M2TK

本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学Ｋ

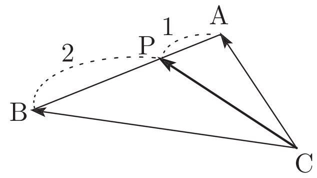
問題

【1】(1)

$$\vec{p} = \frac{2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}}{1+2}$$

であるから，P$(\vec{p})$ は

線分 AB を 1 : 2 に内分する点　　(答)

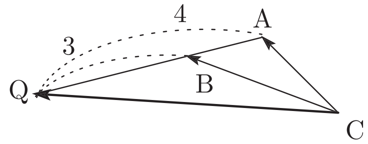


(2)

$$\vec{q} = \frac{-3\vec{a} + 4\vec{b}}{4+(-3)}$$

であるから，Q$(\vec{q})$ は

線分 AB を 4 : 3 に外分する点　　(答)



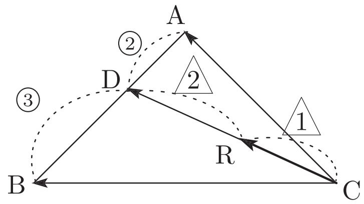
(3)

$$\vec{r} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{15}$$
$$= \frac{5}{15} \cdot \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3}$$

であるから，R$(\vec{r})$ は

線分 AB を 2 : 3 に内分する点を D としたとき，

線分 CD を 1 : 2 に内分する点　　(答)



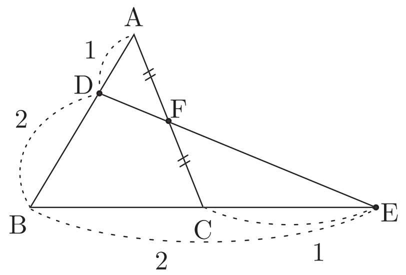
【2】

「D，E，F が共線である（一直線上にある）」

$\Longleftrightarrow$ 「$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = t\overrightarrow{\mathrm{DE}}$　　となる実数 t が存在する」

上が成立することを示す．

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c}$ とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{2}{3}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = 2\vec{c}$$

であるから

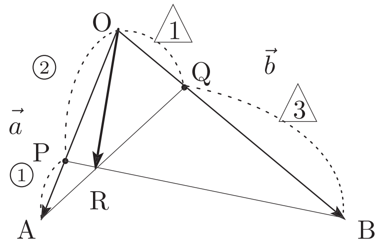
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{BE}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}\\ &= 2\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BF}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{a}\\ &= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a}\\ &= \frac{1}{4}\left(2\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 D，E，F は一直線上にある．　　〔証明終〕

【3】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とする.



3 点 P，R，B が共線であるから，

$$\mathrm{PR}:\mathrm{RB}=s:(1-s)\quad (s\text{ は実数})$$

とおくと，$\vec{p}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-s)\vec{p}+s\vec{b}\\&=\frac{2}{3}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

また，3 点 A，R，Q が共線であるから，

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=t:(1-t)\quad (t\text{ は実数})$$

とおくと，$\vec{q}=\dfrac{1}{4}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-t)\vec{a}+t\vec{q}\\&=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して，

$$\frac{2}{3}(1-s)=1-t,\quad s=\frac{1}{4}t$$

これを解いて

$$s=\frac{1}{10},\quad t=\frac{2}{5}$$

② に代入して，

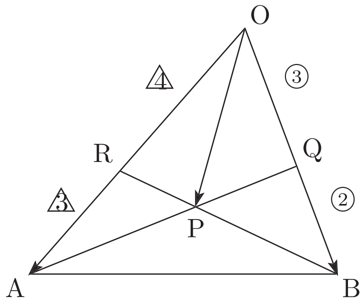
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}}\qquad(\text{答})$$

(2) (1) の結果より

$$\mathrm{AR}:\mathrm{RQ}=t:(1-t)=\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=\mathbf{2:3}\qquad(\text{答})$$

【4】 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{4}{7}\vec{a}$.

$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=s:(1-s)$ (s は実数) とおくと，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\quad\cdots①\end{aligned}$$

また $\mathrm{RP}:\mathrm{PB}=t:(1-t)$ (t は実数) とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{4}{7}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$1-s=\frac{4}{7}(1-t),\quad \frac{3}{5}s=t$$

連立して解くと

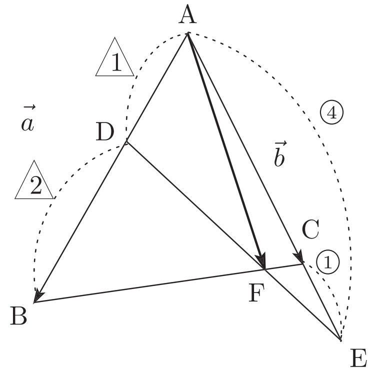
$$s=\frac{15}{23},\quad t=\frac{9}{23}$$

①に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{8}{23}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boldsymbol{\frac{9}{23}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad(答)$$

【5】 (1) 3点 $\mathrm{D}(\vec{d})$, $\mathrm{F}(\vec{f})$, $\mathrm{E}(\vec{e})$ が共線であるから，

$$\mathrm{DF}:\mathrm{FE}=t:(1-t)\qquad(t\ は実数)$$



とおくと，$\vec{d}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$, $\vec{e}=\dfrac{4}{3}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{f}&=(1-t)\vec{d}+t\vec{e}\\&=\frac{1}{3}(1-t)\vec{a}+\frac{4}{3}t\vec{b}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

また，3点 B，F，C が共線であるから，

$$\frac{1}{3}(1-t)+\frac{4}{3}t=1$$
$$\therefore\quad t=\frac{2}{3}$$

① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\boldsymbol{\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\vec{b}}\qquad(答)$$

(2) (1) の結果より

$$\mathrm{DF}:\mathrm{FE}=t:(1-t)=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\mathbf{2:1}\qquad(答)$$

(3) (1) の結果より

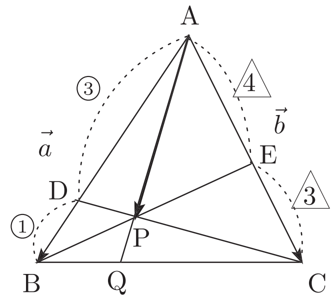
辺 BC を 8 : 1 に内分する点　　(答)

【6】3 点 D，P，C が共線であるから，

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PC} = s : (1-s) \qquad (s\text{ は実数})$$

として，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots ① \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{4}s\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$



3 点 B，P，E が共線であるから，

$$\frac{3}{4}(1-s) + \frac{7}{4}s = 1$$

これを解いて

$$s = \frac{1}{4}$$

① に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{9}{16}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

また 3 点 A，P，Q が共線であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AP}} \ (k\text{ は実数}) \\ &= \frac{9}{16}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

3 点 B，Q，C が共線であるから

$$\frac{9}{16}k + \frac{1}{4}k = 1$$

これを解いて

$$k = \frac{16}{13}$$

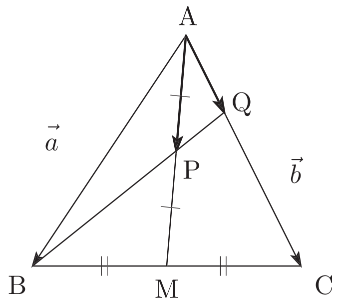
ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{13}{16}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

以上より，点 Q は **辺 BC を 4 : 9 に内分する点**　(答) であり，
点 P は **線分 AQ を 13 : 3 に内分する点**　(答) である.

【7】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{m}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{q}$ とする.

$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ であるから，条件より



$$\begin{aligned}\vec{p}&=\frac{1}{2}\vec{m}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

また，s を実数として

$$\begin{aligned}\vec{q}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BP}}\qquad(\because\quad 3\text{ 点 B, P, Q は共線})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\&=\vec{a}+s\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=\left(1-\frac{3}{4}s\right)\vec{a}+\frac{1}{4}s\vec{b}\quad\cdots①\end{aligned}$$

また 3 点 A，Q，C は共線より，t を実数として

$$\vec{q}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\vec{b}\quad\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立より，①，② の係数を比較して

$$1-\frac{3}{4}s=0,\quad \frac{1}{4}s=t$$

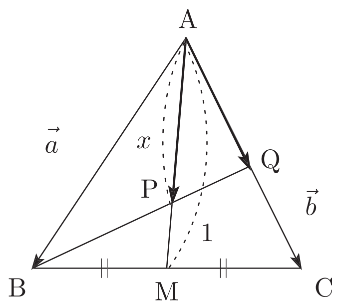
これを解いて

$$s=\frac{4}{3},\quad t=\frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\vec{q}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\vec{b}}\qquad\text{(答)}$$

(2)
$$\begin{aligned}\vec{p} &= x\vec{m} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)\\ &= x\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= \frac{x}{2}\vec{a}+\frac{x}{2}\vec{b}\end{aligned}$$



3 点 B，P，Q は共線より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BP}} \qquad (s\ は実数)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\ &= \vec{a} + s\left(\frac{x}{2}\vec{a}+\frac{x}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\\ &= \left(1-s+\frac{sx}{2}\right)\vec{a}+\frac{sx}{2}\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また 3 点 A，Q，C は共線より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad (t\ は実数)$$

ゆえに

$$\vec{q} = t\vec{b} \qquad \cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$1-s+\frac{sx}{2}=0, \quad \frac{sx}{2}=t$$

これを解いて

$$s=\frac{2}{2-x}, \quad t=\frac{x}{2-x}$$

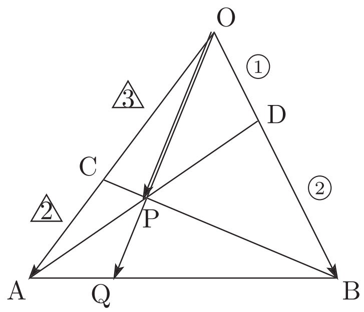
ゆえに ② と合わせて

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{\frac{x}{2-x}\vec{b}} \qquad (答)$$

【8】 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ である．

(1) $AP:PD=t:(1-t)$ (t は実数) とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}\\&=(1-t)\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{OC}\right)+t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\\&=\frac{5}{3}(1-t)\overrightarrow{OC}+\frac{1}{3}t\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$



3 点 B，P，C は共線であるから

$$\frac{5}{3}(1-t)+\frac{1}{3}t=1$$

これを解いて $t=\dfrac{1}{2}$．ゆえに

$$\overrightarrow{OP}=\mathbf{\frac{1}{2}}\overrightarrow{OA}+\mathbf{\frac{1}{6}}\overrightarrow{OB} \qquad \text{(答)}$$

(2) 3 点 O，P，Q は共線であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}&=k\overrightarrow{OP}\\&=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}k\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

3 点 A，Q，B は共線であるから

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}k=1$$

これを解いて $k=\dfrac{3}{2}$．ゆえに

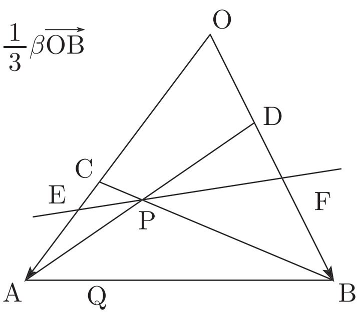
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$$

したがって

$$OQ:PQ=\mathbf{3:1} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{3}{5}\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



であり，3 点 E，P，F は共線であるから l を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-l)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + l\overrightarrow{\mathrm{OF}} \\ &= \frac{3}{5}\alpha(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\beta l\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

ここで (1) より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{3}{5}\alpha(1-l) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}\beta l = \frac{1}{6}$$

点 E は線分 AC 上，点 F は線分 BD 上であるから $\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$．ゆえに

$$1 - l = \frac{5}{6\alpha}, \quad l = \frac{3}{6\beta}$$

辺々加えて

$$\frac{5}{6\alpha} + \frac{3}{6\beta} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{6}\left(\frac{5}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right) = 1$$ 〔証明終〕

１２章　ベクトル（４）－ベクトル方程式－

問題

【1】求める直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，点 A，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{p}$ とする．またベクトルの成分を縦書きで表示する．

(1) 求める直線のベクトル方程式は，t を実数として

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3t\\2+4t\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases}x=1-3t & \cdots ①\\ y=2+4t & \cdots ②\end{cases}$$

① $\times 4+$ ② $\times 3$ より t を消去すると

$$\boldsymbol{4x+3y=10} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$$

求める直線は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線であるから，t を実数として

$$\vec{p}=\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

となる．すなわち

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+7t\\1+2t\end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases}x=-3+7t & \cdots ③\\ y=1+2t & \cdots ④\end{cases}$$

③ $\times 2-$ ④ $\times 7$ より t を消去すると

$$\boldsymbol{2x-7y=-13} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める直線は点 A を通り，$\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから，

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n}&=0\\ \begin{pmatrix}x-3\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}&=0\\ 3(x-3)-2y&=0\end{aligned}$$

よって求める直線は

$$\boldsymbol{3x-2y=9} \qquad \text{(答)}$$

【2】求める円周上の点を P$(x,\ y)$，P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする．

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}-\vec{c}\right|&=4\\ \therefore\quad \left|\begin{pmatrix}x-1\\y-3\end{pmatrix}\right|&=4\end{aligned}$$

両辺を 2 乗して，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2=16} \qquad \text{(答)}$$

(2) 【解 1】

求める円の中心を C$(\vec{c})$ とすると，C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

また半径を r とすると

$$\begin{aligned}r&=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\\ &=\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{5}\end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5} \qquad \text{(答)}$$

【解 2】

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

とすると，円周上の点 P に対し AP ⊥ BP であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$$

となる．これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する．ゆえに

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)&=0\\ \begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-4\\y-1\end{pmatrix}&=0\\ (x-2)(x-4)+(y+3)(y-1)&=0\\ x^2-6x+y^2+2y+5&=0\end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2+(y+1)^2=5} \qquad \text{(答)}$$

(3) 求める円の半径を r とすると，

$$r=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=\left|\begin{pmatrix}1+2\\6-5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{10}$$

ゆえに $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ として

$$\begin{aligned}\left|\vec{p}-\vec{c}\right|&=\sqrt{10}\\ \left|\begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix}\right|&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

よって求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2=10} \qquad \text{(答)}$$

【3】原点を O とする．

(1) $\vec{p} \neq \vec{a}$ のとき，OB⊥AP である．また $\vec{p} = \vec{a}$ のとき，点 P は点 A に一致する．

よって点 P は

点 A を通り，直線 OB に垂直な直線　　(答)

上の点である（図 1）．

(2) $\vec{p} \neq \vec{0}$ のとき AB⊥OP である．また $\vec{p} = \vec{0}$ のとき，点 P は点 O に一致するから，

点 P は

点 O を通り，直線 AB に垂直な直線　　(答)

上の点である（図 2）．

(3) $\vec{p} \neq \vec{c}$ のとき，AB⊥PC である．また $\vec{p} = \vec{c}$ のとき，点 P は点 C に一致する．

よって点 P は

点 C を通り，直線 AB に垂直な直線　　(答)

上の点である（図 3）．

(4) $\vec{p} \neq \vec{a}$ かつ $\vec{p} \neq \vec{b}$ のとき，AP ⊥ BP，すなわち

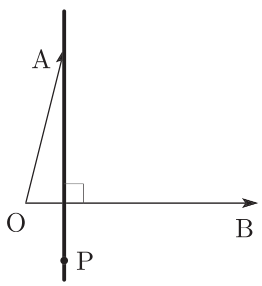
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0 \iff \left(\vec{p} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{p} - \vec{b}\right) = 0$$

である．$\vec{p} = \vec{a}$ または $\vec{p} = \vec{b}$ のときも上式はみたされる．ゆえに点 P は

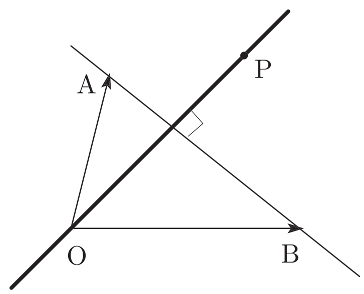
線分 AB を直径とする円周　　(答)

上の点である（図 4）．

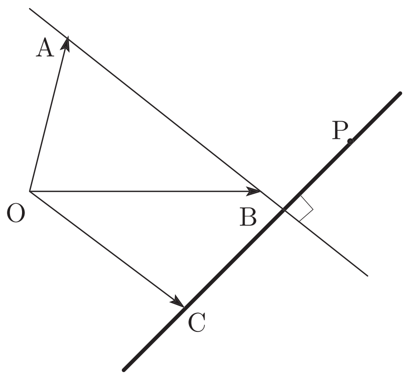
〔図 1〕



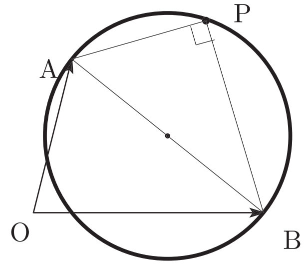
〔図 2〕



〔図 3〕



〔図 4〕



【4】(1) l_1 の方向ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であるから，t を実数として

$$l_1 \ : \ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\t\end{pmatrix}$$

また l_2 は 2 点 A(0, 1)，B(2, -3) を通るから，s を実数として

$$l_2 \ : \ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(1-s)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s\\1-4s\end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{cases} l_1 \ : \ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2+t}\\\boldsymbol{t}\end{pmatrix} \\ l_2 \ : \ \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2s}\\\boldsymbol{1-4s}\end{pmatrix}\end{cases} \quad (s,\ t \text{ は実数}) \qquad (\text{答})$$

(2) l_1，l_2 を連立して

$$\begin{cases} 2+t=2s & \cdots ① \\ t=1-4s & \cdots ② \end{cases}$$

①，② を連立して

$$s=\frac{1}{2},\quad t=-1$$

l_1 の方程式に代入して，求める交点は

$$\boldsymbol{(1,\ -1)} \qquad (\text{答})$$

【5】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{d}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ である．これが直線 l の方向ベクトルであるから，直線 l のベクトル方程式は s を実数として

$$\begin{aligned} l:\vec{p}&=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1+3s\\4-s\end{pmatrix} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

一方，A(3, 2)，B(−2, 7) を通る直線 m の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$

であるから，m のベクトル方程式は，t を実数として

$$\begin{aligned} m:\vec{q}&=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}3-5t\\2+5t\end{pmatrix} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

交点においては $\vec{p}=\vec{q}$ であるから

$$\begin{cases}1+3s=3-5t\\4-s=2+5t\end{cases}$$

これを解くと，

$$(s,\ t)=\left(0,\ \frac{2}{5}\right)$$

① に代入して，求める交点は

(1, 4)　　(答)

(2) 直線 n のベクトル方程式を求める．
$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を 3 頂点とする三角形の重心を $\mathrm{G}(\vec{g})$ とすると

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

より，

$$\vec{g}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3+2+4\\0+5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

また n の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ であるから，n 上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，直線 n のベクトル方程式は $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ として

$$\begin{aligned} n:\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ (t\text{ は実数})\\ &=\begin{pmatrix}1+2t\\3-t\end{pmatrix} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

一方 D$(-1,\ 3)$，E$(1,\ 9)$ とすると，D$(\vec{d})$，E$(\vec{e})$ を直径の両端とする円 C の中心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+1 \\ 3+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

である．また円 C の直径は

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = \sqrt{\{1-(-1)\}^2+(9-3)^2} = 2\sqrt{10}$$

であるから，半径を r とすると

$$r = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

円周上の点を Q$(\vec{q})$ とすれば，$\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10}$$
$$x^2+(y-6)^2 = 10 \quad \cdots ②$$

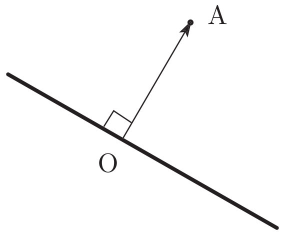
交点において $\vec{p} = \vec{q}$ であるから，$x = 2t+1$，$y = -t+3$ を ② に代入すると，

$$(2t+1)^2+(-t+3-6)^2 = 10$$
$$t(t+2) = 0$$
$$t = 0,\ -2$$

① に代入して，求める交点は

$t = 0$ のとき　**(1, 3)**　　**(答)**
$t = -2$ のとき　**(−3, 5)**　　**(答)**

【6】(1) 与式の両辺を 2 乗して



$$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|^2$$

$$\left|\vec{p}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}+4\left|\vec{a}\right|^2$$

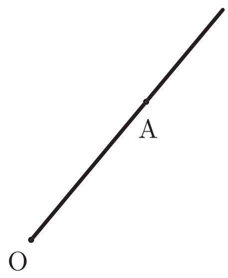
$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{p}=0$$

よって，$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき $\mathrm{OA}\perp\mathrm{OP}$ である．
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも，この式はみたされる．ゆえに点 P は

点 O を通り，直線 OA に垂直な直線　　(答)

上の点である．

(2) $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると



$$\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta$$

であるから

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$

$$\cos\theta=1$$

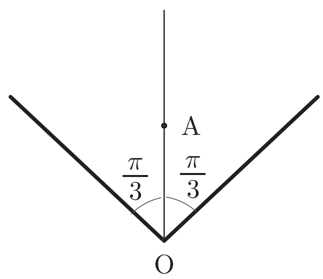
$$\theta=0$$

となる．また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．
よって点 P は

半直線 OA　　(答)

上の点である．

(3) $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると



$$2\vec{a}\cdot\vec{p}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$

$$2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad\theta=\frac{\pi}{3}$$

である．
また $\vec{p}=\vec{0}$ のときも与式はみたされ，このとき点 P は点 O に一致する．
したがって，点 P は

半直線 OA と $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ の角をなす半直線　　(答)

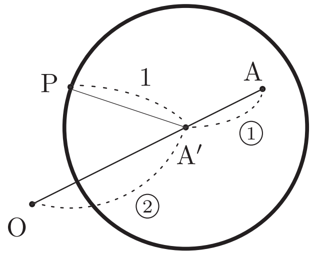
上の点である．

【7】原点を O とする．

(1)

$$\left|3\left(\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\right|=3$$

$$\left|\vec{p}-\frac{2}{3}\vec{a}\right|=1$$



よって，線分 OA を 2: 1 に内分する点を A′ とすると，

点 P は

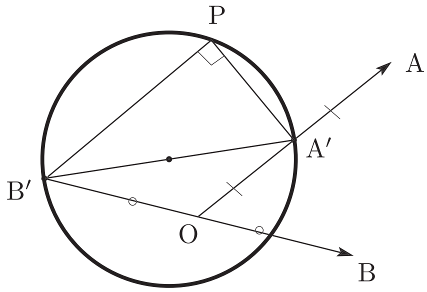
点 A′を中心とする半径 1 の円周　　(答)

上の点である．

(2)

$$2\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot(\vec{p}+\vec{b})=0$$

$$\left(\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\{\vec{p}-(-\vec{b})\}=0$$



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}'=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}'=-\vec{b}$ とすると，

$\mathrm{A'P}\perp\mathrm{B'P}$ である．

また，点 P が A′ または B′ と一致するときも上式はみたされる．

ゆえに線分 OA の中点を A′，O に関して B と対称な点を B′ とすると，点 P は

A′B′を直径の両端とする円周上　　(答)

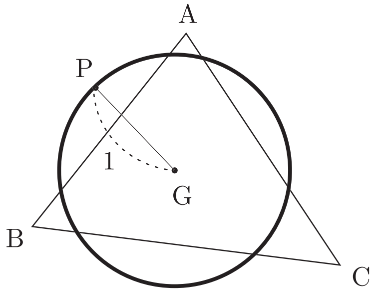
の点である．

(3)

$$\left|(\vec{p}-\vec{a})+(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{c})\right|=3$$

$$\left|3\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\right|=3$$

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=1$$



ここで，△ABC の重心を G($\vec{g}$) とすると

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

であるから

$$\left|\vec{p}-\vec{g}\right|=1 \qquad \therefore \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{GP}}\right|=1$$

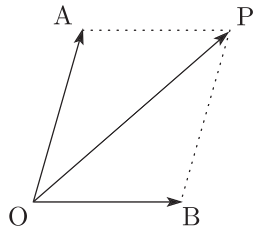
よって，点 P は

△ABC の重心 G を中心とする半径 1 の円周上　　(答)

の点である．

【8】 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots (*)$ とおく．

(1) 4 角形 OAPB が平行 4 辺形となるとき

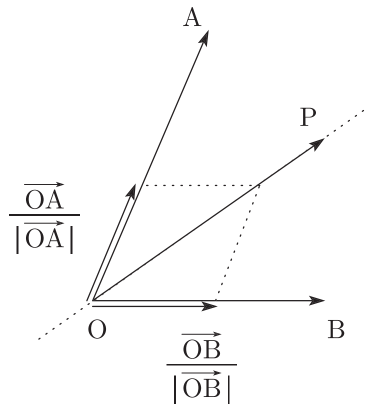


$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であるから，$(*)$ と係数を比較して，求める値は

$$\boldsymbol{s = t = 1} \qquad (答)$$

(2) 点 P は ∠AOB の 2 等分線であるから，k を実数として



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right) \\ &= \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

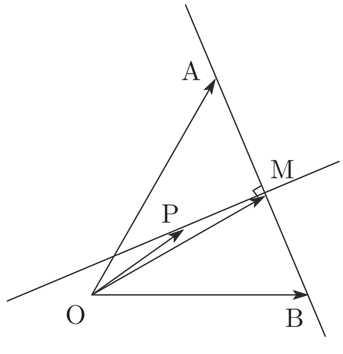
$(*)$ と係数を比較して

$$s = \frac{k}{3}, \quad t = \frac{k}{2}$$

k を消去して，求める関係式は

$$\boldsymbol{3s = 2t} \qquad (答)$$

(3) 線分 AB の中点を M とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \quad \cdots (\#)$$

点 P は，線分 AB の垂直 2 等分線上にあるから

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

$(*)$，$(\#)$ を代入して

$$\left\{\left(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0$$

$$\left\{(2s-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (2t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = 0$$

$$-(2s-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 + (2t-1)\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 + \{(2s-1)-(2t-1)\}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

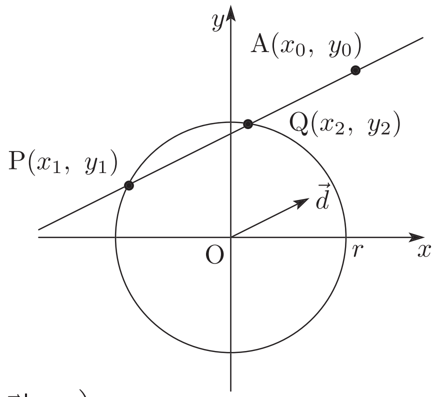
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{5}{6} = 5$ より

$$-(2s-1) \cdot 3^2 + (2t-1) \cdot 2^2 + 2(s-t) \cdot 5 = 0$$

$$\therefore \quad -8s - 2t + 5 = 0$$

ゆえに求める関係式は　$\boldsymbol{8s + 2t = 5}$　(答)

【9】 A$(x_0,\ y_0)$，P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$ とし，
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に平行な単位ベクトルを $\vec{d}$ とする．
すなわち



$$\vec{d}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\quad a^2+b^2=1$$

とおく．このとき実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\vec{d}$$

と表されるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|s\vec{d}\right|\cdot\left|t\vec{d}\right|=|st|\quad\left(\because\ \ \left|\vec{d}\right|=1\right)$$

となる．ところで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{d}$$

であり，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=r$ であるから，上式の両辺それ自身との内積をとって

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\vec{d}\right|^2\\ r^2&=\left|\begin{pmatrix}x_0+sa\\y_0+sb\end{pmatrix}\right|^2\\ &=(x_0+sa)^2+(y_0+sb)^2\\ &=x_0^2+2sax_0+s^2a^2+y_0^2+2sby_0+s^2b^2\end{aligned}$$

$a^2+b^2=1$ に注意して，s に関して整理すると

$$s^2+2(ax_0+by_0)s+x_0^2+y_0^2-r^2=0\quad\cdots①$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{d}$$

であるから，上と同様の計算により

$$t^2+2(ax_0+by_0)t+x_0^2+y_0^2-r^2=0\quad\cdots②$$

①，② は，s，t が x の 2 次方程式

$$x^2+2(ax_0+by_0)x+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

の 2 解であることを示す．ゆえに解と係数の関係より

$$\begin{aligned}st&=x_0^2+y_0^2-r^2\\ |st|&=\left|x_0^2+y_0^2-r^2\right|\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=x_0^2+y_0^2$ であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\left|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2-r^2\right|$$ 〔証明終〕

問題

【1】

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = -\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \boldsymbol{-\vec{a}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{c}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} + \overrightarrow{\mathrm{EH}} = \boldsymbol{\vec{b} + \vec{c}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \overrightarrow{\mathrm{GC}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\right) = \boldsymbol{\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{GN}} - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = -\overrightarrow{\mathrm{NG}} - \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \boldsymbol{-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}} \qquad (答)$$

【2】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-0 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2} = \boldsymbol{\sqrt{19}} \qquad (答)$$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-0 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-3 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{22}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$$

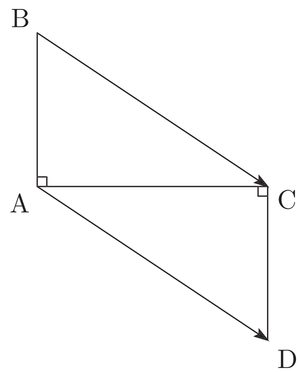
よって

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$

であるから

$$\boldsymbol{\angle \mathrm{BAC} = \frac{\pi}{2}} \text{ の直角三角形} \qquad (答)$$

(3) 右図より



$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

原点を O とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{D}\boldsymbol{(6,\ 0,\ -6)} \qquad (答)$$

(4) 求める点を E とし，その座標を $(3,\ y,\ z)$ とすると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2 = 1 + y^2 + (z+1)^2 \qquad \cdots\cdots①$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 = 4 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \qquad \cdots\cdots②$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2 = 4 + (y-3)^2 + (z+3)^2 \qquad \cdots\cdots③$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right|^2 \qquad \cdots\cdots(*)$$

であるから，$(*)$ に ②，③ を代入して

$$\begin{aligned}(z-2)^2 &= (z+3)^2 \\ 10z &= -5 \\ \therefore \quad z &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

これを ①，② に代入して，再び $(*)$ とから

$$\begin{aligned}1 + y^2 + \frac{1}{4} &= 4 + (y-3)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 2\right)^2 \\ 6y &= 18 \\ \therefore \quad y &= 3\end{aligned}$$

したがって，求める点の座標は

$$\boldsymbol{\left(3,\ 3,\ -\frac{1}{2}\right)} \qquad (答)$$

(5) (2) より，$\angle\mathrm{BAC} = 90^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot \sqrt{22} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{418}}{2}} \qquad (答)\end{aligned}$$

【3】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \boldsymbol{\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \mathbf{3} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

よって

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq \pi$ より

$$\angle\mathrm{BAC} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| \sin\angle\mathrm{BAC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(4) 求めるベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=-x+z=0 \quad \cdots\cdots ①$$

また $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{n}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=-x+2y+2z=0 \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{n}$ は単位ベクトルであるから

$$\left|\vec{n}\right|^2=x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots\cdots ③$$

① より

$$z=x \quad \cdots\cdots ④$$

④ を ② に代入して

$$y=-\frac{1}{2}x \quad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ を ③ に代入して

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{4}x^2+x^2&=1 \\ x^2&=\frac{4}{9} \\ \therefore \quad x&=\pm\frac{2}{3} \end{aligned}$$

それぞれ ④，⑤ に代入して

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}\text{のとき} \quad y=-\dfrac{1}{3},\ z=\dfrac{2}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3}\text{のとき} \quad y=\dfrac{1}{3},\ z=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

よって，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

■別解

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$に垂直なベクトルの一つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおく．条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0 \quad \cdots ① \quad かつ \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{n}=0 \quad \cdots ②$$

① より

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=-x+z=0 \quad \cdots ①'$$

また ② より

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=-x+2y+2z=0 \quad \cdots ②'$$

ここで $x=2$ とおくと，

①′より　$z=2$

②′より　$y=\dfrac{1}{2}(2-4)=-1$

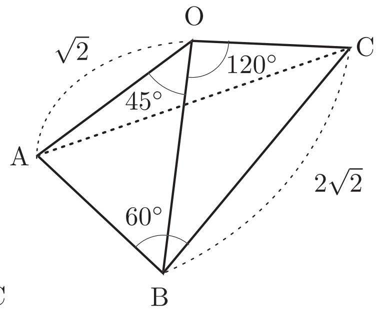
ゆえに

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

ここで $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$ より，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\boldsymbol{\vec{n}}}{|\boldsymbol{\vec{n}}|}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix} \qquad (答)$$

【4】(1)



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$2 = \sqrt{2}\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{4}$$
$$\therefore\quad |\vec{b}| = \mathbf{2} \qquad (答)$$

(2) $\triangle$OBC に余弦定理を用いると

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle\mathrm{BOC}$$
$$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + |\vec{c}|^2 - 2\cdot 2\cdot|\vec{c}|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore\quad |\vec{c}|^2 + 2|\vec{c}| - 4 = 0$$

$|\vec{c}| > 0$ に注意してこれを解いて

$$|\vec{c}| = \boldsymbol{\sqrt{5} - 1} \qquad (答)$$

(3) $\triangle$OAB に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}\\ &= (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

また $\triangle$ABC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 - 2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\angle\mathrm{ABC}\\ &= 2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= 6\end{aligned}$$

$\triangle$OAC に余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{AOC} &= \frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - \mathrm{AC}^2}{2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5}-1)^2 - 6}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{5}-1)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\angle\mathrm{AOC} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi} \qquad (答)$$

【5】(1) G は △OAB の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}}{\mathbf{3}} \qquad (答)$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \\ &= \vec{c} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \left|\vec{b}\right|^2 + 3\vec{b}\cdot\vec{c}\right) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

ここで OA = OB = OC であるから

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right|$$

また △OAB は正三角形より，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \frac{\pi}{3}$ だから

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2$$

これらを (∗) に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GC}} &= \frac{1}{9}\left(-\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{3}{2}\left|\vec{a}\right|^2\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{OG}\perp\mathrm{GC}$$ 〔証明終〕

【6】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 0-5 \\ 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

以上より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 \\ &= \mathbf{7} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{BCD} &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{35 \cdot 21 - 7^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{7\sqrt{14}}{2}} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ 5-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ &= \mathbf{0} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 \\ &= \mathbf{0} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \triangle\mathrm{BCD}$ であるから，四面体 ABCD の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{BCD} \cdot \mathrm{BA} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{7\sqrt{14}}{2} \cdot \sqrt{14} \\ &= \boldsymbol{\frac{49}{3}} \quad \textbf{(答)} \end{aligned}$$

【7】■方針

△ABC の外心を P とすると，

$$\mathrm{AP} = \mathrm{BP} = \mathrm{CP}$$

であることを利用する．

■解答

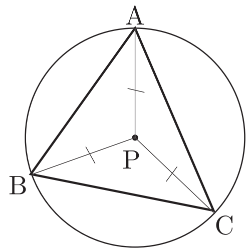
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| &= \sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{14} \\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| &= \sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{14} \quad \cdots(*) \\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (-2)\cdot 1 + 3\cdot(-3) + 1\cdot(-2) = -13 \end{aligned}$$

△ABC の外心を P とおくと，P は平面 ABC 上にあるから実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$



と表される．ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ \overrightarrow{\mathrm{CP}} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{aligned}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|$$

に代入すると

$$\begin{aligned} &\left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|(s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 \\ \therefore\ \ & s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (s-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + t^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2(s-1)t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= s^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + (t-1)^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 + 2s(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} \end{aligned}$$

ここに $(*)$ を用いると

$$14s^2 + 14t^2 - 26st = 14(s-1)^2 + 14t^2 - 26(s-1)t = 14s^2 + 14(t-1)^2 - 26s(t-1)$$

ここで，$14s^2 + 14t^2 - 26st = 14(s-1)^2 + 14t^2 - 26(s-1)t$ より

$$\begin{aligned} &7s^2 + 7t^2 - 13st = 7s^2 - 14s + 7 + 7t^2 - 13st + 13t \\ &\therefore\quad 14s - 13t = 7 \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

また，$14(s-1)^2+14t^2-26(s-1)t=14s^2+14(t-1)^2-26s(t-1)$ より

$$7s^2-14s+7+7t^2-13st+13t=7s^2+7t^2-14t+7-13st+13s$$
$$27s=27t$$
$$\therefore \quad s=t \quad \cdots\cdots②$$

①，② より

$$s=t=7$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+7\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}-2+1\\3-3\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}$$

これより

P$\boldsymbol{(-3,\ -1,\ -5)}$　　(答)

■別解

△ABC の外心を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2,\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2$$

であることを利用する．

△ABC の外心を P とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}2-4\\2+1\\3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}5-4\\-4+1\\0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

より，

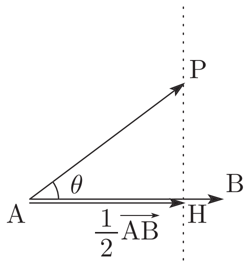
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{14}$$

また，外心 P は平面 ABC 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\quad (s,\ t \text{ は実数})\quad\cdots ①$$

とおける．P から AB に下ろした垂線の足を H とすると，下の図より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\quad\left(\because\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|\cos\theta\right)\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=7\quad\cdots ②\\&\qquad\qquad\left(\because\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)\end{aligned}$$



同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=7\quad\cdots ③$$

であるから，①，②，③ より

$$\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}=14s-13t=7\quad\cdots ④$$

$$\begin{pmatrix}-2s+t\\3s-3t\\s-2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}=-13s+14t=7\quad\cdots ⑤$$

④ − ⑤ より

$$s=t$$

④ に代入して

$$s=7\quad\therefore\quad t=7$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}-7\\0\\-7\end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\0\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

$\mathrm{P}(\boldsymbol{-3},\ \boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{-5})$ **(答)**

<u>コメント</u>.

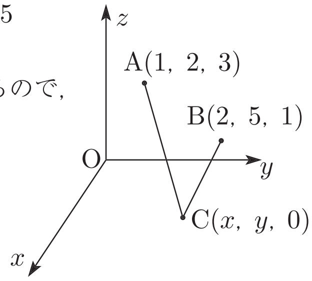
AB = AC であるから，△ABC の外心は，角 A の二等分線（つまり辺 BC の垂直二等分線）上にある．ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

とおける．これを用いるともう少しだけ計算が楽になる．

【8】(1) C の座標を $\mathrm{C}(x,\ y,\ 0)$ とおく．$\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2$ の値を最小にする $(x,\ y)$ の値の組を求める．

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2&=\{(x-1)^2+(y-2)^2+(-3)^2\}+\{(2-x)^2+(5-y)^2+1^2\}\\&=2x^2-6x+2y^2-14y+44\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+15\end{aligned}$$



よって，$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ のとき，最小値 15 をとるので，

$\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{7}{2}},\ \mathbf{0}\right)$ **のとき，最小値 15 (答)**

(2) xy 平面に関して A と対称な点を A′ とすると

$\mathrm{A}'(1,\ 2,\ -3)$

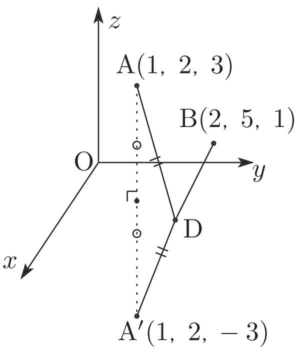
である．また xy 平面上にとった点 D に対し

$$\mathrm{AD}+\mathrm{DB}=\mathrm{A'D}+\mathrm{DB}\geqq\mathrm{A'B}$$

(等号は D が A′B 上にあるとき成立)

ゆえに求める最小値は

$$\begin{aligned}\mathrm{A'B}&=\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2+\{1-(-3)\}^2}\\&=\boldsymbol{\sqrt{26}}\quad\textbf{(答)}\end{aligned}$$



M2TK
高２難関大数学Ｋ

Z-KAI

会員番号	

氏　名	