本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学

１１章　指数・対数関数（２）

問題

【1】(1) **x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 平行移動したグラフ　(答)**

(2) **y 軸について対称移動したグラフ　(答)**

(3) **y 軸について対称移動したグラフを，y 軸方向に 4 平行移動したグラフ　(答)**

(4) $y=10^{-(x-1)}$ とみると，
y 軸について対称移動したグラフを，x 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ(答)
あるいは，$y=10\cdot 10^{-x}$ とみると，
y 軸について対称移動したグラフを，y 軸の方向に 10 倍したグラフ　(答)

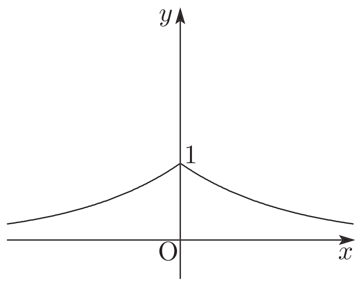
(5) $y=10^{-(x-2)}-1$ とみると，
y 軸について対称移動したグラフを，
x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ　(答)
あるいは，$y=100\cdot 10^{-x}-1$ とみると，
y 軸について対称移動したグラフを，
y 軸の方向に 100 倍してから，y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ　(答)

(6) $y=10^{2x}$ だから，
x 軸の方向に $\frac{1}{2}$ 倍したグラフ　(答)

【2】(1)

$$y=\begin{cases}2^{-x} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 2^{x} & (x<0 \text{ のとき})\end{cases}$$

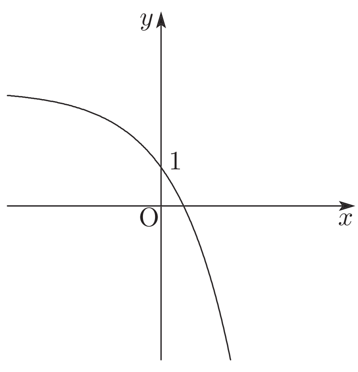
したがって，グラフは右図のようになる．



(2) $\frac{1}{2}\cdot 2^{x+2}=2^{x+1}$ だから，与式は

$$y=-2^{x+1}+3$$

よって，求めるグラフは $y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 平行移動し，x 軸に関して対称に移動し，y 軸方向に 3 平行移動したものである．
よって，グラフは右図のようになる．



【3】(1) $10^{0.3}$，$10^{0.4}$，$0.1^{-2}=10^2$，$0.1^{\frac{1}{2}}=10^{-\frac{1}{2}}$ だから，

$$\mathbf{0.1^{\frac{1}{2}}}(<1)<\mathbf{10^{0.3}}<\mathbf{10^{0.4}}<\mathbf{0.1^{-2}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $\dfrac{5^{999}}{2^{2331}}=\left(\dfrac{5^3}{2^7}\right)^{333}=\left(\dfrac{10^3}{2^{10}}\right)^{333}=\left(\dfrac{1000}{1024}\right)^{333}<1$ だから，

$$\mathbf{5^{999}<2^{2331}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) すべての数を 6 乗すると

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\quad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=9,\quad \left(6^{\frac{1}{6}}\right)^6=6$$

だから，

$$\mathbf{6^{\frac{1}{6}}<2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $2^{30}=8^{10}$，$3^{20}=9^{10}$，7^{10} だから，$\mathbf{7^{10}<2^{30}<3^{20}}$ **(答)**

(5) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$ を 6 乗すると，

$$\left(\sqrt{2}\right)^6=2^3=8,\quad \left(\sqrt[3]{3}\right)^6=3^2=9$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$$

そして $\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{5}$ を 10 乗すると

$$\left(\sqrt{2}\right)^{10}=2^5=32,\quad \left(\sqrt[5]{5}\right)^{10}=5^2=25$$
$$\therefore\quad \sqrt{2}>\sqrt[5]{5}$$

以上より，

$$\mathbf{\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(6) すべての数を 12 乗すると

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12}=3^6=27^2=729,\quad \left(\sqrt[3]{5}\right)^{12}=5^4=25^2=625,$$
$$\left(\sqrt[4]{10}\right)^{12}=10^3=1000,\quad \left(\sqrt[6]{30}\right)^{12}=30^2=900$$

なので，

$$\mathbf{\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[4]{10}} \qquad \textbf{(答)}$$

(7) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$ を 6 乗すると,

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^6 = 5^2 = 25, \quad \left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^3 = 27$$
$$\therefore \quad \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

そして $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$ を 12 乗すると

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{12} = 5^4 = 625, \quad \left(\sqrt[4]{8}\right)^{12} = 8^3 = 512$$
$$\therefore \quad \sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5}$$

以上より,

$\boldsymbol{\sqrt[4]{8} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}}$ **(答)**

(8) まず, $1.01^2 = 1.0201$ より

$1.0201^{50} > 1.02^{50}$ $\therefore (1.01^2)^{50} > 1.02^{50}$

よって

$1.01^{100} > 1.02^{50}$

また, $1.02^5 = 1.104\cdots$, すなわち $1.02^5 > 1.10$ だから

$(1.02^5)^5 > 1.10^5 = 1.610\cdots$ $\therefore 1.02^{25} > 1.610$

ここで, $\sqrt{2} = 1.414\cdots$ だから

$\sqrt{2} < 1.02^{25}$

両辺正だから, 両辺を 2 乗して

$2 < 1.02^{50}$

以上より

$\boldsymbol{2 < 1.02^{50} < 1.01^{100}}$ (答)

【4】(1) $a=1$, $b=2$ とすると,

$$a^a b^b = 1^1 2^2 = 4,\quad a^b b^a = 1^2 2^1 = 2$$

より, $a^a b^b > a^b b^a$ と推定される.

$$P = a^a b^b - a^b b^a = a^a b^a (b^{b-a} - a^{b-a}), \qquad a^a b^a > 0$$

また, $b > a > 0$, $b-a>0$ であるから,

$$b^{b-a} - a^{b-a} > 0$$

よって,

$$P > 0$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{a^a b^b > a^b b^a} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) $a=1$, $b=2$, $c=3$ とすると,

$$\begin{aligned} a^c b^b c^a &= 1^3 2^2 3^1 = 12 \\ a^b b^c c^a &= 1^2 2^3 3^1 = 24 \\ a^a b^c c^b &= 1^1 2^3 3^2 = 72 \\ a^a b^b c^c &= 1^1 2^2 3^3 = 108 \end{aligned}$$

であるから, $a^c b^b c^a < a^b b^c c^a < a^a b^c c^b < a^a b^b c^c$ と推定される.

$$a^a b^b c^c - a^a b^c c^b = a^a b^b c^b \left(c^{c-b} - b^{c-b}\right) > 0$$
$$\left(\because\ a^a b^b c^b > 0,\ c > b > 0,\ c-b > 0 \text{ から},\ c^{c-b} > b^{c-b}\right)$$

$$a^a b^c c^b - a^b b^c c^a = a^a b^c c^a \left(c^{b-a} - a^{b-a}\right) > 0$$
$$\left(\because\ a^a b^c a^a > 0,\ c > a > 0,\ b-a > 0 \text{ から},\ c^{b-a} > a^{b-a}\right)$$

$$a^b b^c c^a - a^c b^b c^a = a^b b^b c^a \left(b^{c-b} - a^{c-b}\right) > 0$$
$$\left(\because\ a^b b^b c^a > 0,\ b > a > 0,\ c-b > 0 \text{ から},\ b^{c-b} > a^{c-b}\right)$$

以上から,

$$\boldsymbol{a^c b^b c^a < a^b b^c c^a < a^a b^c c^b < a^a b^b c^c} \qquad \textbf{(答)}$$

【5】(1) $27^x=3^{3x}$, $\dfrac{1}{3}=3^{-1}$ だから,

$$3x=-1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x=-\frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与式より,

$$16^{10}=1024^x$$

ここで,

$$16^{10}=\left(2^4\right)^{10}=2^{40}=1024^x=2^{10x}$$

よって, $2^{10x}=2^{40}$ より,

$$10x=40 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x=4} \qquad \text{(答)}$$

(3) $2^x=X$ とおくと

$$2X^2-8X-64=0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X+4)(X-8)=0$$

$X>0$ より,

$$X=8$$

よって,

$$2^x=8$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x=3} \qquad \textbf{(答)}$$

(4) $\dfrac{1}{3^x}=X$ とおくと,

$$\begin{aligned} 3X^2-10X+3=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (3X-1)(X-3)=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad X=\frac{1}{3},\ 3 \end{aligned}$$

よって,

$$3^{-x}=3^{-1},\ 3^1$$

ゆえに,

$$\boldsymbol{x=1,\ -1} \qquad \textbf{(答)}$$

(5)
$$3^{-x}>3^{-3}>3^{2(1-x)}$$

底が 1 より大きいから,

$$-x>-3>2(1-x)$$

これを解くと,

$$\boldsymbol{\frac{5}{2}<x<3} \qquad \textbf{(答)}$$

(6) $2^x = X$ とおくと $X > 0$ で,

$$X^2 - 2X < 0 \quad \iff \quad X(X-2) < 0$$

なので,

$$0 < X < 2$$

よって,

$$0 < 2^x < 2^1$$

底が 1 より大きいから,

$$\boldsymbol{x < 1} \qquad \textbf{(答)}$$

(7) $3^x = X$ とおくと $X > 0$ で,

$$\begin{aligned} 9^x - 3^{x+2} &> 3^x - 9 \\ (3^x)^2 - 3^2 \cdot 3^x &> 3^x - 9 \\ X^2 - 9X &> X - 9 \\ X^2 - 10X + 9 &> 0 \\ (X-1)(X-9) &> 0 \\ \therefore 0 < X < 1,\ 9 &< X \end{aligned}$$

よって,

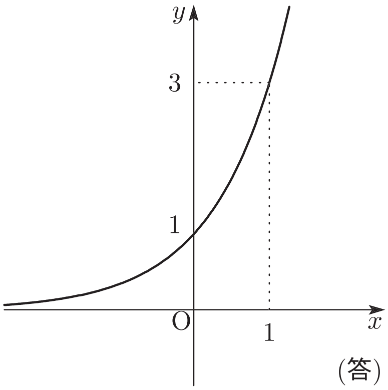
$$0 < 3^x < 1,\ 9 < 3^x$$

底が 1 より大きいから，求めるべき範囲は

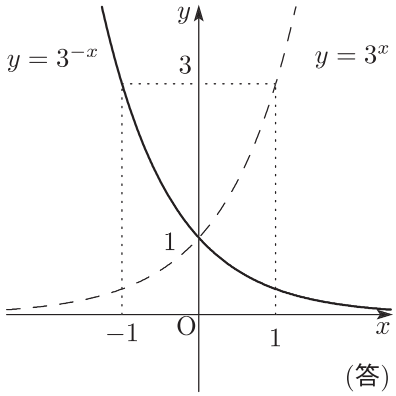
$$\boldsymbol{x < 0,\ 2 < x} \qquad \textbf{(答)}$$

添削課題

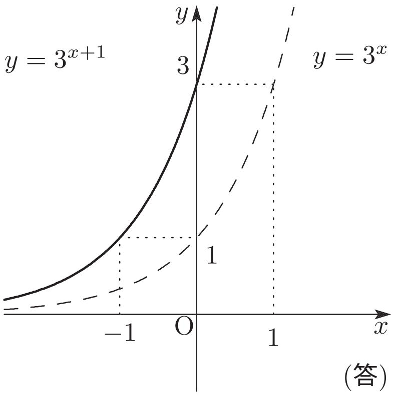
【1】(1)



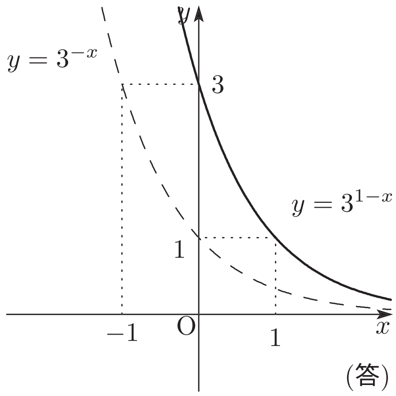
(2)



(3)



(4)



(2) $y=\dfrac{1}{3^x}=3^{-x}$ より，$y=3^{-x}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを

$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動　(答)

したグラフである．

(3) $y=3^{x+1}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを

$\boldsymbol{x}$ 軸の正方向に $\boldsymbol{-1}$ だけ平行移動　(答)

したグラフである．あるいは，$y=3^{x+1}=3\cdot3^x$ とみると

$\boldsymbol{y}$ 軸方向に 3 倍に拡大　(答)

したグラフと考えることもできる．

(4) $y=3^{1-x}=3^{-(x-1)}$ より，$y=3^{-(x-1)}$ のグラフは，$y=3^x$ のグラフを

$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動してから, $\boldsymbol{x}$ 軸の正方向に 1 だけ平行移動　(答)

したグラフである．あるいは，$y=3^{1-x}=3\cdot3^{-x}$ とみると

$\boldsymbol{y}$ 軸について対称移動してから, $\boldsymbol{y}$ 軸方向に 3 倍に拡大　(答)

したグラフと考えることもできる．

【2】(1)

$$0.5^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

$$0.5^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^{2}$$

したがって，底が 2 (>1) だから

$$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{3}} < 2^{2}$$

つまり，小さい順に並べると

$\boldsymbol{0.5^{\frac{1}{2}},\ 2^{\frac{1}{3}},\ 0.5^{-2}}$　　(答)

(2)

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{12} = 3^{6} = 729$$

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{12} = \left(7^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = 7^{4} = 2401$$

$$\left(\sqrt[4]{12}\right)^{12} = \left(12^{\frac{1}{4}}\right)^{12} = 12^{3} = 1728$$

したがって

$$\left(\sqrt{3}\right)^{12} < \left(\sqrt[4]{12}\right)^{12} < \left(\sqrt[3]{7}\right)^{12}$$

つまり，小さい順に並べると

$\boldsymbol{\sqrt{3},\ \sqrt[4]{12},\ \sqrt[3]{7}}$　　(答)

【3】(1)

$$9^{x} = \frac{1}{27} \iff \left(3^{2}\right)^{x} = 3^{-3}$$
$$\iff 3^{2x} = 3^{-3}$$
$$\iff 2x = -3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = -\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$8^{x} > \frac{1}{2} \iff \left(2^{3}\right)^{x} > 2^{-1}$$
$$\iff 2^{3x} > 2^{-1}$$
$$\iff 3x > -1 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x > -\frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x} > 8 \iff \left(2^{-2}\right)^{x} > 2^{3}$$
$$\iff 2^{-2x} > 2^{3}$$
$$\iff -2x > 3 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x < -\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(4) $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$

$$(3^x)^2 - 4 \cdot 3^1 \cdot 3^x + 27 = 0$$
$$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$
$$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$$
$$\therefore\ 3^x = 3,\ 3^x = 9$$
$$3^x = 3^1,\ 3^x = 3^2 \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = 1,\ 2} \qquad (答)$$

【4】(1) $t = 2^x$ とおくと,

$$\begin{aligned} y &= 2^{2x+2} - 2^{x+2} + 2 \\ &= 2^2 \cdot (2^x)^2 - 2^2 \cdot 2^x + 2 \\ &= 4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 2 \\ &= 4t^2 - 4t + 2 \end{aligned}$$

であるから,

$$\boldsymbol{y = 4t^2 - 4t + 2} \qquad (答)$$

(2) $t = 2^x > 0$ より, $y = 4t^2 - 4t + 2\ (t > 0)$ の最小値を求めればよい.

$$y = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

よって, $t = \dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 1 をとる.
ここで, $t = \dfrac{1}{2}$ のとき, $2^x = \dfrac{1}{2}$ より, $x = -1$
以上より,

最小値 1　($\boldsymbol{x = -1}$ のとき)　　(答)

１２章　指数・対数関数（３）

問題

【1】(1) $\log_3 243 = \mathbf{5}$　　(答)

(2) $\log_{16} 8 = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$　　(答)

(3) $\log_5 1 = \mathbf{0}$　　(答)

(4) $\log_2 0.125 = \mathbf{-3}$　　(答)

(5) $10^4 = \mathbf{10000}$　　(答)

(6) $5^{-1} = \mathbf{0.2}$　　(答)

(7) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \mathbf{8}$　　(答)

(8) $\left(\sqrt{2}\right)^0 = \mathbf{1}$　　(答)

【2】(1) $\log_2 64 = \log_2 2^6 = \mathbf{6}$　　(答)

(2) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -\mathbf{1}$　　(答)

(3) $\log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^8 = \mathbf{8}$　　(答)

(4) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\dfrac{1}{27}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$　　(答)

(5) $\log_8 128 = \log_8 8^{\frac{7}{3}} = \mathbf{\dfrac{7}{3}}$　　(答)

＜参考＞ $\log_8 128 = \log_{2^3} 2^7 = \log_{2^3} \left(2^3\right)^{\frac{7}{3}} = \mathbf{\dfrac{7}{3}}$　　(答)

(6) $\log_{125} \dfrac{1}{25} = \log_{125} 125^{-\frac{2}{3}} = -\mathbf{\dfrac{2}{3}}$　　(答)

＜参考＞ $\log_{125} \dfrac{1}{25} = \log_{5^3} 5^{-2} = \log_{5^3} \left(5^3\right)^{-\frac{2}{3}} = -\mathbf{\dfrac{2}{3}}$　　(答)

(7) $\log_a b = c$ とおくと，

$$a^{\log_a b} = a^c = \boldsymbol{b}$$　　(答)

(8) $8^{\log_2 3} = 2^{3\log_2 3} = 2^{\log_2 3^3} = 3^3 = \mathbf{27}$　　(答)

【3】(1) $\log_2 45 = \log_2\left(3^2 \times 5\right) = \log_2 3^2 + \log_2 5 = \boldsymbol{2a+b}$ (答)

(2) $\log_2 0.6 = \log_2 \dfrac{3}{5} = \log_2 3 - \log_2 5 = \boldsymbol{a-b}$ (答)

(3) $\log_2 \dfrac{10}{9} = \log_2(2 \times 5 \div 3^2) = \log_2 2 + \log_2 5 - \log_2 3^2 = \boldsymbol{1+b-2a}$ (答)

(4)
$$\begin{aligned}\log_2 \frac{\sqrt[4]{27}\sqrt{6}}{\sqrt[3]{0.4}} &= \log_2\left(3^{\frac{3}{4}} \times (2\times 3)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \log_2\left(3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}}\right)\\ &= \log_2\left(2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{5}{4}} \times 5^{\frac{1}{3}}\right)\\ &= \log_2 2^{\frac{1}{6}} + \log_2 3^{\frac{5}{4}} + \log_2 5^{\frac{1}{3}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6} + \frac{5}{4}a + \frac{1}{3}b} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

【4】(1) (与式) $= \log_6(3 \times 12) = \log_6 6^2 = \mathbf{2}$ (答)

(2) (与式) $= \log_5(10 \div 2) = \log_5 5 = \mathbf{1}$ (答)

(3) (与式) $= \log_{10}\left(4 \div 5 \times \left(\sqrt{125}\right)^2\right) = \log_{10} 10^2 = \mathbf{2}$ (答)

(4) (与式) $= \log_2\left(\sqrt{\dfrac{7}{48}} \times 12 \div 21^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 1 = \mathbf{0}$ (答)

(5)
$$\begin{aligned}\text{(与式)} &= \log_{0.5}\left(\frac{8}{13} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{26}{9}\right)\\ &= \log_{0.5} 4 = \log_{0.5} 2^2 = \log_{0.5}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{0.5} 0.5^{-2}\\ &= \mathbf{-2} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right) - \left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

よって,

(与式) $= \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \mathbf{1}$ (答)

【5】(1) (与式) $= \dfrac{\log_{10} 27}{\log_{10} 4} \cdot \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 9} = \dfrac{3\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} \cdot \dfrac{3\log_{10} 2}{2\log_{10} 3} = \boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ (答)

(2) (与式)
$$\begin{aligned}
&= \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} + \frac{2\log_{10} 7}{\log_{10} 4} - \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} \sqrt{2}} \\
&= \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} + \frac{2\log_{10} 7}{2\log_{10} 2} - \frac{\log_{10} 7}{\frac{1}{2}\log_{10} 2} \\
&= \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} + \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} - \frac{2\log_{10} 7}{\log_{10} 2} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$
(答)

＜別解＞

(与式)
$$\begin{aligned}
&= \frac{\log_2 7}{\log_2 2} + \frac{2\log_2 7}{\log_2 4} - \frac{\log_2 7}{\log_2 \sqrt{2}} \\
&= \frac{\log_2 7}{\log_2 2} + \frac{2\log_2 7}{2\log_2 2} - \frac{\log_2 7}{\frac{1}{2}\log_2 2} \\
&= \frac{\log_2 7}{1} + \frac{\log_2 7}{1} - \frac{2\log_2 7}{1} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$
(答)

(3) $\log_a b \times \log_b c \left(= \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b}\right) = \log_a c$ を利用して,

(与式)
$$\begin{aligned}
&= \log_3 2 \cdot \log_2 9 - \log_3 2 \cdot \log_4 3 - \log_9 2 \cdot \log_2 9 + \log_9 2 \cdot \log_4 3 \\
&= \log_3 9 - \log_4 2 - \log_2 2 + \log_9 2 \cdot \log_4 3 \\
&= 2 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 9} \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4} = \frac{1}{2} + \frac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$
(答)

(4) (与式) $= \log_{a^3} c^2 \cdot \log_{\sqrt{c}} a^3 = \log_{\sqrt{c}} c^2 = \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{c})^4 = \mathbf{4}$ (答)

【6】≪証明≫

$2^x = 5^y = 10^z$ より,

$$\log_{10} 2^x = \log_{10} 5^y = \log_{10} 10^z$$
$$\therefore\ x\log_{10} 2 = y\log_{10} 5 = z$$

よって, $x = \dfrac{z}{\log_{10} 2}$, $y = \dfrac{z}{\log_{10} 5}$ だから,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\log_{10} 2}{z} + \frac{\log_{10} 5}{z} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 5}{z} = \frac{\log_{10} 10}{z} = \frac{1}{z}$$

つまり, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ が成り立つ. 〔証明終〕

添削課題

【1】〔1〕〔定義〕（順に）**対数**，$\boldsymbol{\log_a M}$，**真数**　　(答)

※ $\log_a M$ は,「a を何乗すると M になるかを表す数」である.

〔2〕〔性質〕

(1) $\log_a a = \mathbf{1}$，$\log_a 1 = \mathbf{0}$　　(答)

(2) $\log_a MN = \boldsymbol{\log_a M + \log_a N}$　　(答)

(3) $\log_a \dfrac{M}{N} = \boldsymbol{\log_a M - \log_a N}$　　(答)

(4) $\log_a M^p = \boldsymbol{p \log_a M}$　　(答)

(5) $\log_a M = \dfrac{\boldsymbol{\log_b M}}{\boldsymbol{\log_b a}}$，$\log_a b = \dfrac{1}{\boldsymbol{\log_b a}}$　　(答)

※ $\log_b a \cdot \log_a b = 1$ が成り立つ.

(6) $a^{\log_a M} = \boldsymbol{M}$　　(答)

【2】(1) $\mathbf{7 = \log_2 128}$　　(答)

(2) $\mathbf{-3 = \log_5 0.008}$　　(答)

(3) $\mathbf{0 = \log_7 1}$　　(答)

(4) $\mathbf{\dfrac{2}{5} = \log_{243} 9}$　　(答)

【3】(1) $\mathbf{10^3 = 1000}$　　(答)

(2) $\mathbf{2^{-2} = \dfrac{1}{4}}$　　(答)

(3) $\mathbf{(\sqrt{3})^4 = 9}$　　(答)

(4) $\mathbf{9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}}$　　(答)

【4】(1) $x = \log_3 729 = \log_3 3^6 = 6\log_3 3 = \mathbf{6}$　　(答)

(2) $x = \log_7 \dfrac{1}{49} = \log_7 7^{-2} = -2\log_7 7 = \mathbf{-2}$　　(答)

(3) $x^4 = 9 = 3^2 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4$，$x > 0$ より

$x = 3^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$　　(答)

(4) $x = 4^{\frac{3}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = \mathbf{8}$　　(答)

(5) $9^{\log_3 x} = 3^{2\log_3 x} = 3^{\log_3 x^2} = x^2$ より，$x^2 = 25$

$x > 0$ より，$x = \mathbf{5}$　　(答)

【5】(1) $\log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 (3 \cdot 2) = \log_6 6 = \mathbf{1}$　　(答)

(2) $\log_2 20 - \log_2 5 = \log_2 \dfrac{20}{5} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = \mathbf{2}$　　(答)

(3)
$$\begin{aligned}
&\log_5 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_5 \frac{25}{18} - \log_5 \frac{1}{\sqrt{6}} \\
=&\log_5 \sqrt{3} + \log_5 \sqrt{\frac{25}{18}} - \log_5 \frac{1}{\sqrt{6}} \\
=&\log_5 \sqrt{3} \cdot \frac{5}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6} \\
=&\log_5 5 = \mathbf{1}
\end{aligned}$$
(答)

(4)
$$\begin{aligned}
\log_2 3 \cdot \log_3 8 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} \\
&= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3} \\
&= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \\
&= \mathbf{3}
\end{aligned}$$
(答)

＜別解＞

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ を用いると

$\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 8 = \log_2 2^3 = \mathbf{3}$　　(答)

(5)
$$\begin{aligned}
&(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) \\
=&\left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) \\
=&\left(\log_2 3 + \frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2\log_2 3}\right) \\
=&2\log_2 3 \cdot \frac{5}{2\log_2 3} \\
=&\mathbf{5}
\end{aligned}$$
(答)

問題

【1】(1) グラフは〔図 1〕のようになる．

(2) $y=\log_{\frac{1}{3}}x=-\log_3 x$ より，$y=\log_3 x$ のグラフと x 軸に対して対称であるから,〔図 2〕のようになる．

(3) $y=\log_2 4x=\log_2 x+\log_2 4=\log_2 x+2$
よって，$y=\log_2 x$ を y 軸方向に 2 だけ移動したグラフであるから,〔図 3〕のようになる．

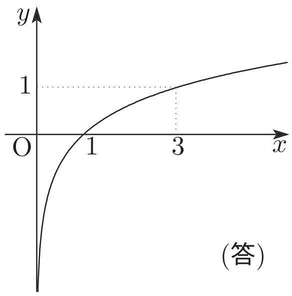
(4) $y=\log_2(2x-6)=\log_2 2(x-3)=\log_2(x-3)+\log_2 2=\log_2(x-3)+1$
よって，$y=\log_2 x$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフであるから,〔図 4〕のようになる．

(5) 与式は $x=1$ で定義されず

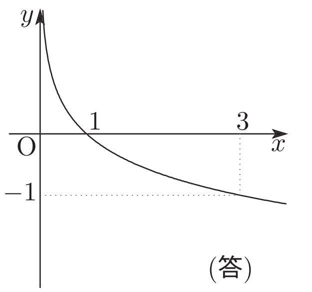
$$\begin{cases} y=\log_2(x-1) & (x>1\text{ のとき}) \\ y=\log_2(-x+1) & (x<1\text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，グラフは〔図 5〕のようになる．

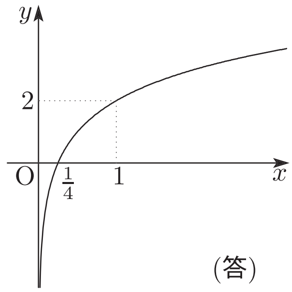
〔図 1〕



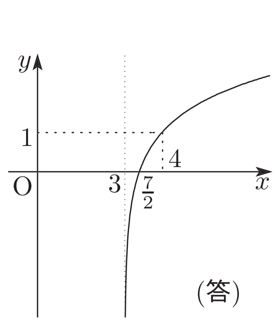
〔図 2〕



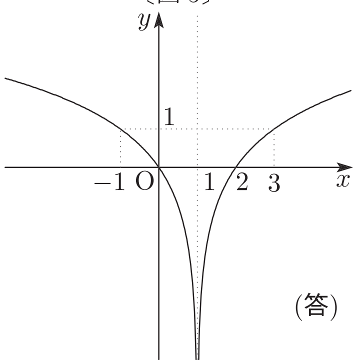
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【2】(1) 底を 2 にそろえると

$$\log_3 0.5 = \frac{\log_2 0.5}{\log_2 3} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 3} = -\frac{1}{\log_2 3}$$
$$\log_2 0.5 = \log_2 2^{-1} = -1$$
$$\log_{0.2} 0.5 = \frac{\log_2 0.5}{\log_2 0.2} = \frac{\log_2 2^{-1}}{\log_2 5^{-1}} = \frac{1}{\log_2 5}$$

ここで,

$$(\log_2 2 =)\ 1 < \log_2 3$$

より

$$1 > \frac{1}{\log_2 3}\ (> 0) \qquad \therefore\ -1 < -\frac{1}{\log_2 3} \quad \cdots\cdots①$$

また

$$-\frac{1}{\log_2 3}\ (< 0)\ < \frac{1}{\log_2 5} \quad \cdots\cdots②$$

①, ② より

$$-1 < -\frac{1}{\log_2 3} < \frac{1}{\log_2 5}$$

よって

$$\mathbf{\log_2 0.5 < \log_3 0.5 < \log_{0.2} 0.5} \qquad (答)$$

(2) 底を 2 にそろえると

$$1 = \log_2 2$$
$$\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$$
$$\log_6 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{1}{1 + \log_2 3}$$

これより

$$1 < \log_2 3$$

だから

$$\frac{1}{1 + \log_2 3} < \frac{1}{\log_2 3} < 1 < \log_2 3$$
$$\therefore\quad \mathbf{\log_6 2 < \log_3 2 < 1 < \log_2 3} \qquad (答)$$

【3】(1) $\log_{10} 80 = \log_{10}(2^3 \cdot 10) = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 10$
$= 3 \times 0.3010 + 1 = \mathbf{1.9030}$ (答)

(2) $\log_{10} \dfrac{5}{18} = \log_{10} \dfrac{10}{2^2 \cdot 3^2} = \log_{10} 10 - 2\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3$
$= 1 - 2 \times 0.3010 - 2 \times 0.4771 = \mathbf{-0.5562}$ (答)

(3)
$$\begin{aligned}\log_2 15 &= \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} \frac{10 \cdot 3}{2}}{\log_{10} 2}\\ &= \frac{\log_{10} 10 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2}{\log_{10} 2}\\ &= \frac{1 + 0.4771 - 0.3010}{0.3010} = 3.9073\cdots\\ &\fallingdotseq \mathbf{3.907}\end{aligned}$$
(答)

(4)
$$\begin{aligned}\log_6 18 &= \frac{\log_{10}(2 \cdot 3^2)}{\log_{10}(2 \cdot 3)} = \frac{\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3}{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}\\ &= \frac{0.3010 + 2 \times 0.4771}{0.3010 + 0.4771} = 1.6131\cdots\\ &\fallingdotseq \mathbf{1.613}\end{aligned}$$
(答)

(5)
$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}} 81 &= \frac{4\log_{10} 3}{\frac{1}{2}\log_{10} 2} = \frac{4 \times 0.4771}{\frac{1}{2} \times 0.3010} = 12.680\cdots\\ &\fallingdotseq \mathbf{12.68}\end{aligned}$$
(答)

(6)
$$\begin{aligned}\log_{100} 20 &= \frac{\log_{10}(2 \cdot 10)}{\log_{10} 10^2} = \frac{\log_{10} 2 + \log_{10} 10}{2}\\ &= \frac{0.3010 + 1}{2} = \mathbf{0.6505}\end{aligned}$$
(答)

【4】与式より

$$10^x = \log_2\left(10^{\log_2 10}\right) = \log_2 10 \cdot \log_2 10 = (\log_2 10)^2$$
$$= \left(\frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\log_{10} 2}\right)^2$$

よって

$$10^{-x} = \left(\frac{1}{\log_{10} 2}\right)^{-2} = (\log_{10} 2)^2 = (0.3010)^2$$
$$\fallingdotseq \mathbf{0.0906} \qquad (答)$$

【5】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

与式より

$$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

であり，これは①をみたすから

$$\boldsymbol{x = \sqrt{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(2) 底の条件より，

$$0 < x < 1,\ x > 1 \quad \cdots ①$$

与式より，

$$x^{-2} = 9 \iff x^2 = \frac{1}{9} \qquad \therefore\ x = \pm\frac{1}{3}$$

①より

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}} \qquad \textbf{(答)}$$

(3) 真数条件より，

$$x^2 - 3x - 10 > 0 \iff (x-5)(x+2) > 0 \quad \therefore\ x < -2,\ x > 5$$
$$x - 2 > 0 \qquad \therefore\ x > 2$$

よって，

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

また，与式の左辺は

$$\log_4(x^2 - 3x - 10) = \frac{\log_2(x^2 - 3x - 10)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 3x - 10)$$

なので，与式は

$$\log_2(x^2 - 3x - 10) = \log_2(x-2)^2$$

よって，

$$x^2 - 3x - 10 = (x-2)^2 \iff x = 14$$

これは ① をみたすから

$$\boldsymbol{x = 14} \qquad (答)$$

(4) 真数条件より，

$$x-1>0,\ x+5>0$$

よって，

$$x>1 \quad \cdots ①$$

$$\log_4(x+5)=\frac{\log_2(x+5)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x+5)$$

だから，与式は

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(x+5) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\log_2(x-1)=\log_2(x+5)\\ &\Longleftrightarrow \quad \log_2(x-1)^2=\log_2(x+5)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}(x-1)^2=x+5 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-2x+1=x+5\\ &\Longleftrightarrow \quad x^2-3x-4=0\\ &\Longleftrightarrow \quad (x-4)(x+1)=0\\ &\quad\ \therefore \quad\ \ x=4,\ -1\end{aligned}$$

これと①より

$$\boldsymbol{x=4} \qquad \textbf{(答)}$$

(5) 真数条件より

$$x>0,\ x+2>0$$

よって，　$x>0 \quad \cdots ①$

与えられた方程式の底を 3 に変換して，

$$\begin{aligned}\log_3 x=\frac{\log_3(x+2)}{\log_3 9} \quad &\Longleftrightarrow \quad \log_3 x=\frac{1}{2}\log_3(x+2)\\ &\Longleftrightarrow \quad 2\log_3 x=\log_3(x+2)\\ &\Longleftrightarrow \quad \log_3 x^2=\log_3(x+2)\end{aligned}$$

したがって

$$x^2=x+2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-x-2=0$$

より，

$$(x-2)(x+1)=0 \qquad \therefore x=2,\ -1$$

したがって，①より

$$\boldsymbol{x=2} \qquad \textbf{(答)}$$

【6】(1) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は 1 より大きいから

$$x \leqq 27$$

これと①より

$$\mathbf{0 < x \leqq 27} \qquad (\text{答})$$

(2) 真数条件より

$$x > 0 \quad \cdots ①$$

底は 1 より小さいから

$$x < (0.1)^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000$$

これと①より

$$\mathbf{0 < x < 1000} \qquad (\text{答})$$

(3) 真数条件より

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$
$$(x-5)(x+3) > 0 \qquad \therefore \quad x < -3,\ x > 5$$
$$3x - 9 > 0 \qquad \therefore \quad x > 3$$

よって

$$x > 5 \quad \cdots ①$$

与式の対数の底は両辺ともに 1 より小さいので

$$x^2 - 2x - 15 < 3x - 9$$
$$x^2 - 5x - 6 < 0$$
$$(x-6)(x+1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < x < 6$$

よって

$$\mathbf{5 < x < 6} \qquad (\text{答})$$

(4) $x^2-8x+6=0$ の解は

$$x=4\pm\sqrt{10}$$

だから，真数条件より

$$\frac{1}{2}<x<4-\sqrt{10},\ x>4+\sqrt{10}\quad\cdots①$$

$$\begin{aligned}\log_4(x^2-8x+6)&=\frac{\log_2(x^2-8x+6)}{\log_2 4}\\&=\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6)\end{aligned}$$

より，与式は

$$\begin{aligned}\log_2(2x-1)&>\frac{1}{2}\log_2(x^2-8x+6)\\2\log_2(2x-1)&>\log_2(x^2-8x+6)\\\log_2(2x-1)^2&>\log_2(x^2-8x+6)\end{aligned}$$

底は 1 より大きいから

$$\begin{aligned}(2x-1)^2&>x^2-8x+6\\4x^2-4x+1&>x^2-8x+6\\3x^2+4x-5&>0\end{aligned}$$

これより

$$x<\frac{-2-\sqrt{19}}{3},\ x>\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$$

ここで，$4-\sqrt{10}$ と $\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}$ の大小を比較する．
$\sqrt{19}<\sqrt{19.36}=4.4$ より，

$$\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<\frac{-2+4.4}{3}=\frac{4}{5}$$

また，

$$4-\sqrt{10}-\frac{4}{5}=\frac{16-5\sqrt{10}}{5}>0\qquad\left(\because\ 16^2=256>250=\left(5\sqrt{10}\right)^2\right)$$

よって，$\dfrac{-2+\sqrt{19}}{3}<4-\sqrt{10}$
これと ① より

$$\boldsymbol{\frac{-2+\sqrt{19}}{3}<x<4-\sqrt{10},\ x>4+\sqrt{10}}\qquad\text{(答)}$$

(5) 真数条件より

$$x-2>0 \qquad \therefore \quad x>2$$
$$x+4>0 \qquad \therefore \quad x>-4$$

よって

$$x>2 \quad \cdots ①$$

与式の対数の底はともに 1 より小さいから

$$\begin{aligned}(x-2)^2<x+4 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2-5x<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(x-5)<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0<x<5\end{aligned}$$

これと①より

$$\boldsymbol{2<x<5} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) グラフは〔図 1〕のようになる.

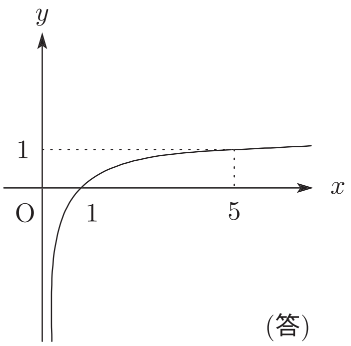
(2) $y=\log_{\frac{1}{5}} x=\dfrac{\log_5 x}{\log_5 \frac{1}{5}}=\dfrac{\log_5 x}{-1}=-\log_5 x$

よって，$y=\log_5 x$ と x 軸について対称なグラフとなり,〔図 2〕のようになる.

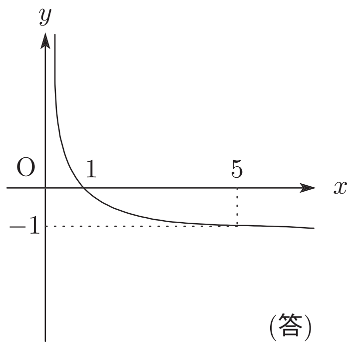
(3) $y=\log_5 x-\log_5 5=\log_5 x-1$

よって，$y=\log_5 x$ を y 軸正方向に -1 だけ平行移動したグラフとなり,〔図 3〕のようになる.

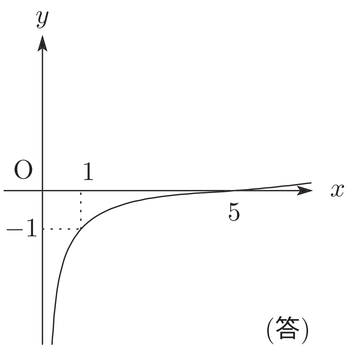
〔図 1〕



〔図 2〕



〔図 3〕



【2】(1) 底が $(0<)0.5(<1)$ であるから，対数の大小は真数の大小の逆になる．
したがって，

$$\mathbf{\log_{0.5} 5 < \log_{0.5} 3 < \log_{0.5} 0.2} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{3}{2} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \log_3 3\sqrt{3}$$

ここで，$16 < 27$ より，$4 < 3\sqrt{3}$
底が $3(>1)$ であるから，対数の大小は真数の大小と一致する．
よって

$$\log_3 4 < \log_3 3\sqrt{3} \qquad \therefore\ \log_3 4 < \frac{3}{2}$$

また，

$$\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 2\sqrt{2}$$

ここで，$8 < 9$ より，$2\sqrt{2} < 3$
底が $2(>1)$ であるから，対数の大小は真数の大小と一致する．
よって

$$\log_2 2\sqrt{2} < \log_2 3 \qquad \therefore\ \frac{3}{2} < \log_2 3$$

以上から

$$\mathbf{\log_3 4 < \frac{3}{2} < \log_2 3} \qquad \text{(答)}$$

(3) $1 < a < b$ で，底を a とする対数をとると

$$0 < 1 < \log_a b \qquad \therefore\ \log_a b - 1 > 0 \quad \cdots ①$$

いま

$$\log_a x - \log_b x = \log_a x - \frac{\log_a x}{\log_a b} = (\log_a x) \cdot \frac{\log_a b - 1}{\log_a b} \qquad \cdots ②$$

① より

$$\frac{\log_a b - 1}{\log_a b} > 0$$

であるから，$\log_a x$ の正，0，負に応じて，② も正，0，負となる．
したがって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{x > 1} \text{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x > \log_b x} \\ \boldsymbol{x = 1} \text{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x = \log_b x} \\ \boldsymbol{0 < x < 1} \text{ のとき} & \boldsymbol{\log_a x < \log_b x} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 真数条件より

$$\begin{cases} 1-4x>0 \\ 1+x>0 \\ 5x+4>0 \end{cases} \qquad \therefore\ -\frac{4}{5}<x<\frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

このもとで

$$\begin{aligned} \log_2(1-4x)+\log_2(1+x) &= 2\log_4(5x+4) \\ \log_2(1-4x)(1+x) &= 2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{\log_2 4} \\ \log_2(1-3x-4x^2) &= 2\cdot\frac{\log_2(5x+4)}{2} \\ \log_2(1-3x-4x^2) &= \log_2(5x+4) \\ \therefore\ 1-3x-4x^2 &= 5x+4 \\ 4x^2+8x+3 &= 0 \\ (2x+1)(2x+3) &= 0 \qquad \therefore\ x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

① を考慮して

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}} \qquad (答)$$

(2) 真数条件より

$$\begin{cases} x^2-x+1>0 & \cdots ① \\ x+4>0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

これは，すべての実数 x について成立する．
② より，

$$x+4>0 \qquad \therefore\ x>-4\ \cdots(*)$$

以上より，

$$\therefore\ x>-4$$

このもとで，$0<a<1$ より

$$\begin{aligned} x^2-x+1 &> x+4 \\ x^2-2x-3 &> 0 \\ (x+1)(x-3) &> 0 \qquad \therefore\ x<-1,\ 3<x \end{aligned}$$

$(*)$ を考慮し，

$$\boldsymbol{-4<x<-1,\ 3<x} \qquad (答)$$

M1T

高１難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	