M1TK

本科 1 期 7 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 1 難関大数学 K

１１章　集合と論証（２）－条件と命題－

問題

■演習

【1】(1) これは命題である．　(答)

この命題は **真** である．　(答)

(2) これは命題ではない．　(答)

(3) これは命題である．　(答)

この 2 次方程式の判別式は

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$$

なので，実数解は持たない．よって，この命題は **偽** である．　(答)

【2】(1) $a + b = 0$ ならば，$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 0$ であるので，**真**　(答)

(2) 8 の約数の集合 $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$

24 の約数の集合 $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

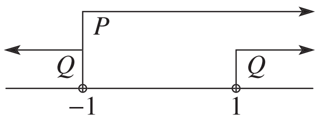
よって，$A \subset B$ だから，**真**　(答)

(3) **偽**　(答)　（反例）$a = \sqrt{2},\ b = 2\sqrt{2}$ のとき．

(4) **偽**　(答)　（反例）$a = \sqrt{2},\ b = -\sqrt{2}$ のとき．

(5) $P = \{x | x > -1\},\ Q = \{x | x^2 > 1\}$ として，集合 $P,\ Q$ を数直線上に表す．

$Q = \{x | x < -1,\ 1 < x\}$ より

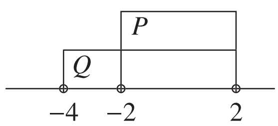


したがって，**偽** である．反例は，$x = 0$ のとき．　(答)

(6) $P = \{x |\ |x| < 2\},\ Q = \{x |\ |x + 1| < 3\}$ として，集合 $P,\ Q$ を数直線上に表す．

$$P = \{x | -2 < x < 2\}$$
$$Q = \{x | -3 < x + 1 < 3\} = \{x | -4 < x < 2\}$$

だから



したがって，$P \subset Q$ だから，**真** である．　(答)

【3】(1) ある素数 $\boldsymbol{p}$ について, $\boldsymbol{p}$ は偶数である. (答)

$p = 2$ のとき成立するから，これは **真** である. (答)

(2) すべての自然数 $\boldsymbol{n}$ について, $\boldsymbol{n^2 - 2n - 3 \neq 0}$ (答)

これは **偽** である. [反例として, $n = 3$] (答)

(3) ある実数 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して, $\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2 \leqq 0}$ (答)

$x = 1$, $y = -1$ のとき成立するから，これは **真** である. (答)

【4】(1) $\boldsymbol{x = 0}$ または $\boldsymbol{y = 0}$ (答)

(2) $\boldsymbol{x > 2}$ かつ $\boldsymbol{x < 5}$ $\boldsymbol{(2 < x < 5)}$ (答)

(3) $\boldsymbol{x \leqq -4}$ または $\boldsymbol{x \geqq 3}$ (答)

【5】(1) 真 (答)

〔証明〕

$|x| \leqq 1$ より $0 \leqq x^2 \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ より $0 \leqq y^2 \leqq 1$ だから

$$\begin{aligned}(xy+1)^2 - (x+y)^2 &= (x^2y^2 + 2xy + 1) - (x^2 + 2xy + y^2)\\ &= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1\\ &= (x^2-1)(y^2-1) \ \geqq\ 0\end{aligned}$$

（等号成立は，$x = \pm 1$ または $y = \pm 1$ のとき）

よって，$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$ が成り立つ. 〔証明終〕

(2) 偽 (答)

〔反例〕$a = b = 0$, $c = 1$

(3) 真 (答)

〔証明〕

a が整数で，$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$ が有理数であるから，n を整数として

$9 - 4a = (2n)^2$ または $9 - 4a = (2n+1)^2$ とおける.

(i) $9 - 4a = (2n)^2$ であるとき，$a = \dfrac{9}{4} - n^2$ となり，n は整数であるから a は整数ではない.

すなわち $9 - 4a = (2n)^2$ とはならない.

(ii) $9 - 4a = (2n+1)^2$ であるとき，$a = 2 - n^2 - n = -(n-1)(n+2)$

n が奇数のとき, $n - 1$ が偶数となるので, a は偶数となる.
n が偶数のとき, $n + 2$ が偶数となるので, a は偶数となる.

以上より，与えられた方程式が有理数の解をもてば，a は偶数である.〔証明終〕

【6】(1)

$$x^2 < x^3 \iff x^2(x-1) > 0 \iff x > 1$$

このとき

$$x^4 - x^3 = x^3(x-1) > 0$$

より，

真　　(答)

(2)

$$x^3 < x^4 \quad \Longleftrightarrow x^3(x-1) > 0 \Longleftrightarrow x < 0,\ 1 < x$$

$x < 0$ のとき，$x^2 < x^3$ は不成立．ゆえに

偽　　(答)

(3)

$$x^4 < x^2 \quad \Longleftrightarrow x^2(x^2-1) < 0 \Longleftrightarrow 0 < x^2 < 1 \Longleftrightarrow 0 < |x| < 1$$

このとき，

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1) < 0$$

であるから

真　　(答)

【7】

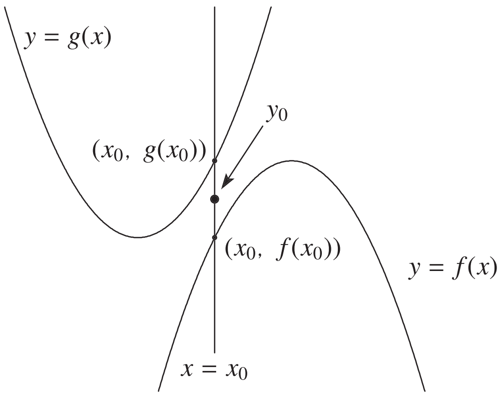
$$f(x) = -x^2 + (a-2)x + a - 4$$
$$g(x) = x^2 - (a-4)x + 3$$

とおく．

(1)　「どんな x に対しても，それぞれ適当な y をとれば A が成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「任意の x_0に対し，$g(x_0) > y_0 > f(x_0)$ となる y_0が存在する」

$\Longleftrightarrow$「すべての x で $g(x) > f(x)$ である」



ゆえに

$$x^2-(a-4)x+3>-x^2+(a-2)x+a-4$$

$$\therefore\quad 2x^2-2(a-3)x-a+7>0\quad\cdots①$$

すべての x に対して ① が成り立つ条件は，方程式 $2x^2-2(a-3)x-a+7=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4}=(a-3)^2-2(-a+7)=a^2-4a-5<0$$

これより

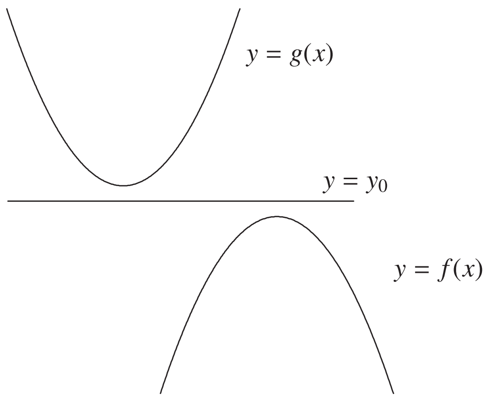
$$(a-5)(a+1)<0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-1<a<5}\qquad (答)$$

(2)　「適当な y をとれば，どんな x に対しても A が成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「ある y_0 に対し，すべての x で $g(x)>y_0>f(x)$ が成り立つ」

$\Longleftrightarrow$「$(g(x)$ の最小値$)>(f(x)$ の最大値$)$」



ここで，

$$g(x)=\left(x-\frac{a-4}{2}\right)^2-\frac{(a-4)^2}{4}+3$$

$$f(x)=-\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2+\frac{(a-2)^2}{4}+a-4$$

であるから，求める条件は

$$-\frac{(a-4)^2}{4}+3>\frac{(a-2)^2}{4}+a-4$$

これを整理すると

$$-(a^2-8a+16)+12>(a^2-4a+4)+4a-16$$

$$a^2-4a-4<0$$

よって求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}}\qquad (答)$$

【8】(1) $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とおく．r が有理数であると仮定すると，

$$r^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

より，

$$\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$$

r が有理数より，右辺は有理数である．これは左辺が無理数であることに矛盾する．
ゆえに r は有理数ではない．すなわち無理数である．
ゆえに **真** である．　(答)

(2) $x^2 + x = r$ とおくと，解の公式より

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4r}}{2}$$

ここで $r = 1$ とすると

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\sqrt{5}$ は無理数であるから x は無理数である．ゆえに **偽** である．　(答)

(3) $x = \sqrt{2}$，$y = -\sqrt{2}$ のとき $x + y = 0$，$x^2 + y^2 = 4$ となるから **偽** である．　(答)

＜別解＞

$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b$$

とおくと $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ より

$$x + y = a, \quad xy = \frac{a^2 - b}{2}$$

ゆえに x，y を 2 解とする t の 2 次方程式

$$t^2 - at + \frac{a^2 - b}{2} = 0$$

を解くことで x, y を求め，これが無理数になるような有理数 a, b を見つけてもよい．

添削課題

【1】(1) 偽の命題である．　(答)

(2) 真の命題である．　(答)

(3) 人によって意見が分かれるので，真偽が明確に決定できない．

よって，命題ではない．　(答)

(4) 真の命題である．　(答)

(5) 「よい」という言葉は何を基準とするかによって変わるので，真偽が明確に決定できない．

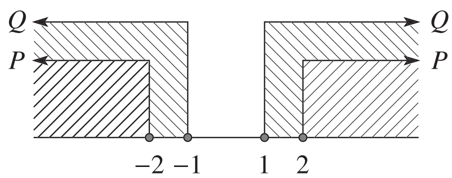
よって，命題ではない．　(答)

【2】(1) 命題は真である．　(答)

〔証明〕

$P=\{x \mid |x|>2\}$, $Q=\{x \mid x^2>1\}$ として，集合 P, Q を数直線上に表す．

$P=\{x \mid x<-2,\ 2<x\}$, $Q=\{x \mid x<-1,\ 1<x\}$ より



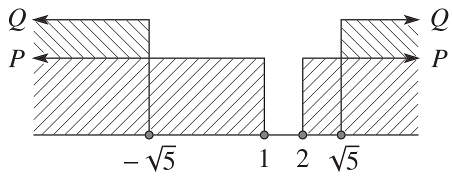
したがって，真である．　〔証明終〕

(2) 命題は偽である．　(答)

〔証明〕

$P=\{x \mid x^2-3x+2>0\}$, $Q=\{x \mid x^2>5\}$ として，集合 P, Q を数直線上に表す．

$P=\{x \mid x<1,\ 2<x\}$, $Q=\{x \mid x<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<x\}$ より



したがって，偽である．

反例は，$x=0$ のときである．　〔証明終〕

【3】(1) 偽　(答)　　(反例) $a=3,\ b=0$

(2) 真　(答)

(3) 偽　(答)　　(反例) $a=\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2}$

(4) 偽　(答)　　(反例) $a=\sqrt{3},\ b=-\sqrt{3}$

【4】(1) 命題：

$$n^2 - 2n + 1 = 0$$
$$(n-1)^2 = 0 \qquad n = 1$$

よって，$n = 1$ のときに成立するので，この命題は **真**　**(答)**

否定：**すべての自然数 $\boldsymbol{n}$ について $\boldsymbol{n^2 \neq 2n - 1}$**　**(答)**

$n = 1$ で成立するので，この命題は **偽**　**(答)**

(2) 命題：

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

ここで，$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \geqq 0$ より，$x^2 + 3x + 3 > 0$ なので

この命題は **真**　**(答)**

否定：**ある実数 $\boldsymbol{x}$ について $\boldsymbol{x^2 + 3x + 3 \leqq 0}$**　**(答)**

この命題は **偽**　**(答)**

(3) 命題：

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

より，$x = 0,\ y = 0$ のとき，$x^2 - xy + y^2 = 0$ なので，

この命題は **真**　**(答)**

否定：**すべての実数 $\boldsymbol{x, y}$ について $\boldsymbol{x^2 - xy + y^2 > 0}$**　**(答)**

この命題は **偽**　**(答)**

問題

【1】(1) 『「n が 12 の倍数」ならば「n は 4 または 6 の倍数」』は真で,
『「n が 4 または 6 の倍数」ならば「n は 12 の倍数」』は偽である.（反例は, $n = 8$ のとき）
よって, ②　　**(答)**

(2) 『「$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$」ならば「$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$」である』は偽で,
『「$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$」ならば「$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$」である』は真である.
（合同は, 相似比 $1 : 1$ で相似といえる.）
よって, ①　　**(答)**

(3) 『「$a + b$, ab がともに偶数」ならば「a, b がともに偶数」』は真.
〔証明〕
ab が偶数より, a または b の少なくとも一方が偶数.　　$\cdots(*)$
$a + b$ が偶数より, a, b はともに奇数, またはともに偶数.　　$\cdots(**)$
$(*)$, $(**)$ より, a, b はともに偶数である〔証明終〕
『「a, b がともに偶数」ならば「$a + b$, ab がともに偶数』は真である.
よって, ③　　**(答)**

(4) 『「$\sqrt{n}$ が無理数」ならば「n は奇数」』は偽で,（反例は $n = 2$ のとき）
『「n は奇数」』ならば「$\sqrt{n}$ が無理数」』も偽.（反例は $n = 9$ のとき）
よって, ④　　**(答)**

(5) 『「2 つの三角形の面積が等しい」ならば「2 つの三角形は合同」』は偽で,
『「2 つの三角形が合同」ならば「2 つの三角形の面積が等しい」』は真
〔証明〕
2 つの三角形が合同ならば, 三角形の底辺と高さは等しいので, 2 つの三角形の面積も等しくなる.〔証明終〕
よって, ①　　**(答)**

(6) 『「$AB^2 + BC^2 = CA^2$ である」ならば「$\triangle ABC$ が $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である」』は真で,
『「$\triangle ABC$ が $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である」ならば「$AB^2 + BC^2 = CA^2$ である」』も真
よって, ③　　**(答)**

【2】(1) 『「$a = b$」ならば「$ac = bc$」』は真であるが,
『「$ac = bc$」ならば「$a = b$」』は偽である.（反例は, $c = 0$ のとき）
したがって, ②　　**(答)**

(2) 『「$a^2 > b^2$」ならば「$a > b$」』は偽であり，（反例は，$a = -2,\ b = 1$ のとき）
『「$a > b$」ならば「$a^2 > b^2$」』も偽である．（反例は，$a = 0,\ b = -1$ のとき）
したがって，④　　**(答)**

(3) 『「$a > 0$ かつ $b > 0$」ならば「$a + b > 0$ かつ $ab > 0$」』は真であり，
『「$a + b > 0$ かつ $ab > 0$」ならば「$a > 0$ かつ $b > 0$」』も真である．
〔証明〕
$ab > 0$ より，a と b は同符号だから，$a + b > 0$ より，$a > 0$ かつ $b > 0$ である〔証明終〕
したがって，③　　**(答)**

(4) 『「$a + b,\ ab$ が整数」ならば「$a,\ b$ は整数 」』は偽であるが，
（反例は，$a = 1 + \sqrt{2},\ b = 1 - \sqrt{2}$ のとき）
『「$a,\ b$ が整数」ならば「$a + b,\ ab$ は整数」』は真である．
したがって，①　　**(答)**

(5) 『「$ab > 0$」ならば「$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} > 0$」』は真であり，
〔証明〕
$ab > 0$ より，$a \neq 0,\ b \neq 0$ だから，$a^2 > 0,\ b^2 > 0$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2 + b^2}{ab} > 0 \qquad \text{〔証明終〕}$$

『「$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} > 0$」ならば「$ab > 0$」』も真である．
〔証明〕
$\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} > 0$ のとき，$a^2 + b^2$ と ab は同符号で

$a^2 + b^2 > 0$ より，$ab > 0$　　〔証明終〕

したがって，③　　**(答)**

【3】(1) $\boldsymbol{(a - b)(b - c)(c - a) = 0}$　　(答)
(2) $\boldsymbol{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) = 0}$　　(答)

【4】(1) 『「$xyz = 0$」ならば「$xy = 0$」』は偽であるが，
（反例は，$x = y = 1,\ z = 0$ のとき）
『「$xy = 0$」ならば「$xyz = 0$」』は真である．
したがって，①　　**(答)**

(2) 『「$x + y + z = 0$」ならば「$x + y = 0$」』は偽であり，（反例は，$x = y = 1,\ z = -2$ のとき）
『「$x + y = 0$」ならば「$x + y + z = 0$」』も偽である．（反例は，$x = 1,\ y = -1,\ z = 2$）
したがって，④　　**(答)**

(3) 『「$x^2+y^2=4(x+y-2)$」ならば「$x=y=2$」』は真.

〔証明〕

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2&=4(x+y-2)\\
x^2-4x+y^2-4y+8&=0\\
x^2-4x+4+y^2-4y+4&=0\\
(x-2)^2+(y-2)^2&=0\cdots(*)
\end{aligned}
$$

ここで，$(*)$ が成立するとき，

$x-2=0,\ y-2=0 \iff x=y=2$〔証明終〕

『「$x=y=2$」ならば「$x^2+y^2=4(x+y-2)$」』も真である.

したがって，③　**(答)**

(4) 『「$x^2-xy+y^2=0$」ならば「$x=0$」』は真である.

〔証明〕

$x^2-xy+y^2=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0$ より

$x-\dfrac{y}{2}=0$ かつ $y=0$

つまり，$x(=y)=0$〔証明終〕

『「$x=0$」ならば「$x^2-xy+y^2=0$」』は偽である.

（反例は，$x=0,\ y=1$ のとき）

したがって，②　**(答)**

(5) 『「$x(y^2+1)=0$」ならば「$x=0$」』は真であり，

〔証明〕

y は実数だから，$y^2+1\geqq 1>0$．よって，$x(y^2+1)=0$ より，$x=0$〔証明終〕

『「$x=0$」ならば「$x(y^2+1)=0$」』も真である.

したがって，③　**(答)**

(6) 『「$x^2+y^2=0$」ならば「$|x-y|=x+y$」』は真であるが，

〔証明〕

$x,\ y$ は実数より，$x^2\geqq 0,\ y^2\geqq 0$

したがって，$x^2+y^2=0$ ならば，$x^2=y^2=0$

すなわち，$x=y=0$

よって，$|x-y|=x+y(=0)$〔証明終〕

『「$|x-y|=x+y$」ならば「$x^2+y^2=0$」』は偽である.

（反例は，$x=1,\ y=0$ のとき）

したがって，②　**(答)**

(7) 『$(x^2+y^2)(x^2+z^2)=0$」ならば「$x=0$」』は真.

〔証明〕

$x,\ y,\ z$ は実数より，$x^2\geqq 0,\ y^2\geqq 0,\ z^2\geqq 0$

$$\therefore\quad x^2+y^2\geqq 0,\quad x^2+z^2\geqq 0$$

したがって，$(x^2+y^2)(x^2+z^2)=0$ ならば，$x^2+y^2=0$ または $x^2+z^2=0$．よって，
$x=y=0$ または $x=z=0$．いずれにしても，$x=0$〔証明終〕
『「$x=0$」ならば「$(x^2+y^2)(x^2+z^2)=0$」』は偽である.
（反例は，$x=0,\ y=z=1$ のとき）
したがって，② **(答)**

(8) 『「$x+y+z \geqq 3$」ならば「$x,\ y,\ z$ の少なくとも 1 つが 1 以上である」』は真.
〔証明〕
$x,\ y,\ z$ のうちで一番大きいものを X とすると
（つまり，$x \leqq X,\ y \leqq X,\ z \leqq X$）

$$x+y+z \leqq X+X+X \leqq 3X$$

仮定より，$x+y+z \geqq 3$ であるから

$$3 \leqq 3X \qquad \therefore \quad 1 \leqq X$$

つまり，$x,\ y,\ z$ の少なくとも 1 つは 1 以上である〔証明終〕
『「$x,\ y,\ z$ の少なくとも 1 つが 1 以上である」ならば「$x+y+z \geqq 3$」』は偽である.
（反例は，$x=2,\ y=0,\ z=0$ のとき）
したがって，② **(答)**

(9) 『「$x,\ y,\ z$ がすべて正である」ならば「$xy+yz+zx>0$ かつ $xyz>0$」』は真.
〔証明〕
$x>0$ かつ $y>0$ かつ $z>0$ より

$$\begin{cases} xy>0 \text{ かつ } yz>0 \text{ かつ } zx>0 & \cdots(*) \\ xyz>0 \end{cases}$$

また $(*)$ より，$xy+yz+zx>0$
したがって

$$xy+yz+zx>0 \text{ かつ } xyz>0 \text{〔証明終〕}$$

『「$xy+yz+zx>0$ かつ $xyz>0$」ならば「$x,\ y,\ z$ がすべて正である」』は偽である.
（反例は $x=-3,\ y=-2,\ z=1$ のとき）
したがって，② **(答)**

【5】 〔証明〕
与式を整理して

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz\\
&x^2y+xyz+x^2z+xy^2+y^2z+xyz+xyz+z^2y+z^2x=xyz\\
&x^2y+2xyz+x^2z+xy^2+y^2z+z^2y+z^2x=0\\
&(y+z)x^2+(y^2+2yz+z^2)x+yz(y+z)=0\\
&(y+z)x^2+(y+z)^2x+yz(y+z)=0\\
&(y+z)\left\{x^2+(y+z)x+yz\right\}=0\\
&(y+z)(z+x)(x+y)=0
\end{aligned}$$

となり，$x+y=0$ または $y+z=0$ または $z+x=0$．
よって，$x,\ y,\ z$ のいずれか 2 つの和は 0 に等しい．〔証明終〕

【6】〔証明〕
与式の両辺を 2 倍して

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca$$
$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

よって

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$$
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

となる．ここで，$(a-b)^2\geqq 0,\ (b-c)^2\geqq 0,\ (c-a)^2\geqq 0$ であるので，上式の左辺が 0 になるためには

$$(a-b)^2=0,\quad (b-c)^2=0,\quad (c-a)^2=0$$

とならなければいけないので

$$a=b=c$$ 〔証明終〕

【7】(1) 『「$a=\sqrt{b}$」ならば「$a^2=b$」』は真
『「$a^2=b$」ならば「$a=\sqrt{b}$」』が成り立つのは，$a\geqq 0$ のときだから，① **(答)**
(2) 『「$a=c\sqrt{b}$」ならば「$a^2=c^2b$」』は真
『「$a^2=c^2b$」ならば「$a=c\sqrt{b}$」』が成り立つのは，a と c が同符号，または $a=c=0$，または $a=b=0$ のときだから，⑨ **(答)**
(3) $a\leqq 0$ のとき，$b\geqq 0$ であれば，$a\leqq\sqrt{b}$ と同値
$a\geqq 0$ のとき，$a^2\geqq 0$ だから，$a^2\leqq b$ であれば，$a\leqq\sqrt{b}$ と同値
よって，順に，**③, ①** **(答)**

【8】(1) $f(x)=x^2-ax$ とおくと

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\quad (0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq a\leqq 2)$$

放物線 $y=f(x)$ の軸は $x=\dfrac{a}{2}$ であり，$0\leqq a\leqq 2$ より $0\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$．ゆえに $f(x)$ は $x=\dfrac{a}{2}$ で最小値をとる．すなわち

$$m=f\left(\frac{a}{2}\right)=\boldsymbol{-\frac{a^2}{4}}$$ **(答)**

また $f(x)$ の最大値は，軸 $x=\dfrac{a}{2}$ について，

(i) $0 \leqq \dfrac{a}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$ すなわち，$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，
$x = 1$ で最大値をとるので，

$$M = f(1) = 1 - a$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 1$ すなわち，$1 \leqq a \leqq 2$ のとき，
$x = 0$ で最大値をとるので，

$$M = f(0) = 0$$

以上より，

$$M = \begin{cases} \mathbf{1 - \boldsymbol{a}} & (\mathbf{0 \leqq \boldsymbol{a} \leqq 1}) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{1 \leqq \boldsymbol{a} \leqq 2}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 与えられた命題

$$p \quad \Longrightarrow \quad q$$

が真であるならば，

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \leqq m \quad \text{かつ} \quad M \leqq 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{4} \leqq -\frac{1}{4}a^2 \quad \text{かつ} \quad 1 - a \leqq 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 1 \geqq a^2 \quad \text{かつ} \quad 1 - a \leqq 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & -1 \leqq a \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad a \geqq -1 \end{aligned}$$

$0 \leqq a \leqq 2$ とあわせて，求める a の値の範囲は

$$\mathbf{0 \leqq \boldsymbol{a} \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 「正三角形である」ならば「2つの内角が等しい」が真で，
「2つの内角が等しい」ならば「正三角形である」が偽
（反例は，二等辺三角形のとき）である．
よって，(イ)　(答)

(2) 「2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と2点で交わる」ならば「判別式 $D = b^2 - 4ac > 0$」が真で，
「判別式 $D = b^2 - 4ac > 0$」ならば「2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と2点で交わる」は真である．
よって，(ウ)　(答)

(3) 「$a < 0$」ならば「$a^2 \neq 0$」が真で，
「$a^2 \neq 0$」ならば「$a < 0$」が偽
（反例は，$a = 1$ のとき）である．
よって，(イ)　(答)

【2】(1) 「$a + b = 0$ かつ $a - b = 0$」ならば「$a = b = 0$」が真で，
「$a = b = 0$」ならば「$a + b = 0$ かつ $a - b = 0$」が真である．
よって，(ウ)　(答)

(2) 「$(a - b)(b - c) = 0$」ならば「$a = b = c$」が偽
（反例は，$a = 1$，$b = 1$，$c = 3$ のとき）で，
「$a = b = c$」ならば「$(a - b)(b - c) = 0$」が真である．
よって，(ア)　(答)

(3) 「$ab > bc$」ならば「$a > c$」が偽
（反例は，$a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ のとき）で，
「$a > c$」ならば「$ab > bc$」が偽
（反例は，$a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ のとき）である．
よって，(エ)　(答)

【3】(1) 「x は素数」ならば「x は奇数」は偽 (反例は $x = 2$ のとき)

「x は奇数」ならば「x は素数」は偽 (反例は $x = 9$ のとき)

よって，(エ)　(答)

(2) 「$x^2 + y^2 = 0$」ならば「$x = y = 0$」は真

「$x = y = 0$」ならば「$x^2 + y^2 = 0$」は真

よって，(ウ)　(答)

(3) 「$\triangle$ABC は直角三角形」ならば「$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$」は偽 (反例は $\angle\mathrm{A} = 90^\circ$ のとき)

$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$ なら，$\angle\mathrm{B} = 90^\circ$ で $\triangle$ABC は直角三角形だから「$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$」ならば「$\triangle$ABC は直角三角形」は真

よって，(ア)　(答)

【4】〔証明〕

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$$

より，

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 0 \\ (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz &= 0 \\ 3xyz &= 0 \qquad (\because\ x + y + z = 0) \\ \therefore\ xyz &= 0 \end{aligned}$$

以上より，x, y, z のうち少なくとも 1 つは 0 である．　〔証明終〕

問題

【1】(1) 逆：**3 の倍数は 6 の倍数である．偽　(答)**

裏：**6 の倍数でないならば，3 の倍数ではない．偽　(答)**

対偶：**3 の倍数でないならば，6 の倍数ではない．真　(答)**

(2) 逆：$\boldsymbol{x > 1}$ **ならば，**$\boldsymbol{x^2 > 1}$ **である．真　(答)**

裏：$\boldsymbol{x^2 \leqq 1}$ **ならば，**$\boldsymbol{x \leqq 1}$ **である．真　(答)**

対偶：$\boldsymbol{x \leqq 1}$ **ならば，**$\boldsymbol{x^2 \leqq 1}$ **である．偽　(答)**

(3) 逆：$\boldsymbol{a, b}$ **が実数のとき，**$\boldsymbol{a = 0}$ **かつ** $\boldsymbol{b = 0}$ **ならば，**$\boldsymbol{a^2 + b^2 = 0}$ **である．真　(答)**

裏：$\boldsymbol{a, b}$ **が実数のとき，**$\boldsymbol{a^2 + b^2 \fallingdotseq 0}$ **ならば，**$\boldsymbol{a \fallingdotseq 0}$ **または** $\boldsymbol{b \fallingdotseq 0}$ **である．真　(答)**

対偶：$\boldsymbol{a, b}$ **が実数のとき，**$\boldsymbol{a \fallingdotseq 0}$ **または** $\boldsymbol{b \fallingdotseq 0}$ **ならば，**$\boldsymbol{a^2 + b^2 \fallingdotseq 0}$ **である．真　(答)**

(4) 逆：**整数** $\boldsymbol{m, n}$ **について，**$\boldsymbol{m, n}$ **がともに偶数であれば，**$\boldsymbol{m + n}$ **は偶数である．真　(答)**

裏：**整数** $\boldsymbol{m, n}$ **について，**$\boldsymbol{m + n}$ **が奇数であれば，**
$\boldsymbol{m, n}$ **のうち少なくとも一方は奇数である．真　(答)**

対偶：**整数** $\boldsymbol{m, n}$ **について，**$\boldsymbol{m, n}$ **のうち少なくとも一方が奇数であれば，**
$\boldsymbol{m + n}$ **は奇数である．偽　(答)**

(5) 逆：**整数** $\boldsymbol{n}$ **が 48 の倍数であれば，**$\boldsymbol{n}$ **が 6 の倍数であり，かつ 8 の倍数である．真 (答)**

裏：**整数** $\boldsymbol{n}$ **が 6 の倍数，または 8 の倍数でなければ，**$\boldsymbol{n}$ **は 48 の倍数でない．真 (答)**

対偶：**整数** $\boldsymbol{n}$ **が 48 の倍数でなければ，**$\boldsymbol{n}$ **は 6 の倍数，または 8 の倍数でない．偽 (答)**

(6) 逆：$\boldsymbol{x, y}$ **が実数のとき，**$\boldsymbol{x = 0}$ **ならば** $\boldsymbol{xy = 0}$**．真　(答)**

裏：$\boldsymbol{x, y}$ **が実数のとき，**$\boldsymbol{xy \fallingdotseq 0}$ **ならば** $\boldsymbol{x \fallingdotseq 0}$**．真　(答)**

対偶：$\boldsymbol{x, y}$ **が実数のとき，**$\boldsymbol{x \fallingdotseq 0}$ **ならば** $\boldsymbol{xy \fallingdotseq 0}$**．偽　(答)**

【2】(1) 〔証明〕

n が 3 の倍数であれば，k を整数として，$n = 3k$ とおけるから．

$$n^2 = 9k^2 = 3 \times 3k^2$$

より n^2 は 3 の倍数である．

よって，n が 3 の倍数であれば，n^2 は 3 の倍数であるから，その対偶をとって，

n^2が 3 の倍数でなければ，n は 3 の倍数ではない．〔証明終〕

(2) 〔証明〕

$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ であれば，$x-1 \geqq 0$ かつ $y-1 \geqq 0$ であるから，

$$(x-1)(y-1) \geqq 0$$

が成り立つ．

すなわち，$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ ならば，$(x-1)(y-1) \geqq 0$ であるから，対偶をとって，

$(x-1)(y-1) < 0$ ならば，$x < 1$ または $y < 1$ である．〔証明終〕

【3】(1) 〔証明〕

a，b がともに奇数であると仮定すると，

$a = 2m+1$，$b = 2n+1$　（ただし，m，n は整数）

とおけるので，

$$ab = (2m+1)(2n+1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn+m+n)+1$$

ここで，$2mn+m+n$ は整数より，ab は奇数となり，ab が偶数であることに矛盾する．よって，a，b の少なくとも一方は偶数である．〔証明終〕

(2) 〔証明〕

a または b が偶数であると仮定する．

a を偶数とすると，$a = 2n$（ただし，n は整数）とおけるので，$ab = 2nb$ となり，ab が奇数であることに矛盾する．

b を偶数としても，同様にして，ab が奇数であることに矛盾する．

したがって，a，b はともに偶数ではない．

すなわち，a，b はともに奇数である．〔証明終〕

(3) 〔証明〕

$x > 1$ かつ $y > 1$ と仮定すると，$x^2 > 1$，$y^2 > 1$ より，$x^2 + y^2 > 2$ となり，$x^2 + y^2 \leqq 2$ であることに矛盾する．

よって，$x \leqq 1$ または $y \leqq 1$ である．〔証明終〕

【4】〔証明〕

$x^2 + ax + b = 0$ が有理数の解 $\dfrac{m}{n}$ をもつと仮定する（ただし，m，n は互いに素な整数で，$n > 0$ とする．）．

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 + a \times \frac{m}{n} + b = 0$$

$$\therefore \quad m^2 + amn + bn^2 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，m，n は互いに素だから，少なくとも一方が奇数である．

(i) m，n がともに奇数のとき

m^2，amn，bn^2 はすべて奇数だから，①に矛盾する．

(ii) m が奇数，n が偶数のとき

$$m^2 + amn + bn^2 = m^2 + n(am + bn)$$

m^2 は奇数，$n(am + bn)$ は偶数だから，①に矛盾する．

(iii) m が偶数，n が奇数のとき

$$m^2 + amn + bn^2 = m(m + an) + bn^2$$

$m(m + an)$ は偶数，bn^2 は奇数だから①に矛盾する．

(i)，(ii)，(iii) より，いずれの場合も矛盾する．

したがって，$x^2 + ax + b = 0$ は，有理数の解をもたない．〔証明終〕

【5】(1) 偽　(答)

（反例）k を整数とする．

$m = 5k$ のときm^2は 5 で割り切れる

$m = 5k + 1$ のときm^2は 5 で割ると余り 1

$m = 5k + 2$ のときm^2は 5 で割ると余り 4

よって，5 の倍数でない $a = 6$，$b = 7$ をとっても

$$a^2 + b^2 = 6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$$

となり，$a^2 + b^2$ は 5 の倍数である．よって，命題は偽である．

(2) 真　(答)

〔証明〕

対偶「a または b が 7 で割り切れないならば $a^2 + b^2$ は 7 で割り切れない」をとり，以下，これが真であることを証明する．

ある整数 m を 7 で割ったときの余りと，m^2 を 7 で割ったときの余りの関係は，整数 k を用いて，

$m = 7k$ のとき	m の余り 0	m^2の余り 0
$m = 7k + 1$ のとき	m の余り 1	m^2の余り 1
$m = 7k + 2$ のとき	m の余り 2	m^2の余り 4
$m = 7k + 3$ のとき	m の余り 3	m^2の余り 2
$m = 7k + 4$ のとき	m の余り 4	m^2の余り 2
$m = 7k + 5$ のとき	m の余り 5	m^2の余り 4
$m = 7k + 6$ のとき	m の余り 6	m^2の余り 1

となる．ゆえに，a が 7 で割り切れないとき，a^2 を 7 で割ったときの余りは，$1, 2, 4$ のいずれかであるから，b^2 を 7 で割ったときの余りが $0, 1, 2, 4$ のいずれの値をとっても，$a^2 + b^2$ を 7 で割ったときの余りは 0 になりえない．また，b が 7 で割り切れないときも同様に，$a^2 + b^2$ を 7 で割ったときの余りは 0 になりえない．したがって，a または b が 7 で割り切れないならば，$a^2 + b^2$ は 7 で割り切れない．

よって，この対偶は真であり，もとの命題も真である．〔証明終〕

【6】(1) P の対偶は

$$\sqrt{a^2b^2} \neq ab \Longrightarrow a \leqq 0 \text{ かつ } b \leqq 0 \qquad \text{(答)}$$

(2) P の対偶は偽（反例：$a = 1,\ b = -1$）

よって P は，偽　(答)

【7】〔証明〕

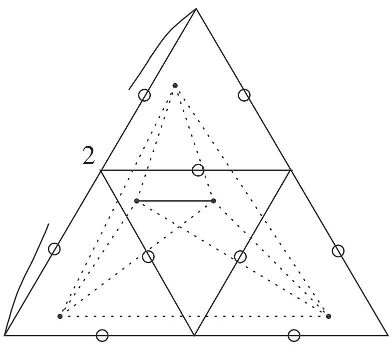
どの部屋にも 1 人以下しか入らないと仮定する．

すると，部屋の数は 5 つだから，多くとも 5 人しか入らないことになり，6 人を 5 つの部屋に入れたことに矛盾する．

よって，少なくとも 1 つの部屋には 2 人以上が入っている．〔証明終〕

【8】(1) 〔証明〕

1 辺の長さ 2 の正三角形を図のように 4 分割すると，1 辺の長さ 1 の正三角形が 4 つできる（これを小三角形と呼ぶ）．この中に 5 つの点をとると，少なくとも 1 つの小三角形の中に，2 つ以上の点が存在する．ここで，小三角形は，半径 1，中心角 60° のおうぎ形の中に完全に含まれるから，この中の 2 点の間の距離は 1 より小である．ゆえに題意は示された．〔証明終〕



(2) 〔証明〕

2 つの整数 $m,\ n$ に対して，

「m と n の差が 3 の倍数である」$\Longleftrightarrow$「$m,\ n$ を 3 で割った余りが等しい」

整数を 3 で割った余りは 0，1，2 のいずれかしかないから，任意に与えられた 4 つの整数のうち，3 で割った余りが等しいものが少なくとも 2 つ存在する．それらの差は 3 の倍数となる．ゆえに題意は示された．〔証明終〕

添削課題

【1】逆： **12** の倍数である整数は，**3** の倍数かつ **4** の倍数である． ［真］

裏： **3** の倍数でないかまたは **4** の倍数でない整数は，**12** の倍数でない． ［真］

対偶： **12** の倍数でない整数は，**3** の倍数でないかまたは **4** の倍数でない． ［真］

【2】(1) 〔証明〕

与えられた命題の対偶をとると

$x \leqq 3$ かつ $y \leqq 2$ ならば $x + y \leqq 5$

不等式の性質より

$x \leqq 3,\ y \leqq 2$ のとき，$x + y \leqq 3 + 2 \leqq 5$

したがって，対偶命題は真である．
よって，与えられた命題も真となる． 〔証明終〕

(2) 〔証明〕

与えられた命題の対偶をとると

m または n が偶数ならば，mn は偶数である

m が偶数のとき

k を整数として，$m = 2k$ と表されるので，$mn = 2kn$

したがって，mn は偶数である．
同様にして，n が偶数のときも mn は偶数である．
したがって，対偶命題は真である．
よって，与えられた命題も真となる． 〔証明終〕

【3】(1) 〔証明〕

n が奇数であると仮定すると，$n = 2m + 1$ (m は整数) と表せるので

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1 \end{aligned}$$

となる．これは，n^2 が偶数であることに矛盾する．

よって，n は偶数である．　　〔証明終〕

(2) 〔証明〕

$1 + \sqrt{2}$ は無理数でないと仮定すると，$1 + \sqrt{2}$ は有理数である．

$1 + \sqrt{2} = r$ とすると

$$\sqrt{2} = r - 1$$

r が有理数ならば，$r - 1$ も有理数であるから，この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する．

よって，$1 + \sqrt{2}$ は無理数である．　　〔証明終〕

【4】〔証明〕

$a = b$ であると仮定すると，

$a^2 > bc$ より，

$$a^2 > ac \cdots ①$$

$ac > b^2$ より，

$$ac > a^2 \cdots ②$$

①，② は矛盾するので，$a \neq b$ である．　　〔証明終〕

M1TK

高１難関大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号	

氏　名	