M2T

本科 1 期 7 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 難関大数学

１１章　確率

問題

【1】(1) 11 枚のカードから 2 枚のカードを抜き出す方法は

$${}_{11}C_2 = 55 \quad (\text{通り})$$

このとき，2 枚の数字の和が奇数となるのは

(奇数) + (偶数)

のときであり

奇数は，1，3，5，7，9 の 5 枚
偶数は，0，2，4，6，8，10 の 6 枚

だから，奇数 1 枚，偶数 1 枚の選び方は

$${}_5C_1 \cdot {}_6C_1 = 5 \times 6 = 30 \quad (\text{通り})$$

よって，2 数の和が奇数となる確率は

$$\frac{{}_5C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_{11}C_2} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11} \qquad (\text{答})$$

(2) (1) の余事象を考えればよいから

$$1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} \qquad (\text{答})$$

(3) 2 数の積が奇数となるのは

(奇数) × (奇数)

のときだから，奇数 2 枚の選び方は

$${}_5C_2 = 10 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{11}C_2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} \qquad (\text{答})$$

(4) 2 数の積が 0 となるのは，一方が 0 で，他方が 1 から 10 のいずれかだから

$${}_{10}C_1 = 10 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は

$$\frac{{}_{10}C_1}{{}_{11}C_2} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} \qquad (\text{答})$$

(5) 積が 3 の倍数となるには，少なくとも一方が 3 の倍数であればよい．
2 数の積が 3 の倍数とならないのは，0，3，6，9 を除く 7 枚から 2 枚を抜き出すときだから

$${}_7C_2 = 21 \quad (\text{通り})$$

よって，この余事象を考えて

$$1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55} \qquad (\text{答})$$

【2】(1) 条件より

$$\frac{{}_3C_2 + {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5} \qquad \text{(答)}$$

(2) A から取り出す 2 個の球が次の場合で分けて考える．

(i) 2 個とも赤　(ii) 2 個とも白　(iii) 赤・白 1 個ずつ

(i) のとき

A から取り出した球が 2 個とも赤である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

このとき, B の中には，赤球 4 個，白球 3 個入っていることになる．

ここから取り出した球が 2 個とも赤球である確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{6}{21}$$

よって，(i) の場合の確率は

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{6}{21} = \frac{18}{210}$$

(ii) のとき

A から取り出した球が 2 個とも白である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

このとき，B の中には，赤球 2 個，白球 5 個入っていることになる．

ここから取り出した球が 2 個とも赤球である確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{21}$$

よって，(ii) の場合の確率は

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{210}$$

(iii) のとき

A から取り出した球が，赤 1 個，白 1 個である確率は

$$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$$

このとき，B の中には，赤球 3 個，白球 4 個入っていることになる．

ここから取り出した球が 2 個とも赤球である確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{3}{21}$$

よって，(iii) の場合の確率は

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{3}{21} = \frac{18}{210}$$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$\frac{18}{210} + \frac{1}{210} + \frac{18}{210} = \frac{37}{210} \qquad \text{(答)}$$

【3】3 個の球を取り出すとき，白球の個数の方が黒球の個数より多くなるのは

(I)　白球 3 個，黒球 0 個　　　　(II)　白球 2 個，黒球 1 個

のいずれかである．

(1) 1 回の試行で白球を取り出す確率は

$$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

であり，黒球を取り出す確率は

$$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

だから，求める確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{8}{125}+\frac{36}{125}=\frac{44}{125}\qquad\text{(答)}$$

(2) 条件より

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{120}+\frac{36}{120}=\frac{1}{3}\qquad\text{(答)}$$

(3) 条件より

(I) 白球 3 個を取り出すとき

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

(II) 白球 2 個，黒球 1 個を取り出すとき

(i) 白・白・黒の順で取り出すとき

$$\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}=\frac{1}{10}$$

(ii) 白・黒・白の順で取り出すとき

$$\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{9}=\frac{4}{45}$$

(iii) 黒・白・白の順で取り出すとき

$$\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{25}$$

(I)，(II) より，求める確率は

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{4}{45}+\frac{2}{25}=\frac{68}{225}\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) A が 3 勝 0 敗で優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \qquad \text{(答)}$$

(2) A の 3 連勝で優勝が決まるのは，AAA，BAAA，BBAAA の 3 通り．
この確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{19}{243}$$

B の 3 連勝で優勝が決まるのは，BBB，ABBB，AABBB の 3 通り．
この確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{104}{243}$$

よって，A または B の 3 連勝で優勝が決まる確率は

$$\frac{19}{243} + \frac{104}{243} = \frac{123}{243} = \frac{41}{81} \qquad \text{(答)}$$

(3) 3 勝 2 敗で優勝が決まるのは，ゲームが 4 回終わった時点で 2 勝 2 敗で 5 回目は A，B のいずれが勝っても優勝者は決まる．
よって，求める確率は

$${}_4C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) 条件より

$$x^2 - 2ax + (b-1) = 0 \quad \cdots ①$$

が $x = 1$ を解にもつためには

$$1 - 2a + (b-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 2a$$

となればよいので，これをみたす a, b の組は

$$(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 6)$$

よって，求める確率は

$$\frac{3}{6^2} = \frac{1}{12} \qquad \text{(答)}$$

(2) 重解をもつためには，①の判別式を D とするとき

$$D/4 = a^2 - (b-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 + 1$$

となればよいので，これをみたす a, b の組は

$$(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 5)$$

よって，求める確率は

$$\frac{2}{6^2} = \frac{1}{18} \qquad \text{(答)}$$

(3) ①の 2 解を求めると

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - b + 1}$$

このとき，2 解が整数となるためには

「$a^2 - b + 1$ が平方数になればよい」

ので

(i) $a^2 - b + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 + 1$ のとき

$$(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 5)$$

(ii) $a^2 - b + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2$ のとき

$$(a,\ b) = (1,\ 1),\ (2,\ 4)$$

(iii) $a^2 - b + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 - 3$ のとき

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (3,\ 6)$$

(iv) $a^2 - b + 1 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 - 8$ のとき

$$(a,\ b) = (3,\ 1)$$

(v) $a^2 - b + 1 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 - 15$ のとき

$$(a,\ b) = (4,\ 1)$$

(vi) $a^2 - b + 1 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 - 24$ のとき

$$(a,\ b) = (5,\ 1)$$

(vii) $a^2 - b + 1 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad b = a^2 - 35$ のとき

$$(a,\ b) = (6,\ 1)$$

よって，求める確率は

$$\frac{10}{6^2} = \frac{5}{18} \qquad \text{(答)}$$

【6】(a), (b), (c), (d) の起こる確率は，それぞれ

$$\frac{1}{3},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{6}$$

(1) 4 回の試行中，(a) が 2 回，(c) が 2 回起これればよいから，求める確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{54}\qquad\text{(答)}$$

(2) x 軸上だけを動くということに注意すると，(a) が 3 回，(b) が 1 回起これればよいから

$${}_4\mathrm{C}_3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}\qquad\text{(答)}$$

(3) 最後に，点 P が原点 O に戻ってくるのは

(i) (a) が 2 回，(b) が 2 回
(ii) (a), (b), (c), (d) がそれぞれ 1 回ずつ
(iii) (c) が 2 回，(d) が 2 回

のいずれかである．このとき
(i) の確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{27}$$

(ii) の確率は

$$4!\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{27}$$

(iii) の確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{216}$$

(i)～(iii) から，求める確率は

$$\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{1}{216}=\frac{11}{72}\qquad\text{(答)}$$

１２章　整数（１）

問題

【1】(1) 360 を素因数分解すると

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

となる．ここで，360 の正の約数は

$$360 = 2^k \cdot 3^l \cdot 5^m \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ m = 0,\ 1) \quad \cdots\cdots(*)$$

と表せるから，360 の正の約数の総数は

$4 \times 3 \times 2 = 24$ (個)　　(答)

(2) 次の式

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)$$

を展開すれば，$(*)$ で得られる約数が 1 回ずつすべて現れるから，求める約数の総和は

$$\begin{aligned} & (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1) \\ = \ & (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 3 + 9)(1 + 5) \\ = \ & 15 \times 13 \times 6 = 1170 \end{aligned}$$

(答)

(3) 360 の正の約数を小さい順に

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{24}$$

とおく．このとき

$$a_1 \cdot a_{24} = 360,\ a_2 \cdot a_{23} = 360, \ldots,\ a_{12} \cdot a_{13} = 360$$

であるから，これら 12 個の組をすべてかけあわせると

$$(a_1 \cdot a_{24}) \times (a_2 \cdot a_{23}) \times \cdots \times (a_{12} \cdot a_{13}) = 360^{12}$$

よって，求める値は

$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{24} = 360^{12}$　　(答)

【2】(1) 与式を変形すると

$$\begin{aligned}&xy-2x-3y+6=6\\&(x-3)(y-2)=6\end{aligned}$$

6 の約数は $\pm1, \pm2,\ \pm3,\ \pm6$ であり
$x \geqq 1,\ y \geqq 1$ より $x-3 \geqq -2,\ y-2 \geqq -1$ に注意して

$$\begin{aligned}&(x-3,\ y-2)=(1,\ 6),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (6,\ 1)\\&\therefore\quad (x,\ y)=(4,\ 8),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),\ (9,\ 3)\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(2) m を正整数として

$$\sqrt{n^2+15}=m$$

とおける．辺々正より 2 乗して

$$\begin{aligned}n^2+15&=m^2\\m^2-n^2&=15\\(m+n)(m-n)&=15\end{aligned}$$

15 の約数は $1,\ 3,\ 5,\ 15$ であり，$m+n>0,\ n>0$ より $m+n>m-n \geqq 0$ であるから

$$\begin{aligned}&(m+n,\ m-n)=(5,\ 3),\ (15,\ 1)\\&(m,\ n)=(4,\ 1),\ (8,\ 7)\\&\therefore\quad n=1,\ 7\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

【3】(1) 与方程式の解の 1 つが $(x,\ y) = (4,\ -1)$ であるので

$$3x + 7y = 5 \ \cdots ①$$
$$3 \cdot 4 + 7 \cdot (-1) = 5 \ \cdots ②$$

① − ② より

$$3(x-4) + 7(y+1) = 0$$
$$\therefore \quad 3(x-4) = -7(y+1) \ \cdots ③$$

となり，③ の右辺は 7 の倍数だから，左辺も 7 の倍数である．ここで，3 と 7 は互いに素であるから

$$x - 4 = 7k \quad (k \text{ は整数})$$

とおけて，このとき ③ より

$$y + 1 = -3k$$

となるから

$$(x,\ y) = (7k+4,\ -3k-1) \quad (k \text{ は整数}) \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める 2 桁の自然数を

$$10x + y \qquad (x,\ y \text{ は整数で，} 1 \leqq x \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 9)$$

とすると，題意より

$$6(x+y) = 10x + y + 2$$
$$\therefore \quad 5y = 4x + 2 \qquad \cdots (*)$$

$(*)$ の特殊解として，$(x,\ y) = (2,\ 2)$ があるから $(*)$ の一般解は

$$(x,\ y) = (5n+2,\ 4n+2) \quad (n \text{ は整数})$$

ここで，$1 \leqq x \leqq 9,\ 0 \leqq y \leqq 9$ より

$$1 \leqq 5n+2 \leqq 9,\ 0 \leqq 4n+2 \leqq 9$$

これらをともに満たす整数 n は

$$n = 0,\ 1$$

このとき

$$(x,\ y) = (2,\ 2),\ (7,\ 6)$$

したがって，求める 2 桁の自然数は

$$22,\ 76 \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 与式の両辺に $2ab\ (\neq 0)$ をかけて

$$2a + 2b = ab$$
$$ab - 2a - 2b = 0$$
$$(a-2)(b-2) = 4$$

ここで，$a,\ b$ は正整数より $a - 2 \geqq -1,\ b - 2 \geqq -1$ であるから

$$(a-2,\ b-2) = (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$$
$$\therefore\quad (a,\ b) = (3,\ 6),\ (4,\ 4),\ (6,\ 3) \qquad \text{(答)}$$

(2) $a \leqq b \leqq c$ と仮定すると

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{3}{a}$$

より

$$a \leqq 3$$
$$\therefore\quad a = 1,\ 2,\ 3 \quad (\because\ a \text{ は正整数})$$

(i) $a = 1$ のとき

$$(\text{与式}) \iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

となり不適.

(ii) $a = 2$ のとき

$$(\text{与式}) \iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$

となるから，(1) の結果を利用して

$$(b,\ c) = (3,\ 6),\ (4,\ 4)$$

(iii) $a = 3$ のとき

$$(\text{与式}) \iff \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$$

となるが，このとき

$$3 \leqq b \leqq c$$

より

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

だから

$$(b,\ c) = (3,\ 3)$$

に限る.

以上より，求める $a,\ b,\ c\ (a \leqq b \leqq c)$ の組は

$$(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$$

となる．対称性より，求める $a,\ b,\ c$ の組は

$$(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 6,\ 3),\ (3,\ 2,\ 6),\ (3,\ 6,\ 2),\ (6,\ 2,\ 3),$$
$$(6,\ 3,\ 2),\ (2,\ 4,\ 4),\ (4,\ 2,\ 4),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$$

である.　　(答)

【5】(1) 与式より

$$m^2 - n^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m+n)(m-n) = 4$$

ここで，$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致するから

$$(m+n,\ m-n) = (\pm 2,\ \pm 2) \quad (\text{複号同順})$$
$$\therefore \quad (m,\ n) = (\pm 2,\ 0) \qquad (\text{答})$$

(2) 与式より

$$m^3 - n^3 = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-n)(m^2+mn+n^2) = 7$$

ここで，$m^3 - n^3 > 0$ より

$$m^3 - n^3 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m > n \quad \Longleftrightarrow \quad m - n > 0$$

であり，また

$$\begin{aligned}(m^2+mn+n^2) - (m-n) &= m^2 + (n-1)m + n^2 + n \\ &= \left(m + \frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(n+1)^2 - 1 \\ &\geqq -1\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} m - n = 1 \ \cdots ① \\ m^2 + mn + n^2 = 7 \ \cdots ② \end{cases}$$

① より

$$m = n + 1 \ \cdots ①'$$

これを ② へ代入して

$$\begin{aligned} & (n+1)^2 + (n+1)n + n^2 = 7 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3n^2 + 3n - 6 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & n^2 + n - 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (n+2)(n-1) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & n = -2,\ 1 \end{aligned}$$

よって，① とから

$$(m,\ n) = (-1,\ -2),\ (2,\ 1) \qquad (\text{答})$$

【6】(1) y は整数，すなわち実数であるから

$$y^2 \geqq 0$$

が成り立つ．したがって，与式より

$$y^2 = 5 - x^2 \geqq 0$$
$$\therefore \quad -\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5}$$

x は整数であるから

$$x = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

となる．

(i) $x = 0$ のとき，$x^2 + y^2 = 5$ より

$$y^2 = 5 \qquad \therefore \quad y = \pm\sqrt{5}$$

であるが，これは y が整数であることに反するので，不適．

(ii) $x = 1$ のとき，$x^2 + y^2 = 5$ より

$$y^2 = 4 \qquad \therefore \quad y = \pm 2$$

(iii) $x = 2$ のとき，$x^2 + y^2 = 5$ より

$$y^2 = 1 \qquad \therefore \quad y = \pm 1$$

以上から，求める $x,\ y$ の値の組は

$$(x,\ y) = (\pm 1,\ \pm 2),\ (\pm 2,\ \pm 1) \quad \text{(複号任意)} \qquad \text{(答)}$$

(2) x は実数であるから，与えられた方程式より

$$3x^2 = 23 - 5y^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad y^2 \leqq \frac{23}{5}$$

これをみたす整数 y は

$$y = 0,\ \pm 1,\ \pm 2$$

以下，次のように場合分けをする．

(i) $y = 0$ のとき
与えられた方程式は

$$3x^2 = 23$$

これをみたす整数 x は存在しない．

(ii) $y = \pm 1$ のとき
与えられた方程式は

$$3x^2 + 5 = 23 \qquad \therefore \quad 3x^2 = 18 \qquad \therefore \quad x^2 = 6$$

これをみたす整数 x は存在しない．

(iii) $y=\pm 2$ のとき

与えられた方程式は

$$3x^2+20=23 \qquad \therefore \quad 3x^2=3 \qquad \therefore \quad x^2=1$$

したがって

$$x=\pm 1$$

以上より，求める整数解は

$(x,\ y)=(\pm 1,\ \pm 2)$　(複号任意)　　(答)

(3) 与方程式

$$5x^2-2(6y+3)x+10y^2-4y+13=0 \cdots ①$$

を x についての 2 次方程式とみて，判別式を D とすると，整数解 x をもつので

$$\frac{D}{4}=(6y+3)^2-5(10y^2-4y+13) \geqq 0$$
$$-14(y-2)^2 \geqq 0$$
$$\therefore \quad y=2$$

①より

$$5x^2-30x+45=0$$
$$(x-3)^2=0$$
$$\therefore \quad x=3$$

よって

$(x,\ y)=(3,\ 2)$　　(答)

１３章　整数（２）

問題

【1】(1) n は奇数より，$n=2k+1$ とおく．

$$\begin{aligned} n^2-1 &= (2k+1)^2-1 \\ &= (2k+1+1)(2k+1-1) \\ &= 4k(k+1) \end{aligned}$$

ここで，$k(k+1)$ は連続した 2 整数の積なので，偶数だから，$4k(k+1)$ は 8 の倍数である．

すなわち，n^2-1 は 8 の倍数である．　〔証明終〕

(2) 与式を因数分解すると

$$\begin{aligned} n^5-n &= n(n^4-1) \\ &= n(n^2-1)(n^2+1) \quad \cdots\cdots ① \\ &= (n-1)n(n+1)(n^2+1) \end{aligned}$$

ここで，$(n-1)n(n+1)$ は連続した 3 整数の積なので，3 の倍数だから，n^5-n は 3 の倍数である．　〔証明終〕

(3) $f(n)=n^5-n$ とおく．①より，$f(n)$ は n^2-1 を因数にもち，(1) の結果から

$f(n)$ は 8 の倍数 $\cdots\cdots$②

であり，また，(2) の結果より

$f(n)$ は 3 の倍数 $\cdots\cdots$③

である．②，③および 3 と 8 は互いに素であることから

$f(n)$ は 24 の倍数

すなわち，$f(n)$ が 5 の倍数であることを示せば，24 と 5 が互いに素であることから，$f(n)$ が 120 の倍数であるといえる．以下，$f(n)$ が 5 の倍数であることを示す．

l を整数として，n について 5 の剰余で場合を分けると

(i) $n=5l$ のとき
n が 5 の倍数であるので，$f(n)$ は 5 の倍数．

(ii) $n=5l\pm 1$ のとき
$n^2-1=25l^2\pm 10l$ が 5 の倍数であるので，$f(n)$ は 5 の倍数．

(iii) $n=5l\pm 2$ のとき
$n^2+1=25l^2\pm 20l+5$ が 5 の倍数であるので，$f(n)$ は 5 の倍数．

よって，任意の自然数 n について，$f(n)$ は 5 の倍数．

以上から，$f(n)$ は 120 の倍数である．　〔証明終〕

【2】与条件より，整数 m を用いて

$$11n+5=7m \cdots ①$$

とかける．$(n,\ m)=(4,\ 7)$ のとき，この式は成立するから

$$11\cdot 4+5=7\cdot 7 \cdots ②$$

が成立する．① − ② より

$$11(n-4)=7(m-7) \cdots ③$$

ここで，③ の右辺は 7 の倍数であるから，左辺も 7 の倍数である．7 と 11 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$n-4=7k$$

とかける．また，このとき ③ から

$$\begin{aligned} 11\cdot 7k &= 7(m-7) \\ 11k &= m-7 \\ m &= 11k+7 \end{aligned}$$

となるから

$$(n,\ m)=(7k+4,\ 11k+7) \quad (k\text{ は整数})$$

のときに限り，与条件をみたす.

よって，求める n の値は

$$n=7k+4 \quad (k\text{ は整数}) \qquad (\text{答})$$

【3】$a,\ b,\ c$ がいずれも 3 の倍数でないとすると，整数 $l,\ m,\ n$ により

$$a=3l\pm 1,\ b=3m\pm 1,\ c=3n\pm 1 \quad (\text{複号任意})$$

と表せて，このとき

$$\begin{aligned} a^2+b^2-c^2 &= (3l\pm 1)^2+(3m\pm 1)^2-(3n\pm 1)^2 \\ &= 3(3l^2+3m^2-3n^2\pm 2l\pm 2m\mp 2n)+1 \end{aligned}$$

これは 3 で割って 1 余る整数だから，$a^2+b^2-c^2=0$ に反する．したがって，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 3 の倍数である．　〔証明終〕

【4】(1) 任意の整数 x は，整数 n を用いて

$$5n,\ 5n \pm 1,\ 5n \pm 2$$

のいずれかの形で表される．このとき，x^2 を 5 で割ったときの余りを考えると

$$\begin{cases} (5n^2) = 25n^2 & \cdots\cdots \quad 余り\ 0 \\ (5n \pm 1)^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1 & \cdots\cdots \quad 余り\ 1 \\ (5n \pm 2)^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4 & \cdots\cdots \quad 余り\ 4 \end{cases}$$

したがって，x^2 を 5 で割ったときの余りは，0，1，4 のいずれかである．

〔証明終〕

(2) (1) より，x^2 は整数 N を用いて

$$5N,\ 5N \pm 1$$

のいずれかの形で表される．

$x^4 = (x^2)^2$ を 5 で割ったときの余りを考えると

$$\begin{cases} (5N)^2 = 25N^2 & \cdots\cdots \quad 余り\ 0 \\ (5N \pm 1)^2 = 5(5N^2 \pm 2N) + 1 & \cdots\cdots \quad 余り\ 1 \end{cases}$$

したがって，x^4 を 5 で割ったときの余りは，0，1 のいずれかである．

〔証明終〕

(3) 与式より

$$x^4 - 5y^4 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 - 2 = 5y^4 \ \cdots ①$$

となる．

① の右辺は 5 の倍数であるから，① の左辺も 5 の倍数．

ところが，(2) より $x^4 - 2$ を 5 で割ったときの余りは 3，4 のいずれかになるから，これは左辺が 5 の倍数であることに反する．

よって，与式をみたすような整数の組 $(x,\ y)$ は存在しない．　〔証明終〕

【5】n を 3 で割った余りで分類すると

(i) $n = 3k\ (k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ のとき
n は 3 の倍数であるので，$k = 1$ のとき，$n = 3$ と $n^2 + 2 = 11$ はともに素数となり，
$k \geqq 2$ のとき，n は合成数となる．

(ii) $n = 3k + 1\ (k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= (3k + 1)^2 + 2 \\ &= 3(3k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

ここで

$$3k^2 + 2k + 1 \geqq 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 6$$

より，$n^2 + 2$ は合成数となる．

(iii) $n = 3k - 1\ (k = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 + 2 &= (3k - 1)^2 + 2 \\ &= 3(3k^2 - 2k + 1) \end{aligned}$$

ここで

$$3k^2 - 2k + 1 \geqq 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

より，$n^2 + 2$ は合成数となる．

以上より，2 以上のすべての自然数 n について，n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限る．　〔証明終〕

M2T

高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	