

本科 1 期 7 月度

解答

Z 会東大進学教室

高 1 東大数学 K



1 1 章 確率 (1) —確率とその性質—

問題

【1】 全事象を U , スペードのカードをとり出す事象を A , 絵札のカードをとり出す事象を B とする.

このとき,

$$n(U) = 52, n(A) = 13, n(B) = 12$$

(1)

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(U)} \\ &= \frac{13}{52} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{n(B)}{n(U)} \\ &= \frac{12}{52} \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

(3)

$$n(A \cap B) = 3$$

よって

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= \frac{3}{52} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 13 + 12 - 3 \\ &= 22 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(U)} \\ &= \frac{22}{52} \\ &= \frac{11}{26} \end{aligned}$$

- 【2】 (1) 40 人のクラスから 3 人の委員を選出す (2) 男子 1 人, 女子 2 人が選ばれる方法はある方法は

$${}_{22}C_1 \times {}_{18}C_2 = 3366(\text{通り})$$

$${}_{40}C_3 = 9880(\text{通り})$$

よって

3 人とも男子が選ばれる方法は

$$\frac{3366}{9880} = \frac{1683}{4940}$$

$${}_{22}C_3 = 1540(\text{通り})$$

よって

$$\frac{1540}{9880} = \frac{77}{494}$$

- (3) A 君が必ず選ばれるためには, 残りの 39 人から 2 人選ぶ確率を考えればよい.
残り 2 人の選び方は

$${}_{39}C_2(\text{通り})$$

なので

$$\frac{1 \times {}_{39}C_2}{{}_{40}C_3} = \frac{3}{40}$$

【3】

〔出た目の和〕

大 \ 小	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

〔出た目の積〕

大 \ 小	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

- (1) 目の和が 6 になるのは

$$(\text{大}, \text{小}) = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$$

なので

$$\frac{5}{36}$$

- (2) 目の和が 5 以下になるのは

$$(\text{大}, \text{小}) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$$

なので

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(3) 目の積が 20 以上になるのは

(大, 小) = (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

なので

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

【4】 (1) $x^2 + ax + b = 0$ が重解を持つのは,

判別式 $D = 0$ になるときである.

$$D = a^2 - 4b = 0$$

なので

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &= 0 \\ a^2 &= 4b \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

① を満たす a, b は

$$(a, b) = (2, 1), (4, 4)$$

である. よって

$$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

(2) 異なる 2 つの解をもつのは $D > 0$ になるときである.

$$D = a^2 - 4b > 0$$

なので

$$\begin{aligned} a^2 - 4b &> 0 \\ a^2 &> 4b \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

② を満たす a, b は

$$\begin{aligned} (a, b) = & (3, 1), (3, 2) \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3) \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ & (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{aligned}$$

である.

よって

$$\frac{17}{36}$$

(3) 解を持たないのは, (1), (2) より

$$1 - \left(\frac{1}{18} + \frac{17}{36} \right) = \frac{17}{36}$$

【5】(1) 9 個から 4 個取り出すのは

$${}_9C_4 = 126(\text{通り})$$

白を 4 個取り出すのは

$${}_4C_4 = 1(\text{通り})$$

よって

$$\frac{1}{126}$$

(2) 「少なくとも 1 個は赤である」という事象の余事象は「すべて白である」という事象なので、これを考える.

「すべて白である」確率は, (1) より

$$\frac{1}{126}$$

なので

$$1 - \frac{1}{126} = \frac{125}{126}$$

(3) 取り出した球が同じ色であるためには (4) 「赤球も白球もともに含まれている」

という事象の余事象は「すべて同じ色である」という事象である.

すべて同じ色になる確率は, (3) より

$$\frac{1}{21}$$

よって

$$1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

(i) すべて赤

(ii) すべて白

のどちらかである.

(i) のとき

$$\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{126}$$

(ii) のとき

$$(1) \text{ より, } \frac{1}{126}$$

よって, (i), (ii) より

$$\frac{5}{126} + \frac{1}{126} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$$

【6】(1) 1~15 のくじから 2 本選ぶのは,

$${}_{15}C_2 = 105(\text{通り})$$

11~15 のくじから 2 本選ぶのは,

$${}_5C_2 = 10(\text{通り})$$

よって, 求める確率は

$$\frac{10}{105} = \frac{2}{21}$$

(2) 同じ段にあるということは

(i) 第 2 段にある (ii) 第 3 段にある (iii) 第 4 段にある (iv) 第 5 段にある

のいずれかである.

(i) のとき

(ii) のとき

(iii) のとき

(iv) のとき

$$\begin{aligned} \frac{{}_2C_2}{{}_{15}C_2} &= \frac{1}{{}_{15}C_2} & \frac{{}_3C_2}{{}_{15}C_2} &= \frac{{}_3C_1}{{}_{15}C_2} & \frac{{}_4C_2}{{}_{15}C_2} &= \frac{6}{105} & (1) \text{ より, } \frac{10}{105} \\ &= \frac{1}{105} & &= \frac{3}{105} & & & \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii), (iv) より

$$\frac{1}{105} + \frac{3}{105} + \frac{6}{105} + \frac{10}{105} = \frac{20}{105} = \frac{4}{21}$$

(3) 「少なくとも 1 個が 1~6 である」という事象の余事象は「2 つとも 7~15 である」という事象である.

この確率は

$$\frac{{}_9C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{36}{105} = \frac{12}{35}$$

よって

$$1 - \frac{12}{35} = \frac{\mathbf{23}}{\mathbf{35}}$$

(4) 2 個の円が真横に接するのは,

第 2 段で 1 組
第 3 段で 2 組
第 4 段で 3 組
第 5 段で 4 組

あるので

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10(\text{組})$$

同様にして, 斜めに接するのは,

右下がりのとき

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10(\text{組})$$

右上がりのとき

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10(\text{組})$$

よって, 求める確率は

$$\frac{10 + 10 + 10}{105} = \frac{30}{105} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$$

【7】 (1) 5 枚のカードの並べ方は

$$5! = 120(\text{通り})$$

一の位が 1 であるのは

$$1 \times 4! = 24(\text{通り})$$

よって

$$\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

(2)

(i) 一の位が 1 のとき

(ii) 一の位が 5 のとき

を考える.

(i) (1) より, 24(通り)

(ii) (1) と同じなので, 24(通り)

よって, (i), (ii) より

$$\frac{24 + 24}{120} = \frac{2}{5}$$

(3) 1 と 5 が両端にくるのは

(i) 一万の位が 1, 一の位が 5

(ii) 一万の位が 5, 一の位が 1

のときであり, それぞれの場合の数は

$$(i) \quad 1 \times 3! \times 1 = 6(\text{通り})$$

$$(ii) \quad 1 \times 3! \times 1 = 6(\text{通り})$$

よって, (i), (ii) より

$$\frac{6 + 6}{120} = \frac{1}{10}$$

(4) 40000 以上の数は

(i) 一万の位が 4

(ii) 一万の位が 5

のときであり, それぞれの場合の数は

$$(i) \quad 1 \times 4! = 24(\text{通り})$$

$$(ii) \quad 1 \times 4! = 24(\text{通り})$$

よって, (i), (ii) より

$$\frac{24 + 24}{120} = \frac{2}{5}$$

(5) 32000 以上 40000 未満の数は、一万の (6) 32000 以上の数は

位が 3 で

- (i) 千の位が 2
- (ii) 千の位が 4
- (iii) 千の位が 5

のときである.

(i) のときの場合の数は,

$$1 \times 1 \times 3! = 6(\text{通り})$$

(ii) のとき, (iii) のとき, ともに (i) と同様なので, それぞれの場合の数は, 6(通り)

(i), (ii), (iii) より

$$6 \times 3 = 18(\text{通り})$$

よって

$$\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

(i) 32000 以上 40000 未満

(ii) 40000 以上

のときであり, それぞれの場合の数は

(i) (5) より, 18(通り)

(ii) (4) より, 48(通り)

なので, (i), (ii) より

$$18 + 48 = 66(\text{通り})$$

よって

$$\frac{66}{120} = \frac{11}{20}$$

【8】 (1) 5 枚のカードを 1 列に並べる方法は

$${}_7P_5 = 2520(\text{通り})$$

5 桁の整数をつくるためには, 一万の位は 1~6, 千の位以下はそれ以外の数なので

$${}_6P_1 \times {}_6P_4 = 2160(\text{通り})$$

よって

$$\frac{2160}{2520} = \frac{6}{7}$$

(2) 5 桁の偶数をつくるためには, 一の位が 0, 2, 4, 6 になればよい.

(i) 一の位が 0 になる

(ii) 一の位が 2, 4, 6 になる

の場合を考える.

(i) のとき

一万の位から十の位までには0以外の6枚のカードから4枚を選んで並べればよいので

$$1 \times {}_6P_4 = 360(\text{通り})$$

(ii) のとき

一の位は3通りある. 一万の位には, 一の位に使った数字と0以外の5通りあり, 千の位, 百の位, 十の位には, それ以外の5枚のカードから3枚を選んで並べればよいので

$$3 \times 5 \times {}_5P_3 = 900(\text{通り})$$

よって, (i), (ii) より

$$360 + 900 = 1260(\text{通り})$$

したがって

$$\frac{1260}{2520} = \frac{1}{2}$$

(3) 1と0以外の数の選び方は

$$\begin{aligned} {}_5C_3 &= {}_5C_2 \\ &= 10(\text{通り}) \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで,

$$a, a, b, c, d$$

を並べることを考える. この場合の数は

$$\frac{5!}{2!} = 60(\text{通り})$$

このとき, 左にある a を1, 右にある a を0に対応させて, b, c, d には残りの数字を対応させればよいので, ①より

$$60 \times 10 = 600(\text{通り})$$

よって, 確率は

$$\frac{600}{2520} = \frac{5}{21}$$

(4) (i) 0 を含むとき

$${}_4C_2 = 6(\text{通り})$$

そのそれぞれについて 1 と 2 をひとかたまりと考えると 5 桁の整数は

$$\begin{aligned} 3 \times {}_3P_3 &= 3 \times 3! \\ &= 18(\text{通り}) \end{aligned}$$

その各々に対して 1, 2 の並び方が

$$\begin{aligned} {}_2P_2 &= 2! \\ &= 2(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって, 0 を含み 1 と 2 が隣り合う場合の数は

$$6 \times 18 \times 2 = 216(\text{通り})$$

(ii) 0 を含まないとき

$$\begin{aligned} {}_4C_3 &= {}_4C_1 \\ &= 4(\text{通り}) \end{aligned}$$

そのそれぞれについて 1 と 2 をひとかたまりと考えると 5 桁の整数は

$$\begin{aligned} {}_4P_4 &= 4! \\ &= 24(\text{通り}) \end{aligned}$$

その各々に対して 1, 2 の並び方が

$$\begin{aligned} {}_2P_2 &= 2! \\ &= 2(\text{通り}) \end{aligned}$$

よって, 0 を含まず 1 と 2 が隣り合う場合の数は

$$4 \times 24 \times 2 = 192(\text{通り})$$

(i), (ii) より, 求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{216 + 192}{{}_7P_5} &= \frac{408}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \\ &= \frac{17}{105} \end{aligned}$$

- 【9】 (1) 出る目の最大値が3以下になるのは (2) 出た目の最大値が2以下になるのは
「すべての目が3以下になる」 「すべての目が2以下になる」

ということなので

$$\left(\frac{3}{6}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ = \frac{1}{16}$$

ということなので

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

よって, (1) より

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{81} = \frac{65}{1296}$$

- 【10】 (1) M が偶数になるのは

(i) $M = 2$

(ii) $M = 4$

(iii) $M = 6$

の場合である.

- (i) $M \leq 2$ である事象を考える.

$M \leq 2$ になるためには, 3個とも2以下の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{2^3}{6^3} = \frac{8}{216}$$

また, $M \leq 1$ である事象を考える.

$M \leq 1$ になるためには, 3個とも1以下の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{1^3}{6^3} = \frac{1}{216}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{8}{216} - \frac{1}{216} = \frac{7}{216}$$

- (ii) $M \leq 4$ である事象を考える.

$M \leq 4$ になるためには, 3個とも4以下の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{4^3}{6^3} = \frac{64}{216}$$

また, $M \leq 3$ である事象を考える.

$M \leq 3$ になるためには, 3個とも3以下の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{27}{216}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{64}{216} - \frac{27}{216} = \frac{37}{216}$$

(iii) $M \leq 6$ である事象を考える.

$M \leq 6$ になるためには, 3 個とも 6 以下の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{6^3}{6^3} = \frac{216}{216}$$

また, $M \leq 5$ である事象を考える.

$M \leq 5$ になるためには, 3 個とも 5 以下の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{216}{216} - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

よって, (i), (ii), (iii) より, 求める確率は

$$\frac{7}{216} + \frac{37}{216} + \frac{91}{216} = \frac{5}{8}$$

(2) $m \geq 4$ である事象を考える.

$m \geq 4$ になるためには 3 個とも 4 以上の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{3^3}{6^3} = \frac{27}{216}$$

また, $m \geq 5$ である事象を考える.

$m \geq 5$ になるためには 3 個とも 5 以上の目が出るという事象で, その確率は

$$\frac{2^3}{6^3} = \frac{8}{216}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{27}{216} - \frac{8}{216} = \frac{19}{216}$$

(3) $M - m = 1$ となるのは

$$(M, m) = (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$$

のときである.

$(M, m) = (6, 5)$ のとき, 3 個とも 5 以上 6 以下の目でなければならない. さらに, 3 個とも 5 の目や 3 個とも 6 の目は条件に合わないので除かねばならない.

よって, $(M, m) = (6, 5)$ となる確率は

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$$

他の $(M, m) = (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)$ となる確率も同様にして

$$\frac{1}{36}$$

だから, 求める確率は

$$\frac{1}{36} \times 5 = \frac{5}{36}$$

1 2 章 確率 (2) —確率と独立試行・反復試行—

問題

【1】(1) 9 個から 2 個取り出す方法は

$${}_9C_2 = 36(\text{通り})$$

2 個とも赤の場合

$${}_4C_2 = 6(\text{通り})$$

よって

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) 2 個とも同じ色の球であるという事象は,

3 つの事象

A : 赤球 2 個

B : 白球 2 個

C : 黒球 2 個

の和事象であり, これらは互いに排反である.

A が起こる確率は, (1) より

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

B が起こる確率は

$$P(B) = \frac{{}_2C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{36}$$

C が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} \\ &= \frac{{}_3C_1}{{}_9C_2} \\ &= \frac{3}{36} \end{aligned}$$

よって, 求める確率は, 確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= \frac{6}{36} + \frac{1}{36} + \frac{3}{36} \\ &= \frac{10}{36} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

(3) 9 個から 3 個取り出す方法は

$${}_9C_3 = 84(\text{通り})$$

2 個だけが赤球であるという事象は, 2 つの事象

D : 赤球 2 個, 白球 1 個, 黒球 0 個

E : 赤球 2 個, 白球 0 個, 黒球 1 個

の和事象であり、これらは互いに排反である.

D が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(D) &= \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_0}{{}_9C_3} \\&= \frac{2}{14}\end{aligned}$$

E が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(E) &= \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_0 \times {}_3C_1}{{}_9C_3} \\&= \frac{3}{14}\end{aligned}$$

よって、求める確率は、確率の加法定理より

$$\begin{aligned}P(D \cup E) &= P(D) + P(E) \\&= \frac{2}{14} + \frac{3}{14} \\&= \frac{5}{14}\end{aligned}$$

- (4) 3 個とも色が異なるということは、赤球 1 個、白球 1 個、黒球 1 個を取り出すということなので、その場合の数は

$${}_4C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 4 \times 2 \times 3 = 24(\text{通り})$$

よって

$$\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

【2】 (1) A 君が当たりくじを引く確率は、 $\frac{3}{10}$

- (2) B さんが当たりくじを引く事象は、2 つの事象

D : A 君が当たり、B さんは当たり

E : A 君がはずれ、B さんは当たり

の和事象であり、これらは互いに排反である.

D が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(D) &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \\&= \frac{1}{15}\end{aligned}$$

E が起こる確率は

$$\begin{aligned}P(E) &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \\&= \frac{7}{30}\end{aligned}$$

よって、求める確率は、確率の加法定理より

$$\begin{aligned}P(D \cup E) &= P(D) + P(E) \\&= \frac{1}{15} + \frac{7}{30} \\&= \frac{9}{30} \\&= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

- (3) A 君, B さんの 1 人だけが当たりくじを引く事象は, 2 つの事象

F : A 君が当たり, B さんははずれ

G : A 君がはずれ, B さんは当たり

の和事象であり, これらは互いに排反である.

F が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

G が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(G) &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

よって, 求める確率は, 確率の加法定理より

$$\begin{aligned} P(F \cup G) &= P(F) + P(G) \\ &= \frac{7}{30} + \frac{7}{30} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

- (4) C 君が当たりくじを引く事象は, 4 つの事象

H : A 君が当たり, B さんも当たり, C 君も当たる

I : A 君が当たり, B さんがはずれ, C 君は当たる

J : A 君がはずれ, B さんは当たり, C 君も当たる

K : A 君がはずれ, B さんもうはずれ, C 君は当たる

の和事象である.

H が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{6}{720} \end{aligned}$$

I が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(I) &= \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} \\ &= \frac{42}{720} \end{aligned}$$

J が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(J) &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \\ &= \frac{42}{720} \end{aligned}$$

K が起こる確率は

$$\begin{aligned} P(K) &= \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{126}{720} \end{aligned}$$

よって、求める確率は、確率の加法定理より

$$\begin{aligned}P(H \cup I \cup J \cup K) &= P(H) + P(I) + P(J) + P(K) \\&= \frac{6}{720} + \frac{42}{720} + \frac{42}{720} + \frac{126}{720} \\&= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

【3】(1) 1 以外の目が出る確率は

$$\frac{5}{6}$$

3 回連続でサイコロを投げる試行は独立であるから、求める確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

(2) 1 回目に 3 以下が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2 回目に偶数が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3 回目に 4 以上が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

(3) 出る目の積が 5 の倍数になるためには、(4) 出る目の積が 3 の倍数になるためには
3 回投げたうち、少なくとも 1 回 5 の 3 回投げたうち、少なくとも 1 回は 3
目が出ればよい。 と 6 の目のどちらかが出ればよい。

1 回も 5 の目が出ない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

なので、求める確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

3 の目と 6 の目が 1 回も出ない確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

なので、求める確率は

$$1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

【4】(1) P がはずれる確率は

$$\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

Q が当たる確率は

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

R が当たる確率は

$$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

このくじを引く試行は独立だから、求める確率は

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125}$$

- (2) 「少なくとも 1 人が当たる」という事象の余事象は「1 人も当たらない」という事象である. この確率は

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$$

よって, 求める確率は

$$1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

- 【5】(1) 1つのサイコロを振って偶数が出る確率は

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

サイコロを振る試行は独立だから, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- (2) A の箱から白球が取り出される確率は

$$\frac{{}_4C_1}{{}_{10}C_1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

サイコロを振る試行と箱から 1 球取り出す試行は独立だから, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

- (3) 2つのサイコロの目のうち少なくとも 1 つが奇数であり, かつ B の箱から白球が取り出される確率を求めればよい. 2つのサイコロの目のうち少なくとも 1 つが奇数である確率は

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

B の箱から白球が取り出される確率は

$$\frac{{}_7C_1}{{}_{10}C_1} = \frac{7}{10}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$$

- (4) A の箱から白球が取り出される事象と B の箱から白球が取り出される事象は排反だから, 確率の加法定理より, 求める確率は

$$\frac{1}{10} + \frac{21}{40} = \frac{5}{8}$$

- 【6】射手が撃つ試行は独立である.

- (1) 射手が命中させる確率は

$$\frac{3}{5}$$

2 発とも命中する確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

- (2) 余事象を考える.

「2 発とも命中しない」確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

よって, 求める確率は

$$1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

【7】 グー, チョキ, パーの出る確率は, それぞれ $\frac{1}{3}$ である.

(1) A だけが勝つ場合は

$$(A, B, C) = (\text{パ}, \text{グ}, \text{グ}), (\text{グ}, \text{チ}, \text{チ}), (\text{チ}, \text{パ}, \text{パ})$$

の 3 通りである.

(i) 事象 $D : (A, B, C) = (\text{パ}, \text{グ}, \text{グ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ii) 事象 $E : (A, B, C) = (\text{グ}, \text{チ}, \text{チ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(iii) 事象 $F : (A, B, C) = (\text{チ}, \text{パ}, \text{パ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(F) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

事象 D, E, F は排反だから, 加法定理より, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(D \cup E \cup F) &= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(2) A が勝つのは,

(i) 事象 $X : A$ だけが勝つ

(ii) 事象 $Y : A, B$ が勝つ

(iii) 事象 $Z : A, C$ が勝つ

のときである.

(i) のとき, (1) より

$$P(X) = \frac{1}{9}$$

(ii) のとき,

$$(A, B, C) = (\text{パ}, \text{パ}, \text{グ}), (\text{グ}, \text{グ}, \text{チ}), (\text{チ}, \text{チ}, \text{パ})$$

である.

(ア) 事象 $G : (A, B, C) = (\text{パ}, \text{パ}, \text{グ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(G) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(イ) 事象 $H : (A, B, C) = (\text{グ}, \text{グ}, \text{チ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(H) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ウ) 事象 $I : (A, B, C) = (\text{チ}, \text{チ}, \text{パ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(I) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ア), (イ), (ウ) は排反なので, 加法定理より, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(G \cup H \cup I) \\ &= P(G) + P(H) + P(I) \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(iii) のとき

$$(A, B, C) = (\text{パ}, \text{グ}, \text{パ}), (\text{グ}, \text{チ}, \text{グ}), (\text{チ}, \text{パ}, \text{チ})$$

である. (ii) と同様にして

$$P(Z) = \frac{1}{9}$$

(i), (ii), (iii) は互いに排反なので, 加法定理より, 求める確率は,

$$\begin{aligned} P(X \cup Y \cup Z) &= P(X) + P(Y) + P(Z) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3) 勝負がつかないのは

(i) 事象 $J : A, B, C$ がともにグーかパーかチョキ

(ii) 事象 $K : A, B, C$ がみな異なるものを出す
のときである.

(i) のとき

(ア) 事象 $L : (A, B, C) = (\text{グ}, \text{グ}, \text{グ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(L) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(イ) 事象 $M : (A, B, C) = (\text{ハ}, \text{ハ}, \text{ハ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ウ) 事象 $N : (A, B, C) = (\text{チ}, \text{チ}, \text{チ})$

このときの確率は

$$\begin{aligned} P(N) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

(ア), (イ), (ウ) は排反なので, 加法定理より

$$\begin{aligned} P(J) &= P(L \cup M \cup N) \\ &= P(L) \cup P(M) \cup P(N) \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(ii) のとき

A, B, C がみな異なるものを出す場合の数は

$$3! = 6(\text{通り})$$

そのうちの1つの確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

A, B, C がみな異なるものを出す場合は, それぞれ排反だから

$$\begin{aligned} P(K) &= \frac{1}{27} \times 6 \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

(i), (ii) は排反なので, 加法定理より

$$\begin{aligned} P(J \cup K) &= P(J) + P(K) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 【8】(1) 硬貨を投げるとき、表が出る確率と裏が出る確率は、それぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ なので、求める確率は、

$${}^7C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = {}^7C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{128}$$

- (2) 「少なくとも 1 枚が表になる」という事象の余事象は「すべて裏になる」という事象である.

すべて裏になる確率は, $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

よって、求める確率は

$$1 - \frac{1}{128} = \frac{127}{128}$$

- (3) 「少なくとも 2 枚が裏になる」という事象の余事象は「すべて表が出る、または 1 枚だけ裏が出る」という事象である.

(i) すべて表になる確率は, $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

(ii) 1 枚だけ裏が出る確率は

$${}^7C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{7}{128}$$

(i), (ii) は互いに排反なので、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{128} + \frac{7}{128}\right) = \frac{15}{16}$$

- (4) 「表も裏も少なくとも 1 枚ある」という事象の余事象は「すべて裏が出る、もしくはすべて表が出る」という事象である.

(i) すべて表の確率は, $\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

(ii) すべて裏の確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

(i), (ii) は排反なので、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{128} + \frac{1}{128}\right) = \frac{63}{64}$$

- 【9】 (1) 14個の中から5個を同時に取り出す方 (2) 箱から球を1個取り出したときに、赤球、白球、青球が出る確率は、それぞれ

$${}_{14}C_5(\text{通り})$$

$$\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$$

である.

である.

赤球が1個, 白球が2個, 青球が2個
取り出す方法は

5回の試行で, 赤球が1回, 白球が2回, 青球が2回取り出されるとき, その取り出し方は

$${}_4C_1 \times {}_4C_2 \times {}_6C_2(\text{通り})$$

$$\frac{5!}{1!2!2!}(\text{通り})$$

である.

それぞれの確率は, いずれも

よって, 求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_2 \times {}_6C_2}{{}_{14}C_5} = \frac{180}{1001}$$

$$\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

これらは互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{5!}{1!2!2!} \times \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{2160}{16807}$$

- (3) 「同じ色の球が出る」というのは「2回とも赤球が出るまたは2回とも白球が出るまたは2回とも青球が出る」ということである.

$$(i) \quad 2回とも赤球が出る確率は, \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

$$(ii) \quad 2回とも白球が出る確率は, \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49}$$

$$(iii) \quad 2回とも青球が出る確率は, \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$$

(i), (ii), (iii) は互いに排反なので, 求める確率は

$$\frac{4}{49} + \frac{4}{49} + \frac{9}{49} = \frac{17}{49}$$

- (4) 「白球が4回以上取り出される」ということは「白球が4回取り出されるまたは白球が5回取り出される」ということである.

(i) 白球が4回, 赤球が1回出る確率は

$${}_5C_4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) = {}_5C_1 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{160}{16807}$$

(ii) 白球が4回, 青球が1回出る確率は

$${}_5C_4 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) = {}_5C_1 \times \left(\frac{2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{3}{7}\right) = \frac{240}{16807}$$

(iii) 白球が5回出る確率は

$$\left(\frac{2}{7}\right)^5 = \frac{32}{16807}$$

(i), (ii), (iii) は互いに排反なので, 求める確率は

$$\frac{160}{16807} + \frac{240}{16807} + \frac{32}{16807} = \frac{432}{16807}$$

【10】 (1) A が4勝するとき, その確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

- (2) 「5ゲームをやってAが先に4勝する」ということは「4ゲームまでにAが3勝し, 5ゲーム目にAが勝つ」ということであり

$${}_4C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} = {}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} \\ = \frac{64}{243}$$

- (3) 「6ゲームをやってAが先に4勝する」ということは「5ゲームまでにAが3勝し, 6ゲーム目にAが勝つ」ということであり

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = {}_5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \\ = \frac{160}{729}$$

- (4) 「7ゲームをやってAが先に4勝する」ということは「6ゲームまでにAが3勝し, 7ゲーム目にAが勝つ」ということであり

$${}_6C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{320}{2187}$$

- (5) A が先に4勝するという事象は, 4つの事象

4ゲーム目にAが先に4勝する

5ゲーム目にAが先に4勝する

6ゲーム目にAが先に4勝する

7ゲーム目にAが先に4勝する

の和事象である.

これらの事象は互いに排反なので, (1)~(4) より

$$\frac{16}{81} + \frac{64}{243} + \frac{160}{729} + \frac{320}{2187} = \frac{1808}{2187}$$

【11】 (1) グー, チョキ, パーの出る確率は, それぞれ $\frac{1}{3}$ であるから,

A が勝つ事象は

事象 C : $(A, B) = (\text{グ}, \text{チ})$

事象 D : $(A, B) = (\text{パ}, \text{グ})$

事象 E : $(A, B) = (\text{チ}, \text{パ})$

の和事象である.

これらの事象は互いに排反なので

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(2) 勝負がつくというのは

事象 F : A が勝つ

事象 G : B が勝つ

の和事象である.

これらの事象は互いに排反なので

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(3) 「あいこになる」という事象の余事象は

「勝負がつく」という事象である.

よって, (2) より, 求める確率は

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(4) 「3 回目で勝負が終わる」ということは, 2 つの事象

事象 H : 3 回続けて A が勝つ

事象 I : 3 回続けて B が勝つ

の和事象である. これらの事象は排反で, それぞれの確率は

$$P(H) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$P(I) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

であるから

$$\begin{aligned} P(H \cup I) &= P(H) + P(I) \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

(5) 「4 回目で勝負がつく」ということは、2 つの事象

事象 J : 3 回目までに A が 2 勝して、4 回目に A が勝つ

事象 K : 3 回目までに B が 2 勝して、4 回目に B が勝つ

の和事象である。これらの事象は排反で、それぞれの確率は

$$\begin{aligned} P(J) &= {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} & P(K) &= {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} \\ &= {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} & &= \frac{2}{27} \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} P(J \cup K) &= P(J) + P(K) \\ &= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

問題

【1】(1)

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= {}_4C_0x^4 + {}_4C_1x^3y + {}_4C_2x^2y^2 + {}_4C_3xy^3 + {}_4C_4y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(x-y)^6 &= {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5(-y) + {}_6C_2x^4(-y)^2 + {}_6C_3x^3(-y)^3 \\ &\quad + {}_6C_4x^2(-y)^4 + {}_6C_5x(-y)^5 + {}_6C_6(-y)^6 \\ &= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(a+1)^4 &= {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3 \cdot 1 + {}_4C_2a^2 \cdot 1^2 + {}_4C_3a \cdot 1^3 + {}_4C_41^4 \\ &= a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(a-1)^5 &= {}_5C_0a^5 + {}_5C_1a^4(-1) + {}_5C_2a^3(-1)^2 + {}_5C_3a^2(-1)^3 \\ &\quad + {}_5C_4a(-1)^4 + {}_5C_5(-1)^5 \\ &= a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 10a^2 + 5a - 1\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(2x+y)^4 &= {}_4C_0(2x)^4 + {}_4C_1(2x)^3y + {}_4C_2(2x)^2y^2 + {}_4C_3(2x)y^3 + {}_4C_4y^4 \\ &= 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(x-3y)^5 &= {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4(-3y) + {}_5C_2x^3(-3y)^2 + {}_5C_3x^2(-3y)^3 \\ &\quad + {}_5C_4x(-3y)^4 + {}_5C_5(-3y)^5 \\ &= x^5 - 15x^4y + 90x^3y^2 - 270x^2y^3 + 405xy^4 - 243y^5\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\left(a + \frac{1}{a}\right)^4 &= {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3\left(\frac{1}{a}\right) + {}_4C_2a^2\left(\frac{1}{a}\right)^2 + {}_4C_3a\left(\frac{1}{a}\right)^3 + {}_4C_4\left(\frac{1}{a}\right)^4 \\ &= a^4 + 4a^2 + 6 + \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^4}\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\left(2a - \frac{1}{a}\right)^5 &= {}_5C_0(2a)^5 + {}_5C_1(2a)^4\left(-\frac{1}{a}\right) + {}_5C_2(2a)^3\left(-\frac{1}{a}\right)^2 \\ &\quad + {}_5C_3(2a)^2\left(-\frac{1}{a}\right)^3 + {}_5C_4(2a)\left(-\frac{1}{a}\right)^4 + {}_5C_5\left(-\frac{1}{a}\right)^5 \\ &= 32a^5 - 80a^3 + 80a - \frac{40}{a} + \frac{10}{a^3} - \frac{1}{a^5}\end{aligned}$$

【2】 (1) $(x+2)^7$ の展開式の一般項は

$${}_7C_r \cdot x^{7-r} \cdot 2^r$$

x^3 の項は

$$\begin{aligned} 7-r &= 3 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

のときであるから、その係数は

$$\begin{aligned} {}_7C_4 \cdot 2^4 &= {}_7C_3 \cdot 2^4 \\ &= \mathbf{560} \end{aligned}$$

(2) $(x-5)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r \cdot x^{5-r} \cdot (-5)^r$$

x^4 の項は

$$\begin{aligned} 5-r &= 4 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

のときであるから、その係数は

$${}_5C_1 \cdot (-5) = \mathbf{-25}$$

(3) $(2x+3y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r \cdot (2x)^{6-r} \cdot (3y)^r = {}_6C_r \cdot 2^{6-r} \cdot 3^r \cdot x^{6-r} \cdot y^r$$

x^2y^4 の項は $r=4$ のときであるから、その係数は

$$\begin{aligned} {}_6C_4 \cdot 2^{6-4} \cdot 3^4 &= {}_6C_2 \cdot 2^2 \cdot 3^4 \\ &= \mathbf{4860} \end{aligned}$$

(4) $(3x-2y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r \cdot (3x)^{6-r} \cdot (-2y)^r = {}_6C_r \cdot 3^{6-r} \cdot (-2)^r \cdot x^{6-r} \cdot y^r$$

x^3y^3 の項は $r=3$ のときであるから、その係数は

$$\begin{aligned} {}_6C_3 \cdot 3^{6-3} \cdot (-2)^3 &= {}_6C_3 \cdot 3^3 \cdot (-2)^3 \\ &= \mathbf{-4320} \end{aligned}$$

(5) $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} &{}_6C_r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^r \\ &= {}_6C_r \cdot 2^r \cdot x^{12-2r} \cdot \frac{1}{x^r} \\ &= {}_6C_r \cdot 2^r \cdot x^{12-3r} \end{aligned}$$

x の項は

$$\begin{aligned} 12-3r &= 1 \\ r &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

となる。 r は整数だから不適。
よって、 x の項の係数は $\mathbf{0}$

(6) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} &{}_5C_r \cdot (2x^2)^{5-r} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right)^r \\ &= {}_5C_r \cdot 2^{5-r} \cdot (-3)^r \cdot x^{10-2r} \cdot \frac{1}{x^r} \\ &= {}_5C_r \cdot 2^{5-r} \cdot (-3)^r \cdot x^{10-3r} \end{aligned}$$

x^3 の項は

$$\begin{aligned} 10-3r &= 3 \\ r &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる。 r は整数だから不適。
よって、 x の項の係数は $\mathbf{0}$

(7) $\left(x + \frac{1}{2x^2}\right)^{12}$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & {}_{12}C_r \cdot x^{12-r} \cdot \left(\frac{1}{2x^2}\right)^r \\ &= {}_{12}C_r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{12-r} \cdot \frac{1}{x^{2r}} \\ &= {}_{12}C_r \cdot \frac{1}{2^r} \cdot x^{12-3r} \end{aligned}$$

定数項は

$$\begin{aligned} 12 - 3r &= 0 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

のときであるから、その係数は

$${}_{12}C_4 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{495}{16}$$

(8) $\left(2x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & {}_{10}C_r \cdot (2x^4)^{10-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r \\ &= {}_{10}C_r \cdot 2^{10-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{40-4r} \cdot \frac{1}{x^r} \\ &= {}_{10}C_r \cdot 2^{10-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{40-5r} \end{aligned}$$

定数項は

$$\begin{aligned} 40 - 5r &= 0 \\ r &= 8 \end{aligned}$$

のときであるから、その係数は

$$\begin{aligned} {}_{10}C_8 \cdot 2^{10-8} \cdot (-1)^8 &= {}_{10}C_2 \cdot 2^2 \\ &= \mathbf{180} \end{aligned}$$

【3】 (1) $(a + b + c)^6$ の展開式の一般項は

$$\frac{6!}{p!q!r!} \cdot a^p \cdot b^q \cdot c^r \quad (\text{ただし, } p + q + r = 6)$$

a^2b^3c の項は, $p = 2, q = 3, r = 1$ のときであるから, その係数は

$$\frac{6!}{2!3!1!} = \mathbf{60}$$

(2) $(x + y + z)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!} \cdot x^p \cdot y^q \cdot z^r \quad (\text{ただし, } p + q + r = 7)$$

$x^3y^2z^2$ の項は, $p = 3, q = 2, r = 2$ のときであるから, その係数は

$$\frac{7!}{3!2!2!} = \mathbf{210}$$

(3) $(a + b + 1)^{10}$ の展開式の一般項は

$$\frac{10!}{p!q!r!} \cdot a^p \cdot b^q \cdot 1^r = \frac{10!}{p!q!r!} \cdot a^p \cdot b^q \quad (\text{ただし, } p + q + r = 10)$$

a^2b の項は, $p = 2, q = 1, r = 7$ のときであるから, その係数は

$$\frac{10!}{2!1!7!} = \mathbf{360}$$

(4) $(x - 2y - z)^5$ の展開式の一般項は

$$\frac{5!}{p!q!r!} \cdot x^p \cdot (-2y)^q \cdot (-z)^r = \frac{5!}{p!q!r!} \cdot (-2)^q \cdot (-1)^r \cdot x^p \cdot y^q \cdot z^r \quad (\text{ただし, } p + q + r = 5)$$

x^2yz^2 の項は, $p = 2, q = 1, r = 2$ のときであるから, その係数は

$$\frac{5!}{2!1!2!} \cdot (-2) \cdot (-1)^2 = \mathbf{-60}$$

(5) $(2a - b + 3c)^7$ の展開式の一般項は

$$\frac{7!}{p!q!r!} \cdot (2a)^p \cdot (-b)^q \cdot (3c)^r = \frac{7!}{p!q!r!} \cdot 2^p \cdot (-1)^q \cdot 3^r \cdot a^p \cdot b^q \cdot c^r \quad (\text{ただし, } p + q + r = 7)$$

a^4bc^2 の項は, $p = 4, q = 1, r = 2$ のときであるから, その係数は

$$\frac{7!}{4!1!2!} \cdot 2^4 \cdot (-1) \cdot 3^2 = \mathbf{-15120}$$

(6) $(x^2 - 2x + 3)^4$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & \frac{4!}{p!q!r!} \cdot (x^2)^p \cdot (-2x)^q \cdot 3^r \\ &= \frac{4!}{p!q!r!} \cdot (-2)^q \cdot 3^r \cdot x^{2p} \cdot x^q \\ &= \frac{4!}{p!q!r!} \cdot (-2)^q \cdot 3^r \cdot x^{2p+q} \quad (\text{ただし, } p+q+r=4 \cdots \textcircled{1}) \end{aligned}$$

x^5 の項は

$$2p+q=5 \cdots \textcircled{2}$$

のときである.

①, ②より

$$(p, q, r) = (1, 3, 0), (2, 1, 1)$$

よって, x^5 の項の係数は

$$\begin{aligned} & \frac{4!}{1!3!0!} \cdot (-2)^3 \cdot 3^0 + \frac{4!}{2!1!1!} \cdot (-2) \cdot 3 = -32 - 72 \\ & \qquad \qquad \qquad = -104 \end{aligned}$$

(7) $\left(a + \frac{1}{2} + \frac{1}{a}\right)^5$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & \frac{5!}{p!q!r!} \cdot a^p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^q \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^r \\ &= \frac{5!}{p!q!r!} \cdot \frac{1}{2^q} \cdot a^p \cdot \frac{1}{a^r} \\ &= \frac{5!}{p!q!r!} \cdot \frac{1}{2^q} \cdot a^{p-r} \quad (\text{ただし, } p+q+r=5 \cdots \textcircled{1}) \end{aligned}$$

a^3 の項は

$$p-r=3 \cdots \textcircled{2}$$

のときである.

①, ②より

$$(p, q, r) = (3, 2, 0), (4, 0, 1)$$

よって, a^3 の項の係数は

$$\begin{aligned} & \frac{5!}{3!2!0!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5!}{4!0!1!} \cdot \frac{1}{2^0} = \frac{5}{2} + 5 \\ & \qquad \qquad \qquad = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

(8) $\left(x^2 + x - \frac{2}{x}\right)^7$ の展開式の一般項は

$$\begin{aligned} & \frac{7!}{p!q!r!} \cdot (x^2)^p \cdot x^q \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^r \\ &= \frac{7!}{p!q!r!} \cdot (-2)^r \cdot x^{2p} \cdot x^q \cdot \frac{1}{x^r} \\ &= \frac{7!}{p!q!r!} \cdot (-2)^r \cdot x^{2p+q-r} \quad (\text{ただし, } p+q+r=7 \dots \textcircled{1}) \end{aligned}$$

定数項は

$$2p + q - r = 0 \dots \textcircled{2}$$

のときである.

①, ②より

$$(p, q, r) = (1, 2, 4)$$

よって, 定数項は

$$\frac{7!}{1!2!4!} \cdot (-2)^4 = \mathbf{1680}$$

【4】 (1)

$$\begin{aligned} {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{(n-1)-(r-1)\}!} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \times \frac{n-r}{n-r} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{r}{r} \\ &= \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} + \frac{(n-1)!r}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \{(n-r) + r\} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \times n \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r \end{aligned}$$

(証明終)

(2) 二項定理より

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_rx^r + \dots + {}_nC_nx^n \dots \textcircled{1}$$

である.

①に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} (1+1)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 \times 1 + {}_nC_2 \times 1^2 + \dots + {}_nC_r \times 1^r + \dots + {}_nC_n \times 1^n \\ 2^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n \end{aligned}$$

(証明終)

(3) ① に $x = -1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(1-1)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 \times (-1) + {}_nC_2 \times (-1)^2 + \cdots + {}_nC_r \times (-1)^r \\ &\quad + \cdots + {}_nC_n \times (-1)^n \\ 0 &= {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + (-1)^n \cdot {}_nC_n\end{aligned}$$

(証明終)

(4) 二項定理より

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= {}_{2n}C_0 \cdot 1^{2n} + {}_{2n}C_1 \cdot 1^{2n-1} \cdot x + {}_{2n}C_2 \cdot 1^{2n-2} \cdot x^2 \\ &\quad + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \cdot x^{2n} \\ &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 \cdot x + {}_{2n}C_2 \cdot x^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \cdot x^{2n}\end{aligned}$$

これに $x = 1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(1+1)^{2n} &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 \cdot 1 + {}_{2n}C_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \cdot 1^{2n} \\ 2^{2n} &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$x = -1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(1-1)^{2n} &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 \cdot (-1) + {}_{2n}C_2 \cdot (-1)^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} \cdot (-1)^{2n} \\ 0 &= {}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - \cdots + {}_{2n}C_{2n} \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

② + ③ より

$$\begin{aligned}2({}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}) &= 2^{2n} \\ {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} &= \frac{2^{2n}}{2} \\ {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} &= 2^{2n-1}\end{aligned}$$

(証明終)



会員番号

氏 名