M2JD

本科 1 期 7 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 東大理系数学Ⅲ

Lecture 11　微分法(9)　速度と加速度 - 解答

演習問題 11 − 1

1　xy 平面上の動点 P が，パラメータ t により次のように与えられるとする．
このとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t で表せ．

(1) $x = t^2 + 1,\ y = t^3 + t$

(2) $x = -2t^3 + 1,\ y = 2t - 1$

(3) $x = e^t + e^{-t},\ y = e^t - e^{-t}$

(4) $x = \cos 2t,\ y = \sin 3t$

2　xy 平面上の動点 P が，パラメータ t により次のように与えられる．

$$x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$$

このとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t で表せ．

解答・解説

1

(1)

$$\frac{dx}{dt} = 2t,\ \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{2t} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{dx}{dt} = -6t^2,\ \frac{dy}{dt} = 2$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{-6t^2} = -\frac{1}{3t^2} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t},\ \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t}$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt}=3\cos 3t$$

より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos 3t}{-2\sin 2t}=-\frac{3\cos 3t}{2\sin 2t}\qquad \text{(答)}$$

$\boxed{2}$

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t,\ \frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$

より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\sin^2 t\cos t}{\cos^2 t\sin t}=-\tan t$$

従って

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}\\&=\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}\\&=(-\tan t)'\cdot\frac{1}{-3\cos^2 t\sin t}\\&=\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{3\cos^2 t\sin t}\\&=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}\qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

演習問題 11 − 2

次の問いに答えよ．

(1) 曲線

$$x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta$$

の，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点は，媒介変数 t を用いて

$$x = e^t \cos \pi t, \quad y = e^t \sin \pi t$$

と表される．$t = 2$ に対応する C 上の点における接線の方程式を求めよ．

解答・解説

(1) まず，

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$$

であるから，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

よって $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.　またこのとき

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

であるから，求める接線の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left\{x - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$\therefore \quad y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 2. \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos \pi t + e^t \cdot \pi \cdot (-\sin \pi t) = e^t(\cos \pi t - \pi \sin \pi t),$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin \pi t + e^t \cdot \pi \cdot \cos \pi t = e^t(\sin \pi t + \pi \cos \pi t)$$

であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin\pi t+\pi\cos\pi t}{\cos\pi t-\pi\sin\pi t}.$$

よって $t=2$ における接線の傾きは $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{0+\pi\cdot 1}{1-\pi\cdot 0}=\pi.$　またこのとき

$$x=e^2,\quad y=0$$

であるから，求める接線の方程式は

$$y-0=\pi(x-e^2)$$
$$\therefore\quad y=\pi x-\pi e^2.\qquad \text{(答)}$$

演習問題 11 − 3

1　数直線上を動く点 P(x) の座標が，時刻 t により

$$x = -4t^2 + 3t + 10$$

で与えられるとする．3 秒後の，点 P の速度，加速度をそれぞれ求めよ．

2　xy 平面上の動点 P が，時刻 t により

$$x = -t^3, \quad y = t^3 - 3t^2$$

このとき，速度ベクトル $\vec{v}$，加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を求めよ．また，$t = 1$ のときの速さ，加速度の大きさをそれぞれ求めよ．

3　xy 平面上の動点 P が，時刻 t により次のように与えられる．

$$x = 2\sin t, \quad y = \cos 2t$$

このとき，点 P の速度の大きさの最大値はいくらか．

解答・解説

1

$$\frac{dx}{dt} = -8t + 3, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -8$$

ゆえに，$t = 3$ では，点 P の速度 v，加速度 α は

$$v = -8 \cdot 3 + 3 = -21, \quad \alpha = -8 \qquad \text{(答)}$$

2

$$\frac{dx}{dt} = -3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 6t$$

また

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t - 6$$

ゆえに

$$\vec{v} = (-3t^2,\, 3t^2 - 6t), \quad \vec{\alpha} = (-6t,\, 6t - 6) \qquad \text{(答)}$$

また，$t = 1$ のとき

$$\vec{v} = (-3,\, -3), \quad \vec{\alpha} = (-6,\, 0) \qquad \text{(答)}$$

$\boxed{3}$

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -2\sin 2t$$

ゆえに

$$\vec{v} = (2\cos t,\ -2\sin 2t)$$

従って，速度の大きさは

$$\begin{aligned}
|\vec{v}| &= \sqrt{(2\cos t)^2 + (-2\sin 2t)^2} \\
&= 2\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 2t} \\
&= 2\sqrt{\cos^2 t + (2\cos t \sin t)^2} \\
&= 2|\cos t|\sqrt{1 + 4\sin^2 t}
\end{aligned}$$

ここで，$\sin^2 t = u$ とする（ただし，$0 \leqq u \leqq 1$）.

$$\begin{aligned}
|\vec{v}|^2 &= 4(1-u)(1+4u) \\
&= -16u^2 + 12u + 4 \\
&= -16\left(u - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

ゆえに，$u = \dfrac{3}{8}$ のとき，最大値は $\sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$　　(答)

演習問題 11 − 4

座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を

$$x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$$

とする．このとき，点 (x, y) の速度ベクトル $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ と定める．

次の問いに答えよ．

(1) 時刻 t における速度 $\vec{v}$，その大きさ $|\vec{v}|$ を求めよ．

(2) 原点を O とするとき，$\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ は一定であることを示せ．また，θ を求めよ．

解答・解説

(1) それぞれ，t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$
$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

ゆえに

$$\vec{v} = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t)) \qquad (答)$$
$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} \\ &= \sqrt{2e^{2t}} \\ &= \sqrt{2}e^t \qquad (答)\end{aligned}$$

(2) 2 つのベクトルのなす角を θ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$$

したがって，$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = |\vec{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \cos\theta$ が成り立つことより

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\vec{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

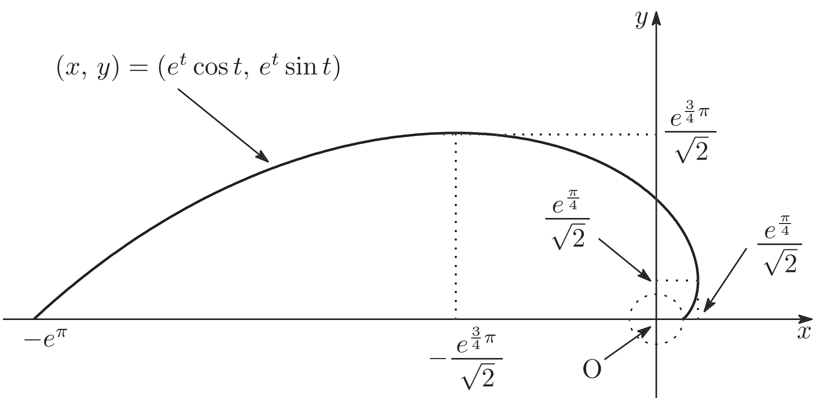
従って，2 つのベクトルのなす角は一定である．　〔証明終〕

注意 11.1

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のもとで，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$	$\nwarrow$	$\left(-\dfrac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{e^{\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$	$\swarrow$	$(-e^{\pi},\ 0)$

したがって，点 P の軌跡は次の通り．



演習問題 11 − 5

表面積が $4\pi\,\mathrm{cm}^2$/秒 の一定の割合で増加している球がある．半径が $10\,\mathrm{cm}$ になった瞬間において，以下のものを求めよ．

(1) 半径の増加する速度

(2) 体積の増加する速度

解答・解説

(1) 半径を r，表面積を S とする．求める速度は $v = \dfrac{dr}{dt}$ である．$S = 4\pi r^2$ なので

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \therefore \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{dS}{dt}$$

与えられた条件より，$\dfrac{dS}{dt} = 4\pi,\quad r = 10$ なので

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8\pi\cdot 10}\cdot 4\pi = \frac{1}{20} \quad (\mathrm{cm}^2/\text{秒}) \qquad \text{(答)}$$

(2) 体積を V とする．$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ から

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$r = 10$ のとき，(1) より $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{20}$．すなわち

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi\cdot 10^2\cdot\frac{1}{20} = 20\pi \quad (\mathrm{cm}^2/\text{秒}) \qquad \text{(答)}$$

演習問題 11 − 6

高さ 3 m の高台の上からロープで，毎秒 2 m の速度で床にある荷物を引き寄せる．ロープの長さが 5 m になったときの床にある荷物の速度を求めよ．ただし，ロープは十分に長いものとし，荷物は床から離れていないものとする．

解答・解説

高台の下（地表）から荷物までの距離を x m，高台の上から荷物までの距離を y m とする．このとき，三平方の定理から

$$x^2 + 3^2 = y^2 \quad \cdots ①$$

辺々を t で微分する．

$$2x\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt} \qquad \therefore \quad x\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt}$$

ここで，$\dfrac{dy}{dt} = -2$ から

$$x\frac{dx}{dt} = -2y$$

① から，$y = 5$ のとき $x = 4$．すなわち，これを代入して

$$4 \cdot \frac{dx}{dt} = -2 \cdot 5 \qquad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{2}$$

すなわち，荷物は高台に向かって 2.5(m/秒) で向かってくる． (答)

添削課題 **11 − 1**

1 高さ 10 m から真上に物体 F を投げた．F の t 秒後の高さを x m とするとき

$$x = -5t^2 + 15t + 10$$

であるという．物体を投げてから 2 秒後の，点 P の速度，加速度をそれぞれ求めよ．

2 xy 平面上の動点 P が，時刻 t により

$$x = 2\cos 3t, \quad y = 2\sin 3t$$

と表される．このとき，速さ $|\vec{v}|$，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を求めよ．また，速度ベクトルと加速度ベクトルは常に垂直であることを示せ．

解答・解説

1

$$\frac{dx}{dt} = -10t + 15, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -10$$

ゆえに，$t = 2$ のとき，点 P の速度 v，加速度 α は

$$v = -10 \cdot 2 + 15 = -5,\ \alpha = -10 \qquad (答)$$

2

$$\frac{dx}{dt} = -6\sin 3t, \quad \frac{dy}{dt} = 6\cos 3t$$

また

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -18\cos 3t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -18\sin 3t$$

ゆえに

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = (-6\sin 3t,\ 6\cos 3t),$$

$$|\vec{v}| = 6\sqrt{(-\sin 3t)^2 + (\cos 3t)^2} = 6 \qquad (答)$$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (-18\cos 3t,\ -18\sin 3t),$$

$$|\vec{\alpha}| = 18\sqrt{(-\cos 3t)^2 + (-\sin 3t)^2} = 18 \qquad (答)$$

また，$\vec{v}$, $\vec{\alpha}$ は $\vec{0}$ でなく

$$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=6\cdot 18(-\sin 3t,\ \cos 3t)\cdot(-\cos 3t,\ -\sin 3t)=0$$

より，$\vec{v}$ と $\vec{\alpha}$ は垂直である． 〔証明終〕

添削課題 **11 − 2**

xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標が

$$(x,\, y) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)$$

で与えられるとき

(1) 時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}$，加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を求めよ．

(2) 時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}$，加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ．

解答・解説

(1)

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2},\ \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) \qquad \text{(答)}$$

また

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2},\ \frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{v}\cdot\vec{\alpha} &= \frac{1}{4}\left(e^t - e^{-t},\, e^t + e^{-t}\right)\cdot\left(e^t + e^{-t},\, e^t - e^{-t}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left\{(e^{2t} - e^{-2t}) + (e^{2t} - e^{-2t})\right\}\\ &= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}|\vec{v}| = |\vec{\alpha}| &= \frac{1}{2}\sqrt{(e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e^{2t} + e^{-2t}}\end{aligned}$$

ゆえに，$\vec{v}\cdot\vec{\alpha} = |\vec{v}||\vec{\alpha}|\cos\theta$ から

$$\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}} \qquad \text{(答)}$$

Lecture 12　微分法 (10)　曲線のパラメータ表示 - 解答

演習問題 12 − 1

1　次の問いに答えよ．

(1) t は実数全体を動く．パラメータ表示 $x = 2t^2 + 1$，$y = t^2 + t - 2$ で表される曲線の概形を調べよ．

(2) パラメータ表示 $x = t - t^2$，$y = t + t^2$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で表される曲線の概形を調べよ．

2　t を変数として，xy 平面上で次のようにパラメータ表示された曲線 C がある．

$$x = -t^2 + 4, \quad y = t^3 - 3t + 2$$

(1) この曲線は自分自身と交差することがあるか．あるならば，交差する点の座標を求めよ．

(2) 曲線 C の概形を調べ，図示せよ．

解答・解説

1

(1)　x 軸との交点に対応する t の値は，$y = 0$ より

$$(t+2)(t-1) = 0 \qquad \therefore \quad t = -2,\ 1$$

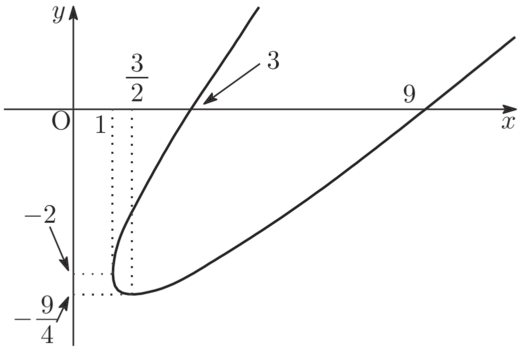
さらに

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + 1$$

よって，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

t	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{dy}{dt}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x,\ y)$	$\swarrow$	$(9,\ 0)$	$\swarrow$	$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{9}{4}\right)$	$\nwarrow$	$(1,\ -2)$	$\nearrow$	$(3,\ 0)$	$\nearrow$

以上より，グラフの概形は次の通り．



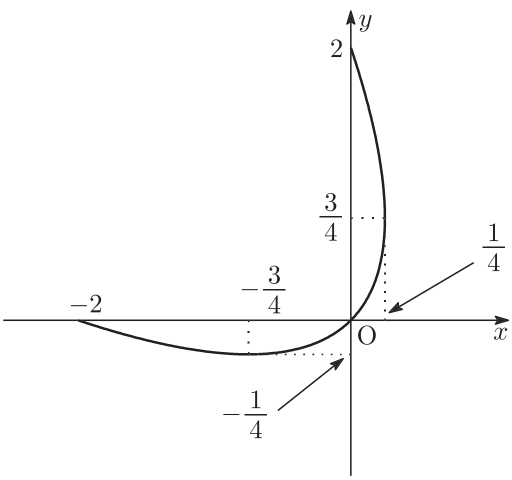
(2)

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + 2t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+2t}{1-2t}$$

よって，$-1 \leqq t \leqq 1$ のもとで，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{dy}{dt}$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x,\ y)$	$(-2,\ 0)$	$\searrow$	$\left(-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$	$\nwarrow$	$(0,\ 2)$

また，$t = 0$ のとき $(0, 0)$ を通ることに注意し，グラフの概形は次の通り．



$\boxed{2}$

(1) $t=u, v$ で同じ点を通るとする $(u \neq v)$．このとき

$$-u^2+4=-v^2+4 \qquad \cdots①, \qquad u^3-3u+2=v^3-3v+2 \qquad \cdots②$$

① より

$$(u+v)(u-v)=0$$

$u \neq v$ より，$v=-u$．② から，$u \neq 0$ に注意して

$$\begin{aligned} &u^3-3u+2=(-u)^3-3(-u)+2 \\ &u(u+\sqrt{3})(u-\sqrt{3})=0 \\ &u=\pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

ゆえに，$u=\pm 3$ で通る点 $(1, 2)$ で自己交差する．　　(答)

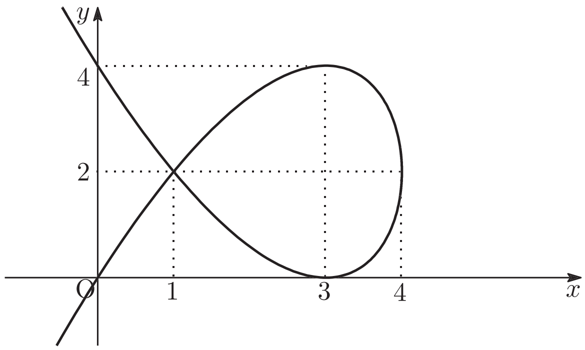
(2)

$$\frac{dx}{dt}=-2t, \quad \frac{dy}{dt}=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

よって，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x,\ y)$	$\nearrow$	$(3,\ 4)$	$\searrow$	$(4,\ 2)$	$\swarrow$	$(3,\ 0)$	$\nwarrow$

(1) とあわせて，グラフの概形は次の通り．



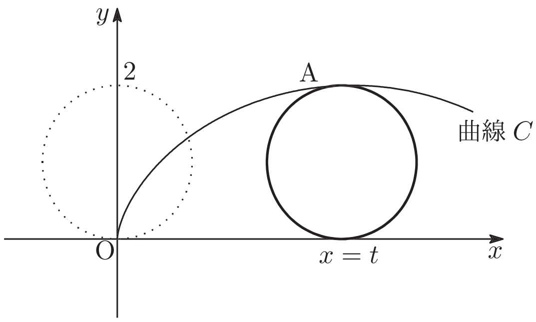
演習問題 12 − 2

半径 1 の円盤を原点で x 軸に接し，かつ中心が $(0,\,1)$ となるように xy 平面上におく．この円盤を，x 軸上を滑らないよう正方向に転がす．最初に原点と接していた円盤の周上の点を A とする．また，円盤と x 軸との接点 T の x 座標を t とする．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 A の座標を t を用いて表せ．また，A の軌跡を図示せよ．

(2) (1) で求めた軌跡を C とする．C 上の点 A における C の接線を L とする．L と直線 AT は垂直に交わることを示せ．



解答・解説

(1) 円盤の中心を B とすると，$\mathrm{B}(t,\,1)$ と表される．ここで，$\angle\mathrm{TBA}=\theta$ とおくと，円盤の半径が 1 であることから

$$\theta = t$$

である．ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(t,\,1)+\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right),\,\sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right)=(t-\sin t,\,1-\cos t)$$

ゆえに，A の座標は $(t-\sin t,\,1-\cos t)$ (答)

ここで

$$x=f(t)=t-\sin t,\quad y=g(t)=1-\cos t$$

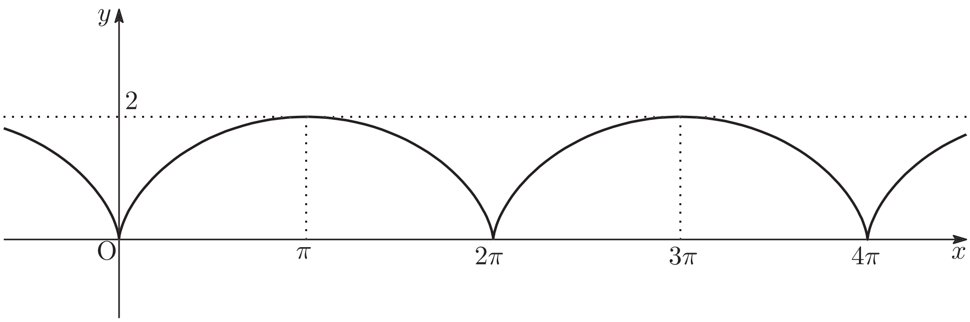
とする．以下，$0\leqq t\leqq 2\pi$ について調べる．

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t\geqq 0,\quad \frac{dy}{dt}=\sin t$$

よって，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のもとで，点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ の動きは次の通り．

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$(\pi,\ 2)$	$\searrow$	$(2\pi,\ 0)$

周期性に注意して，点 P の軌跡は次の通り．



(2) 点 A の速度ベクトルを $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と定める．

$$\vec{v} = (1 - \cos t,\ \sin t)$$

ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{TA}} = (t - \sin t,\ 1 - \cos t) - (t,\ 0) = (-\sin t,\ 1 - \cos t)$$

ゆえに

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TA}} = (1 - \cos t) \cdot (-\sin t) + \sin t \cdot (1 - \cos t) = 0$$

従って，2 つのベクトルは直交する．　〔証明終〕

演習問題 12 − 3

xy 平面上の動点 P は，実数全体を動くパラメータ t により

$$x = \cos \pi t, \quad y = \sin 2\pi t$$

と表される．P の軌跡の概形を描け．

解答・解説

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

とおく．$f(t)$ の周期は 2，$g(t)$ の周期は 1 であることから，$0 \leqq t \leqq 2$ について調べる．また，

$$f(2-t) = \cos\{\pi(2-t)\} = \cos(2\pi - \pi t) = \cos \pi t = f(t)$$
$$g(2-t) = \sin\{2\pi(2-t)\} = \sin(4\pi - 2\pi t) = -\sin 2\pi t = -g(t)$$

である．ゆえに，$0 \leqq t \leqq 1$ について調べれば十分．

$$\frac{dx}{dt} = -\pi \sin \pi t \leqq 0, \quad \frac{dy}{dt} = 2\pi \cos 2\pi t$$

よって，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

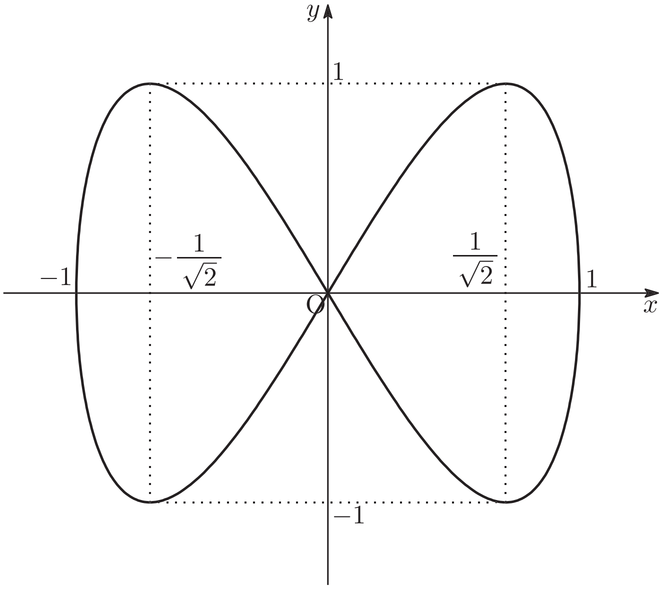
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$	$\swarrow$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1\right)$	$\nwarrow$	$(-1,\ 0)$

また

$$f(2-t) = f(t),\ g(2-t) = -g(t)$$

であることから，曲線 C のうち，区間 $0 \leqq t \leqq 1$ に対応する部分と $1 \leqq t \leqq 2$ に対応する部分は x 軸について対称．

以上より，グラフの概形は次の通り．



y
1
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
-1
1
O
x
-1

演習問題 12 − 4

パラメータ θ により，点 $\mathrm{P}(x,\, y)$ は

$$x = (1+\cos\theta)\cos\theta, \quad y = (1+\cos\theta)\sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表される．P の軌跡を xy 平面上に図示せよ．

解答・解説

$$f(\theta) = (1+\cos\theta)\cos\theta,\; g(\theta) = (1+\cos\theta)\sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

とする．

$$\begin{aligned} f(2\pi-\theta) &= (1+\cos(2\pi-\theta))\cos(2\pi-\theta) = (1+\cos\theta)\cos\theta = f(\theta) \\ g(2\pi-\theta) &= (1+\cos(2\pi-\theta))\sin(2\pi-\theta) = -(1+\cos\theta)\sin\theta = -g(\theta) \end{aligned}$$

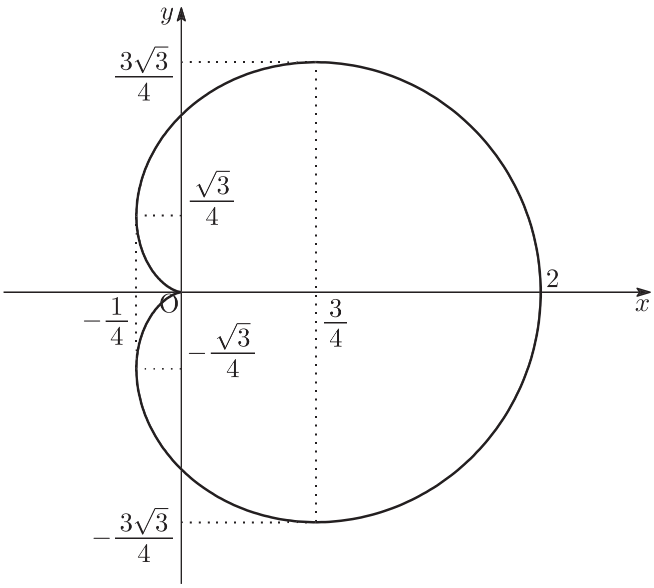
ゆえに，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ で検討すれば十分である．

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) = -\sin\theta(2\cos\theta+1) \\ \frac{dg(\theta)}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta = (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \end{aligned}$$

よって，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のもとで，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x,\ y)$	$(2,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$	$\swarrow$	$\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$	$\searrow$	$(0,\ 0)$

また，x 軸との対称性に注意すると，グラフの概形は次の通り．


y
$\frac{3\sqrt{3}}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{4}$
2
x
$-\frac{1}{4}$
O
$\frac{3}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{4}$
$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{\text{添削課題 } \mathbf{12-1}}$

次のようにパラメータ表示された曲線の概形を，xy 平面上に描け．

(1) $x = 2t^2, \quad y = t^3 - 3t \quad (-\sqrt{3} \leqq t \leqq \sqrt{3})$

(2) $x = t^3 - t, \quad y = t^3 + t$

$\boxed{\text{解答・解説}}$

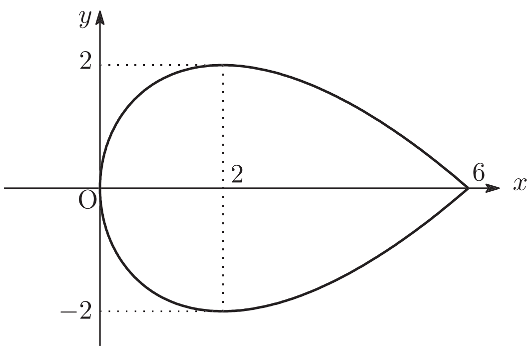
(1)

$$\frac{dx}{dt} = 4t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3 = 3(t+1)(t-1)$$

よって，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

t	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x,\ y)$	$(6,\ 0)$	$\nwarrow$	$(2,\ 2)$	$\swarrow$	$(0,\ 0)$	$\searrow$	$(2,\ -2)$	$\nearrow$	$(6,\ 0)$

以上より，グラフの概形は次の通り．



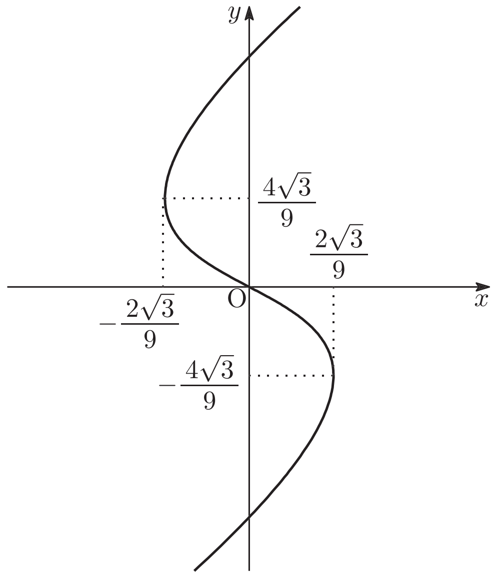
(2)

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 1 = 3\left(t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1 > 0$$

よって，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

t	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\dfrac{dy}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x,\ y)$	$\nearrow$	$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{9},\ -\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$	$\nwarrow$	$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{9},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$	$\nearrow$

また，$t=0$ のとき $(0,\ 0)$ を通ることに注意し，グラフの概形は次の通り．



$\boxed{\textbf{添削課題 12 − 2}}$

xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$0 \leqq t \leqq \pi$ を動くパラメータ t により

$$x = \cos 3t, \quad y = 2\sin 2t$$

と表される．P の軌跡の概形を描け．

$\boxed{\text{解答・解説}}$

$(x,\ y) = (f(t),\ g(t))$ とする．このとき

$$f(\pi - t) = \cos 3(\pi - t) = \cos(3\pi - 3t) = -\cos(-3t) = -\cos 3t = -f(t)$$
$$g(\pi - t) = 2\sin 2(\pi - t) = 2\sin(2\pi - 2t) = 2\sin(-2t) = -2\sin 2t = -g(t)$$

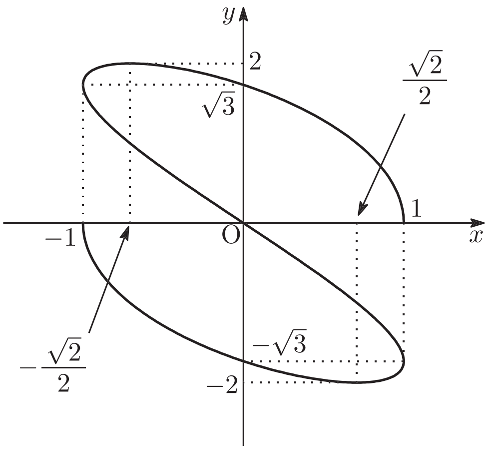
すなわち，図示する曲線のうち，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ の部分は原点で対称である．ゆえに，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ について調べれば十分．

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin 3t, \quad \frac{dy}{dt} = 4\cos 2t$$

よって，点 $(x,\ y)$ の動きは次の通り．

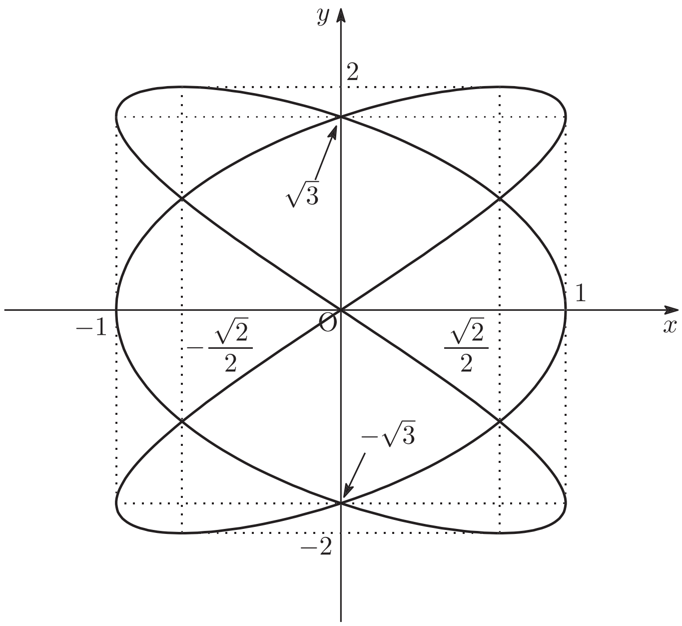
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$	$\swarrow$	$\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$	$\searrow$	$(0,\ 0)$

以上より，グラフの概形は次の通り．



注意 12.1

$0 \leqq t \leqq \pi$ と $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ では x 軸に対称なので（確認せよ），$0 \leqq t \leqq 2\pi$ でこの曲線を描くと，下図.



Lecture 13　総合演習 - 解答

演習問題 $13-1$

$r \neq -1$ とする．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n+1}}{(1+r^n)^2}$ を求めよ．

解答・解説

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n+1}}{(1+r^n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-r\cdot r^{2n}}{(1+r^n)^2}$$

(a)　$-1<r<1$ のとき

$r^n \to 0$ であることから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n+1}}{(1+r^n)^2}=\frac{1}{1}=1.$$

(b)　$r=1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{2n+1}}{(1+r^n)^2}=\frac{1-1}{(1+1)^2}=0.$$

(c)　$r<-1,\ r<1$ のとき $\dfrac{1}{r^n}\to 0$ であることから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r\cdot r^{2n}}{(1+r^n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{r^n}\right)^2-r}{\left(\dfrac{1}{r^n}+1\right)^2}=\frac{0-r}{(0+1)^2}=-r.$$

演習問題 13 − 2

1 辺の長さが 1 の正方形 A_1 がある．A_1 の各辺を，時計回りにそれぞれ $a:(1-a)$(ただし，$0<a<1$) に内分する点を結んでできる正方形を A_2 とする．同様の手続きで，正方形 A_k から A_{k+1} を作る ($k=1, 2, 3, \cdots$)．正方形 A_k の面積を S_k とするとき，次の問いに答えよ．

(1) S_2 を a の式で表せ．

(2) S_k を a, k の式で表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ が収束することを示し，その和 S を a の式で表せ．

(4) S を最小にする a を求めよ．

解答・解説

以下，正方形 A_k の一辺の長さを x_k とする．

(1) 三平方の定理より

$$x_2=\sqrt{a^2+(1-a)^2}=\sqrt{2a^2-2a+1} \qquad \therefore \quad S_2=2a^2-2a+1 \qquad \text{(答)}$$

(2) 同様に

$$x_{k+1}=\sqrt{(ax_k)^2+\{(1-a)x_k\}^2}=\sqrt{2a^2-2a+1}x_k$$

ゆえに

$$S_{k+1}=(2a^2-2a+1)S_k$$

すなわち，数列 $\{S_k\}$ は初項 1，

$$S_k=(2a^2-2a+1)^{k-1} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ は初項 1，公比 $r=2a^2-2a+1$ の無限等比級数．ここで

$$r=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

であり，$0<a<1$ から $\dfrac{1}{2} \leqq r<1$．すなわち，この無限等比級数は収束する．和を S とすれば

$$S=\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-(2a^2-2a+1)}=\frac{1}{2a(1-a)} \qquad \text{(答)}$$

(4) S の分母が最大のとき，S は最小.

$$2a - 2a^2 = -2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

ゆえに，$a = \dfrac{1}{2}$ で最小.　　　(答)

演習問題 13 − 3

2 曲線 $y = e^x$，$y = \log x + 2$ の両方に接する接線の方程式を求めよ．

解答・解説

曲線 $y = e^x$ 上の点 $(s,\ e^s)$ における接線の方程式は

$$y - e^s = e^s(x - s) \qquad y = e^s x + (1 - s)e^s \quad \cdots(\sharp)$$

また，曲線 $y = \log x + 2$ 上の点 $(t,\ \log t + 2)$ における接線の方程式は

$$y - (\log t + 2) = \frac{1}{t}(x - t) \qquad y = \frac{1}{t}x + \log t + 1 \quad \cdots(\sharp\sharp)$$

$(\sharp)$, $(\sharp\sharp)$ が一致するのは

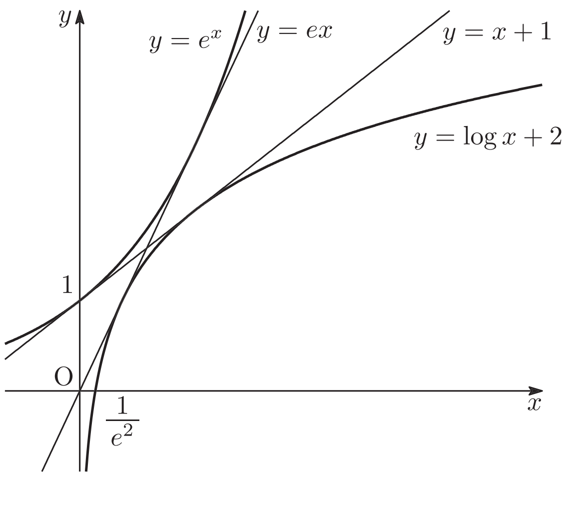
$$e^s = \frac{1}{t} \quad \cdots(*), \qquad (1 - s)e^s = \log t + 1 \quad \cdots(**)$$

が成り立つとき．$(*)$ より，$t = e^{-s}$ なので，$(**)$ より

$$\begin{aligned}(1 - s)e^s &= \log e^{-s} + 1\\ (1 - s)e^s &= 1 - s\\ (1 - s)(e^s - 1) &= 0\\ s &= 0,\ 1\end{aligned}$$

従って，$(\sharp)$ より，求める接線は

$$y = x + 1,\ y = ex \qquad (答)$$



演習問題 13 − 4

関数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ が奇関数であることを証明せよ．

(2) $y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，そのグラフを xy 平面上に図示せよ．

解答・解説

(1)

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-2}=\frac{-x^3}{x^2-2}=-f(x)$$

ゆえに，$f(x)$ は奇関数である．　〔証明終〕

(2) (1) より，この曲線は原点対称である．以下，$x \geqq 0$ について調べる．

定義域は，$x=\sqrt{2}$ を除く実数全体．

$$f(x)=\frac{x(x^2-2)+2x}{x^2-2}=x+\frac{2x}{x^2-2}$$

$$f'(x)=1+2\cdot\frac{1\cdot(x^2-2)-x\cdot 2x}{(x^2-2)^2}=\frac{x^4-6x^2}{(x^2-2)^2}=\frac{x^2(x^2-6)}{(x^2-2)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x)&=\frac{(4x^3-12x)(x^2-2)^2-(x^4-6x^2)\cdot 2(x^2-2)\cdot 2x}{(x^2-2)^4}\\ &=4\cdot\frac{(x^3-3x)(x^2-2)-x(x^4-6x^2)}{(x^2-2)^3}\\ &=4\cdot\frac{x(x^2+6)}{(x^2-2)^3}\end{aligned}$$

従って，増減，凹凸は次の通り．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$\times$	↘	$\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$	↗

また

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

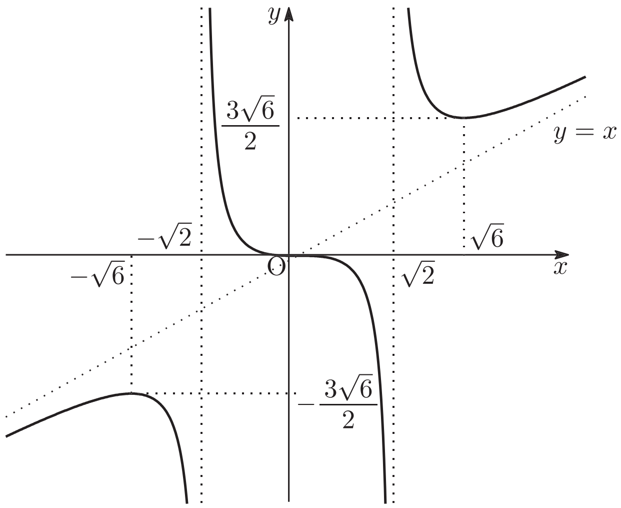
であり

$$\lim_{x \to \sqrt{2}+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \sqrt{2}-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \{f(x) - x\} = 0$$

より，$x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2},\ y = x$ はこの曲線の漸近線である．

y 軸での対称であることとあわせ，$y = f(x)$ のグラフの概形は下図の通り．



演習問題 13 − 5

k を定数とするとき，方程式 $x^2e^x - k = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$ は証明せずに用いてもよい．

解答・解説

与式を変形して

$$x^2e^x = k$$

したがって，与方程式の実数解は曲線 $y = f(x) = x^2e^x$ と直線 $y = k$ の交点の x 座標に等しいから，これらの交点の個数を求める．

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= x(x+2)e^x \end{aligned}$$

より，$f(x)$ の増減表は右のようになる．次に，

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

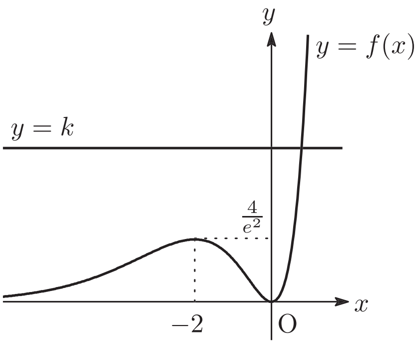
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

また，$x = -t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty}(-t)^2e^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t} = 0$$

以上より，$y = f(x)$ のグラフは図のようになる．これより，求める実数解の個数は

$$\begin{cases} k < 0 \text{ のとき，} & 0 \text{ 個} \\ k = 0,\ \dfrac{4}{e^2} < k \text{ のとき，} & 1 \text{ 個} \\ k = \dfrac{4}{e^2} \text{ のとき，} & 2 \text{ 個} \\ 0 < k < \dfrac{4}{e^2} \text{ のとき，} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



演習問題 13 − 6

次の問いに答えよ．

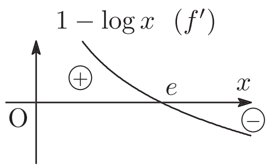
(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ に対して，曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) 2 数 59^{61}，61^{59} の大小を比較せよ．

解答・解説

(1) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ を x で微分すると

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$



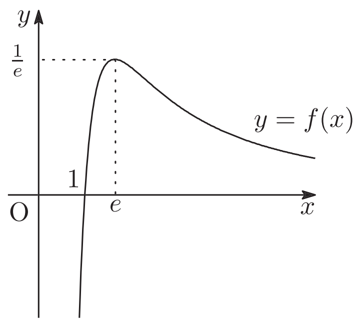
$f'(x)$ と $1 - \log x$ の符号が一致するから，右図と

$$f(e) = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

より $f(x)$ の増減は，下表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$(+\infty)$
f'		$+$	0	$-$	
f	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	(0)

よって $y = f(x)$ のグラフは次のようになる．



(答)

(2) (1) の結果より，$f(x)$ は $x \geqq e$ で単調に減少する．$59 < 61$ より，$f(59) > f(61)$．すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\log 59}{59} > \frac{\log 61}{61} &\iff 61 \log 59 > 59 \log 61 \\ &\iff \log 59^{61} > \log 61^{59} \\ &\iff 59^{61} > 61^{59}. \end{aligned}$$

(答)

M2JD

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号		氏　名	