので，運動は単振動と分かり，

$$角振動数\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad 周期\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

初期条件をふまえると，$X-t$ グラフは右下図のようになり，つり合いの位置からのずれは $X=(a-x_0)\cos(\omega t)$ と表せるので，



$$x - x_0 = (a-x_0)\cos(\omega t)$$

$$\therefore \quad x = x_0 + (a-x_0)\cos(\omega t)$$

以上より，左端の位置は，

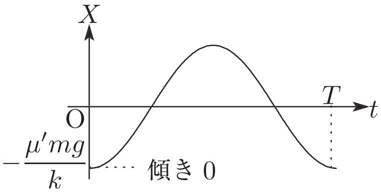
$$x_{\min} = \frac{\mu' mg}{k} + \left(a - \frac{\mu' mg}{k}\right)\cdot(-1) = \frac{2\mu' mg}{k} - a$$

(c) 求める時間を t_0 とおくと，

$$t_0 = \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(d) 小物体は常に左向きに滑った状態にあるので，小物体の速度が右向きのときも運動方程式は (∗) で表され，周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ と分かる．

(b) のときと同様に初期条件をふまえると，$X-t$ グラフは右図のようになるので，



$$X = -\frac{\mu' mg}{k}\cos(\omega t) \qquad \therefore \quad (\text{振幅}) = \frac{\mu' mg}{k}$$

(e) 変位の符号に注意すると，

$$\begin{cases} \text{右向きに移動する間の仕事} \cdots \mu' mg \times \dfrac{2\mu' mg}{k} = \dfrac{2(\mu' mg)^2}{k} \\ \text{左向きに移動する間の仕事} \cdots \mu' mg \times \left(-\dfrac{2\mu' mg}{k}\right) = -\dfrac{2(\mu' mg)^2}{k} \end{cases}$$

【4】

《解答》

I (1) $\beta = \alpha \sin\theta \quad \cdots①$

(2) $m\alpha = -kl\sin\theta \quad \cdots②$

II (1) 斜面から受ける垂直抗力を N として，斜面に垂直方向の力のつり合いより，

$$N - kl\cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad N = kl\cos\theta$$

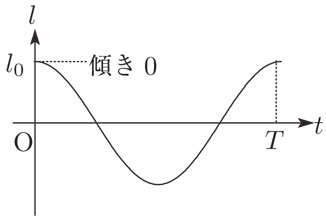
$l = l_1$ のとき，$N = 0$ となるので，

$$kl_1\cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad l_1 = 0$$

(2) ①，② より，α を消去すると，l 方向の運動について，

$$m \cdot \frac{\beta}{\sin\theta} = -kl\sin\theta \qquad \therefore \quad \beta = -\frac{k\sin^2\theta}{m}l$$

運動は単振動と分かり，



$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k\sin^2\theta}{m}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\sin\theta}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

初期条件をふまえると，$l-t$ グラフは右図のようになるので，

$$t_1 = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2\sin\theta}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

III 小球が斜面から離れた後における加速度の l 方向成分を β' とすると，運動方程式は，

$$m\beta' = -kl \qquad \therefore \quad \beta' = -\frac{k}{m}l$$

運動は単振動と分かり，

$$\text{角振動数 } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad \text{周期 } T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

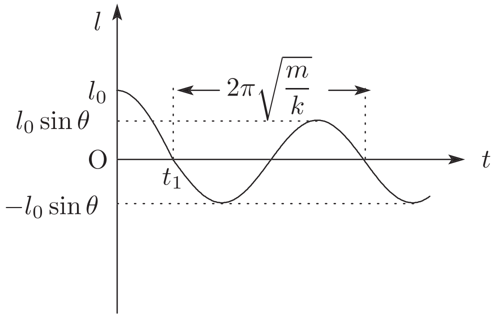
また，小球が斜面から離れるときの速さを v_1 として，力学的エネルギーの保存より，

$$0 + \frac{1}{2}k{l_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + 0 \qquad \therefore \quad v_1 = l_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

小球が斜面から離れた後では水平方向で力が作用しないので，速度の水平成分は変化せず $v_1\cos\theta$ と表せる．さらに小球が斜面から離れた後の単振動の振幅を A とすると，力学的エネルギーの保存より，

$$0 + \frac{1}{2}k{l_0}^2 = \frac{1}{2}m\left(l_0\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}kA^2 \qquad \therefore \quad A = l_0\sin\theta$$

以上より，小球の位置 l の時間変化を表すグラフは下図のようになる．



１２章　力積と運動量

問題

■演習

【1】

《解答》

(ア) $m_1 v$

(イ) $0 - m_1 v = -F_1 \Delta T_1$

(ウ) 与えられた数値を (イ) に代入すると，

$$-5.0 \times 10 = -F_1 \times 0.025 \qquad \therefore \quad F_1 = 2.0 \times 10^3 \ \mathrm{N}$$

(エ) $\dfrac{2.0 \times 10^3 \ \mathrm{N}}{5.0 \times 10^{-4} \ \mathrm{m}^2} = 4.0 \times 10^6 \ \mathrm{N/m^2}$

(オ) 求める質量を M とすると，

$$M \cdot 10 = 4.0 \times 10^6 \qquad \therefore \quad M = 4.0 \times 10^5 \ \mathrm{kg}$$

(カ) (イ) と同様に立式して，与えられた数値を代入すると，

$$-70 \times 10 = -F_2 \times 0.50 \qquad \therefore \quad F_2 = 1.4 \times 10^3 \ \mathrm{N}$$

(a) 力の作用する時間が長いから

(キ)

$$\frac{1.4 \times 10^3 \ \mathrm{N}}{0.10 \ \mathrm{m}^2} = 1.4 \times 10^4 \ \mathrm{N/m^2}$$

(b) 作用する力の大きさを小さくすること及び力を受ける面積を大きくすること．

【2】

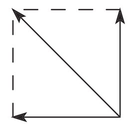
《解答》

(1) x 軸方向の正の向きに大きさ mv_0

(2) y 軸方向の正の向きに大きさ mv_0

(3) 求める力積の x 成分を I_x，y 成分を I_y として，運動量と力積の関係より，

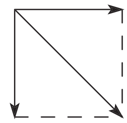
$$\begin{cases} 0 - mv_0 = I_x \\ mv_0 - 0 = I_y \end{cases}$$



これらを図示すると右図のようになる．

(4) パイプが球から受ける反作用による力積の x 成分を ${I_x}'$，y 成分を ${I_y}'$ とすると，

$$\begin{cases} {I_x}' = +mv_0 \\ {I_y}' = -mv_0 \end{cases}$$



これらを図示すると右図のようになる．

(5) パイプの中を球ではなく水が通過する場合にも，パイプには (4) と同様に力積が加わる．このため，スプリンクラーは水が噴き出すのと逆向きに回転することになり，別な動力を用いることなしに回転しながら散水できる．

【3】

《解答》

(a) A は下向きを正，B は上向きを正とすると，

$$\begin{cases} m_{\mathrm{A}}a = m_{\mathrm{A}}g - T & \cdots ① \\ m_{\mathrm{B}}a = T - m_{\mathrm{B}}g & \cdots ② \end{cases}$$

(b) ① + ② より，

$$(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})a = (m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})g \qquad \therefore \quad a = \frac{m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}g$$

① × m_{B} − ② × m_{A} より，

$$0 = m_{\mathrm{B}}(m_{\mathrm{A}}g - T) - m_{\mathrm{A}}(T - m_{\mathrm{B}}g) \qquad \therefore \quad T = \frac{2m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}$$

(c) 所要時間を t とすると，

$$\begin{cases} v = at \qquad \therefore \quad t = \dfrac{v}{a} \\ H = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

これらより，t を消去すると，

$$H = \frac{a}{2}\left(\frac{v}{a}\right)^2 \qquad \therefore \quad v^2 = 2aH$$

これと (b) より，

$$v^2 = \frac{2gH(m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}} \qquad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{2gH(m_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{B}})}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}}}$$

(ア) 力学的エネルギーの保存より，

$$0 + m_{\mathrm{A}}gx_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{A}}{v_{\mathrm{A}}}^2 + 0 \qquad \therefore \quad x_{\mathrm{A}} = \frac{{v_{\mathrm{A}}}^2}{2g}$$

(イ) （ア）と同様に，

$$0 + m_{\mathrm{B}}gx_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}v^2 + 0 \qquad \therefore \quad x_{\mathrm{B}} = \frac{v^2}{2g}$$

(ウ) $v_{\mathrm{A}} = ev$

(エ) (ア)，(イ) より，

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2gx_{\mathrm{A}}}, \quad v = \sqrt{2gx_{\mathrm{B}}}$$

これらと (ウ) より，

$$\sqrt{2gx_{\mathrm{A}}} = e\sqrt{2gx_{\mathrm{B}}} \qquad \therefore \quad e = \sqrt{\frac{x_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}}}}$$

【4】

《解答》

(1) (ア) $\frac{1}{2}m{v_1}^2 = mgh_0$

(イ) $v_1 = \sqrt{2gh_0}$

(ウ) 力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 = mgh_\mathrm{A} \qquad \therefore \quad v_\mathrm{A} = \sqrt{2gh_\mathrm{A}}$$

(エ) $e_\mathrm{A} = \dfrac{v_\mathrm{A}}{v_1} = \sqrt{\dfrac{h_\mathrm{A}}{h_0}}$

(オ) 球 B の場合は，(エ) で h_A が h_B に置き換わるので，

$$e_\mathrm{B} = \frac{v_\mathrm{B}}{v_1} = \sqrt{\frac{h_\mathrm{B}}{h_0}} \qquad \therefore \quad \frac{e_\mathrm{A}}{e_\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{h_\mathrm{A}}{h_\mathrm{B}}}$$

(2) (a) 点 Q における速さを v として，力学的エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgd\sin 30^\circ \qquad \therefore \quad v = \sqrt{gd}$$

点 Q における速度の向きも考えると，

$$\begin{cases} v_x = v\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3gd}}{2} \\ v_z = v\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{gd}}{2} \end{cases}$$

(b) 点 Q を出てから板 P に到達するまでの時間を t_1 とおき，z 方向の運動に注目すると，

$$\frac{\sqrt{gd}}{2}\cdot t_1 + \frac{1}{2}g{t_1}^2 = d \qquad \therefore \quad \left(t_1 - \sqrt{\frac{d}{g}}\right)\left(t_1 + 2\sqrt{\frac{d}{g}}\right) = 0$$

$t_1 > 0$ をふまえると $t_1 = \sqrt{\dfrac{d}{g}}$ と分かる．また，速度の x 成分は一定なので，

$$a = \frac{\sqrt{3gd}}{2}\cdot\sqrt{\frac{d}{g}} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$$

(c) 板 P に衝突する直前における速度の z 成分を ${v_z}'$ とすると，

$${v_z}' = v_z + gt_1 = \frac{3}{2}\sqrt{gd}$$

はねかえり係数 e ではねかえった直後の速度の z 成分は $-e{v_z}'$ となる．剛体球が板 P ではねかえってから床に達するまでの時間を t_2 とおき，z 方向の運動に注目すると，

$$-e{v_z}'t_2 + \frac{1}{2}g{t_2}^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_2 = \frac{2e}{g}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{gd}$$

速度の x 成分は v_x のままなので，

$$b = \frac{\sqrt{3gd}}{2} \cdot \frac{3e}{g}\sqrt{gd} = \frac{3\sqrt{3}}{2}ed \qquad \therefore \quad \begin{cases} b_{\mathrm{A}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}e_{\mathrm{A}}d \\ b_{\mathrm{B}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}e_{\mathrm{B}}d \end{cases}$$

１３章　運動量の保存

問題

■演習

【1】

《解答》

(a) 鉛直方向の力のつり合いより，垂直抗力 N は $N = mg$ と分かる．加速度を a とすると，運動方程式は，

$$ma = -\mu \cdot mg \qquad \therefore \quad a = -\mu g$$

(b) 求める速度 v は

$$v = v_0 - \mu g t$$

(c) $t = t_1$ のとき，$v = 0$ となるので，

$$v_0 - \mu g t_1 = 0 \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$$

(d) $t = 0$ から t_1 までに受けた力積は，

$$-\mu mg \cdot t_1 = -mv_0 \quad \cdots \quad \text{運動量の変化と一致している．}$$

(e) μmg

(f) 時刻 t における物体の速度を v，板の速度を V とすると，

$$\begin{cases} mv - mv_0 = -\mu mg \cdot t \\ MV - M \cdot 0 = +\mu mg \cdot t \end{cases}$$

(g) $\begin{cases} v = v_0 - \mu g t \\ V = \dfrac{\mu mg}{M} t \end{cases}$

(h) $t = t_2$ のとき，$v = V$ となるので，

$$v_0 - \mu g t_2 = \frac{\mu mg}{M} t_2 \qquad \therefore \quad t_2 = \frac{Mv_0}{\mu g(M+m)}$$

(i) (f) より，

$$MV + mv - mv_0 = 0 \qquad \therefore \quad mv + MV = mv_0$$

(j) 求める速度を u として，(i) より，

$$mu + Mu = mv_0 \qquad \therefore \quad u = \frac{m}{M+m} v_0$$

【2】

《解答》

(1) 所要時間を t_0 とすると，

$$d = \frac{1}{2}a{t_0}^2 \qquad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{2d}{a}}$$

(2) $v = at_0 = \sqrt{2ad}$

(3) $D = Vt_0 = V\sqrt{\frac{2d}{a}}$

(4) $MV = (M+m)W\cos\theta \quad \cdots ①$

(5) (2) をふまえると，

$$m\sqrt{2ad} = (M+m)W\sin\theta \quad \cdots ②$$

(6) $①^2 + ②^2$ より，

$$M^2V^2 + 2m^2ad = (M+m)^2W^2 \qquad \therefore \quad W = \frac{\sqrt{M^2V^2 + 2m^2ad}}{M+m}$$

(7) $\frac{②}{①}$ より，

$$\frac{m\sqrt{2ad}}{MV} = \frac{(M+m)W\sin\theta}{(M+m)W\cos\theta} \qquad \therefore \quad \tan\theta = \frac{m\sqrt{2ad}}{MV}$$

【3】

《解答》

(1) $mv_1\cos\theta_1 + mv_2\cos\theta_2 = mv_0$

(2) $mv_1\sin\theta_1 - mv_2\sin\theta_2 = 0$

(3) $\dfrac{1}{2}m{v_1}^2 + \dfrac{1}{2}m{v_2}^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2$

(4) (1) より，

$$v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2 = v_0 \quad \cdots ①$$

(2) より，

$$v_1\sin\theta_1 - v_2\sin\theta_2 = 0 \quad \cdots ②$$

$①^2 + ②^2$ より，

$${v_1}^2 + {v_2}^2 + 2v_1v_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) = {v_0}^2$$

これと (3) より $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = 0$ と分かり，

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \qquad \therefore \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

【4】

《解答》

(1) 鉛直方向の力のつり合いより，垂直抗力 N は $N = mg$ と表せるので，摩擦力がした仕事 W は，

$$W = -\mu' mg \cdot l \qquad \therefore \quad |W| = \mu' mgl$$

(2) 運動エネルギーと仕事の関係より，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\mu' mgl \qquad \therefore \quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2\mu' gl}$$

(3) (a) 衝突後の離反速度は ${v_2}' - {v_1}'$ なので，

$$e = \frac{{v_2}' - {v_1}'}{v_1}$$

(b) 運動量保存則より，

$$mv_1 = m{v_1}' + m{v_2}'$$

(c) (a)，(b) より，

$$\begin{cases} {v_2}' - {v_1}' = ev_1 & \cdots ① \\ {v_1}' + {v_2}' = v_1 & \cdots ② \end{cases}$$

②−①より，

$$2{v_1}' = (1-e)v_1 \qquad \therefore \quad {v_1}' = \frac{1-e}{2}\sqrt{{v_0}^2 - 2\mu' gl}$$

①+②より，

$$2{v_2}' = (1+e)v_1 \qquad \therefore \quad {v_2}' = \frac{1+e}{2}\sqrt{{v_0}^2 - 2\mu' gl}$$

(4) $e = 1$ のとき，${v_1}' = 0$ となるのでストーン A は静止する．
$0 < e < 1$ のとき，$0 < {v_1}' < {v_2}'$ となるのでストーン A は B よりも小さい速さで x 軸の正の向きに進む．

P2J

高２東大物理

Z-KAI

会員番号		氏　名	