M3MA

本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学Ｍ

１１章ー１　ベクトル（１）

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ より

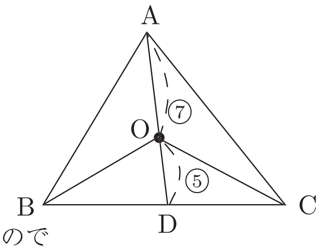
$$5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0} \qquad \therefore \quad \vec{a}=-\frac{4\vec{b}+3\vec{c}}{5}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-k\vec{a}$ となる点 D に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4k}{5}\vec{b}+\frac{3k}{5}\vec{c}$$

と表せる．一方，点 D は辺 BC 上の点であるから

$$\frac{4k}{5}+\frac{3k}{5}=1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{k=\frac{5}{7}} \qquad (答)$$



(2) (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となるので

$$\mathrm{OA}:\mathrm{OD}=1:\frac{5}{7}=\mathbf{7:5} \qquad (答)$$

また，△ OBC と△ ABC は辺 BC を共有する 3 角形なので

$$\triangle\,\mathbf{OBC}:\triangle\,\mathbf{ABC}=\mathrm{OD}:\mathrm{AD}=\mathbf{5:12} \qquad (答)$$

(3) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$ であるので，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=3:4$$

△ ABC の面積を S とすると，(2) より

$$\triangle\,\mathrm{OBC}=\frac{5}{12}S$$

である．また，BD:CD$=3:4$ より

$$\triangle\,\mathrm{ABD}=\frac{3}{7}S,\ \triangle\,\mathrm{ACD}=\frac{4}{7}S$$

であり，OA:OD$=7:5$ より

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{7}{12}\triangle\,\mathrm{ABD}=\frac{1}{4}S$$

$$\triangle\,\mathrm{OAC}=\frac{7}{12}\triangle\,\mathrm{ACD}=\frac{1}{3}S$$

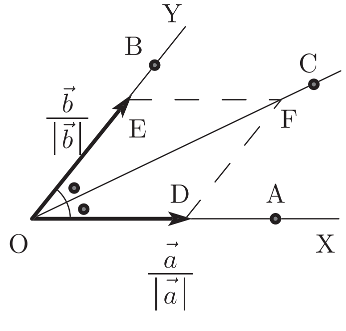
よって

$$\triangle\,\mathrm{OAB}:\triangle\,\mathrm{OBC}:\triangle\,\mathrm{OCA}=\frac{1}{4}S:\frac{5}{12}S:\frac{1}{3}S=\mathbf{3:5:4} \qquad (答)$$

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ をみたす点 D，E をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

をみたす点を F とする．このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は単位ベクトルであり，OD $=$ OE $=1$ なので，4 角形 ODFE はひし形である．



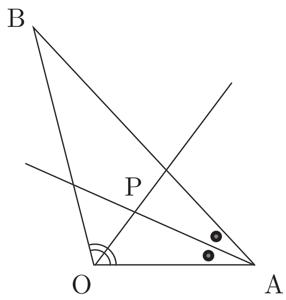
したがって，点 F は ∠XOY の 2 等分線上の点で，この 2 等分線上の点 C は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})$$

$$\therefore\quad \vec{c}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と表される. （証明終）

(2) 点 P は ∠XOY の 2 等分線上の点なので



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$
$$=\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}\ \cdots\cdots\ ①$$

また, 点 P は ∠OAB の 2 等分線上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{s}{4}(\vec{b}-\vec{a})-\frac{s}{2}\vec{a}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1-\frac{3}{4}s\right)\vec{a}+\frac{s}{4}\vec{b}\ \cdots\cdots\ ②$$

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから, ①, ②より

$$\frac{t}{2}=1-\frac{3}{4}s,\ \frac{t}{3}=\frac{s}{4}$$
$$\therefore\quad s=\frac{8}{9},\ t=\frac{2}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{p}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}}$$ (答)

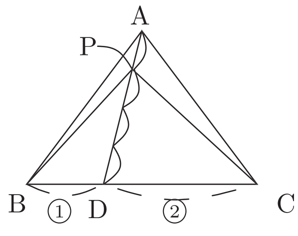
【3】 始点を A に統一すると

$$-9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$$
$$\Longleftrightarrow 12\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

ここで, 線分 BC を 1 : 2 に内分する点を D とすると, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

すなわち点 P は線分 AD を 1 : 3 に内分する点である. よって, △ ABC の面積を S とすると



$$\triangle\,\mathrm{PBC}=\frac{3}{4}S$$
$$\triangle\,\mathrm{PAB}=\frac{1}{4}\triangle\,\mathrm{ABD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}S=\frac{1}{12}S$$
$$\triangle\,\mathrm{PCA}=\frac{1}{4}\triangle\,\mathrm{ACD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}S=\frac{1}{6}S$$

であるから

$$\boldsymbol{\triangle\,\mathrm{PAB}:\triangle\,\mathrm{PBC}:\triangle\,\mathrm{PCA}}=\frac{1}{12}S:\frac{3}{4}S:\frac{1}{6}S=\boldsymbol{1:9:2}$$ (答)

【4】(1) 点 H は線分 CD 上の点なので，$0 \leqq s \leqq 1$ なる s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{1-s}{3}\vec{p} + s\vec{q} \cdots\cdots\cdots ①$$

と表せ，点 H は線分 EF 上の点でもあるから，$0 \leqq t \leqq 1$ なる t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = t\overrightarrow{\mathrm{AE}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{2t}{3}\vec{p} + \frac{1-t}{2}\vec{q} \cdots\cdots\cdots ②$$

と表せる．$\vec{p} \neq \vec{0}$，$\vec{q} \neq \vec{0}$，$\vec{p} \not\parallel \vec{q}$ であるから，①，②より

$$\frac{1-s}{3} = \frac{2t}{3},\ s = \frac{1-t}{2} \qquad \therefore \quad s = t = \frac{1}{3}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = k\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{2k}{9}\vec{p} + \frac{k}{3}\vec{q}$$

と表せ，I は BC 上の点であるから

$$\frac{2k}{9} + \frac{k}{3} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{9}{5}$$

よって，AH:AI$= 5:9$ より，AH:HI$= 5:4$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{8}{45}\vec{p} + \frac{4}{15}\vec{q}$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{HE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{2}{3}\vec{p} - \left(\frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}\right) = \frac{4}{9}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$$

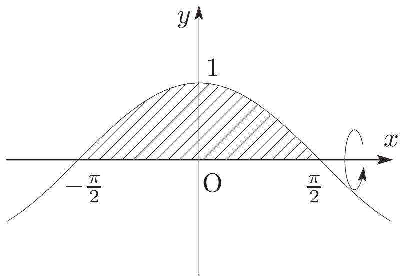
であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} + \overrightarrow{\mathrm{HE}} = \boldsymbol{\frac{28}{45}\vec{p} - \frac{1}{15}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

１１章－２　体積，定積分と不等式

問題

【1】(1) 右図の領域を x 軸の周りに回転させるので，



この体積は

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \cos^2 x dx = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$= \pi \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

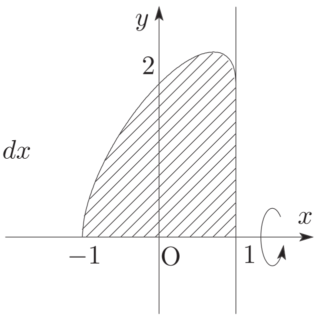
$$= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{2}} \qquad \text{(答)}$$

≪注≫ $y = \cos x$ のグラフが y 軸に関して対称であることや，関数 $\cos^2 x$ が偶関数であることより，求める体積を

$$2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

と立式してもよい．

(2) 右図の領域を x 軸の周りに回転させるので，



この体積は

$$\int_{-1}^{1} \pi \left(x + 1 + \sqrt{1-x^2} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left\{ (x+1)^2 + 2(x+1)\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 \right\} dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} 2 \left\{ x + 1 + (x+1)\sqrt{1-x^2} \right\} dx$$

と表される．ここで，

奇関数 ： $x + x\sqrt{1-x^2}$

偶関数 ：$1 + \sqrt{1-x^2}$

であるから，求める体積は

$$\pi \int_{-1}^{1} 2 \left\{ x + 1 + (x+1)\sqrt{1-x^2} \right\} dx = 4\pi \int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2} \right) dx$$

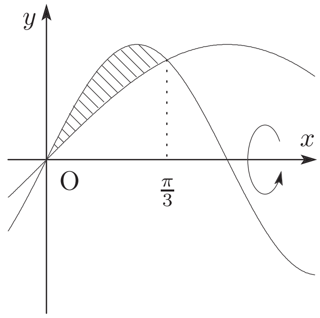
$$= 4\pi \left(1 + \frac{\pi}{4} \right) = \boldsymbol{\pi^2 + 4\pi} \qquad \text{(答)}$$

≪注≫定積分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ の内部で，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分の面積であることから

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

となる．もちろん，$x = \cos\theta$ などと置換してもよい．

(3) 右図の領域を x 軸の周りに回転させるので，この体積は



$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \sin^2 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 2x - \sin^2 x) dx$$

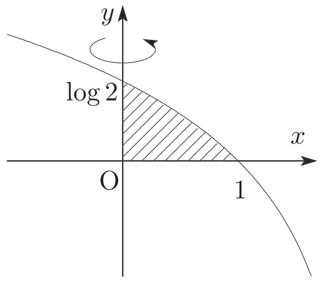
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi} \qquad (答)$$

(4) 右図の領域を y 軸の周りに回転させるので，この体積は $y = \log(2-x) \Longleftrightarrow x = 2 - e^y$ より



$$\int_0^{\log 2} \pi (2-e^y)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{\log 2} (4 - 4e^y + e^{2y}) dy$$

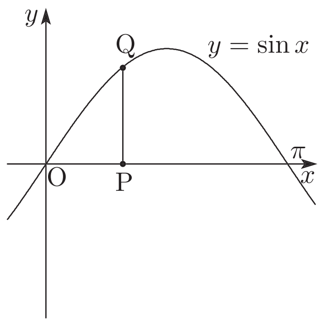
$$= \pi \left[4y - 4e^y + \frac{1}{2} e^{2y} \right]_0^{\log 2}$$

$$= \boldsymbol{\pi \left(4 \log 2 - \frac{5}{2} \right)} \qquad (答)$$

【2】PQ を 1 辺とする正方形の面積は

$\sin^2 x$

であるから，求める立体の体積は



$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad (答)$$

【3】曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と直線 $y=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ の共有点の x 座標を x_1，x_2 $(x_1 \leqq x_2)$ とし，直線 $y=k$ を含み，回転軸（y 軸）に垂直な平面を π_k とすると，領域 D を y 軸の周りに回転してできる立体の平面 π_k による切り口の面積 $S(k)$ は

$$S(k)=\pi {x_2}^2-\pi {x_1}^2$$

と表される．したがって，求める体積は

$$\int_0^1 S(k)dk=\pi\int_0^1 {x_2}^2 dk-\pi\int_0^1 {x_1}^2 dk$$

であり，$k=\sin x$ より

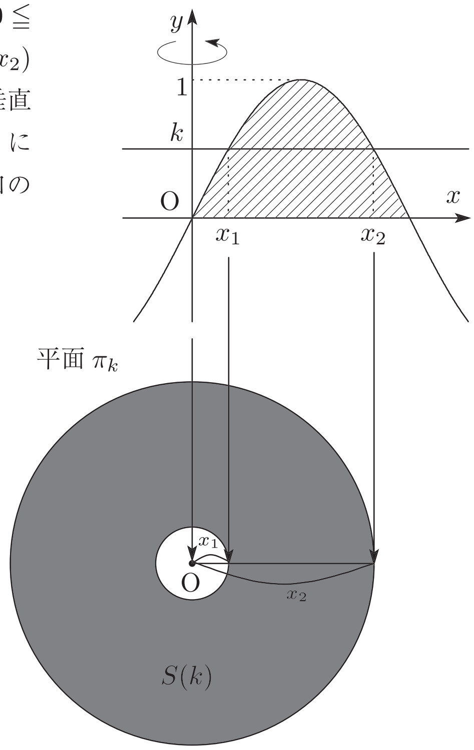
$$\frac{dk}{dx}=\cos x$$

$k:0\to 1$ のとき，$x_2:\pi\to\dfrac{\pi}{2}$

$k:0\to 1$ のとき，$x_1:0\to\dfrac{\pi}{2}$

であるから

$$\begin{aligned}
&\pi\int_0^1 {x_2}^2 dk-\pi\int_0^1 {x_1}^2 dk\\
=&\pi\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx\\
=&\pi\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx+\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} x^2\cos x dx\\
=&\pi\int_{\pi}^{0} x^2\cos x dx\\
=&\pi\Big[x^2\sin x\Big]_{\pi}^{0}-\pi\int_{\pi}^{0}2x\sin x dx\\
=&\pi\Big[x^2\sin x\Big]_{\pi}^{0}-\pi\Big[2x(-\cos x)\Big]_{\pi}^{0}+\pi\int_{\pi}^{0}2(-\cos x)dx\\
=&\pi\Big[x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\Big]_{\pi}^{0}\\
=&\boldsymbol{2\pi^2}\qquad (答)
\end{aligned}$$



【4】(1) $(0<)k \leqq x \leqq k+1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{k}$$

が成り立つ．各辺を k から $k+1$ まで積分して

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

$$\therefore \quad \frac{1}{k+1} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leqq \frac{1}{k} \ \cdots\cdots \ ①$$

が成立する．ここで，①の右側の不等式について，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として辺々を加えると

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad \log(n+1) \leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

また，①の左側の不等式について，$n \geqq 2$ のとき，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ として辺々を加えると

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \leqq \int_1^n \frac{1}{x}dx$$

が成立し，両辺に 1 を加えると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \leqq 1+\log n$$

であり，これは $n=1$ のときも成立する．

以上より，自然数 n に対し

$$\log(n+1) \leqq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \leqq 1+\log n$$

は成立する． （証終）

(2) $(0<)k \leqq x \leqq k+1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqq \frac{1}{x^2} \leqq \frac{1}{k^2}$$

が成り立つ．各辺を k から $k+1$ まで積分して

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{(k+1)^2} \leqq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leqq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} \leqq \frac{1}{k^2} \ \cdots\cdots \ ②$$

ここで，②の左側の不等式について，$n \geqq 2$ のとき，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ として辺々を加えると

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqq \int_1^n \frac{dx}{x^2}$$

が成立し，$\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1-\frac{1}{n}$ であり，上式の両辺に 1 を加えると

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leqq 2-\frac{1}{n}$$

が成り立ち，これは $n=1$ のときも成立する． （証終）

問題

【1】(1) 始点を A に統一すると

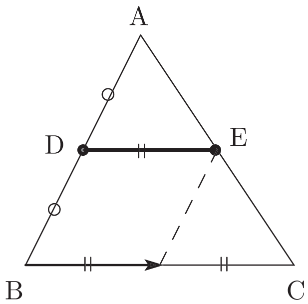
$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+x(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+y(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$$\iff (3+x+y)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より，$x+y+3 \fallingdotseq 0$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+x+y}}$$ (答)

(2) ■**解答 1**



$x+y=3$ より x を消去して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3-y}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

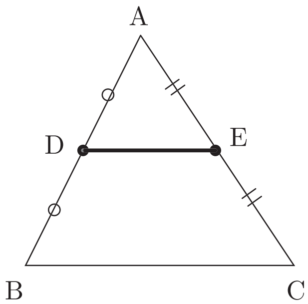
であり，$x+y=3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より

$$3-y \geqq 0,\ y \geqq 0 \iff 0 \leqq \frac{y}{3} \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたす点 D をとると点 P は点 D を通り，$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を方向ベクトルとする直線上にある．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたす点 E をとると，① と中点連結定理より，点 P は線分 AB，AC の中点 D，E に対して線分 DE をえがく．　(答)

■**解答 2**



$x+y=3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において

$\frac{x}{3}=X$，$\frac{y}{3}=Y$ とおくと

$$X+Y=1,\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{6}(3X\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3Y\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{X}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{Y}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたす点 D，E をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=X\overrightarrow{\mathrm{AD}}+Y\overrightarrow{\mathrm{AE}},\ X+Y=1,\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0$$

であるから，点 P は線分 AB，AC の中点 D，E に対して線分 DE をえがく．　(答)

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$，$\mathrm{AB}=4$ より

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=4$$

すなわち

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=16$$

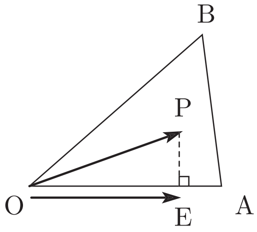
$$\iff (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=16$$

$$\iff \vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}=16$$

$$\iff \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{a}\right|^2 = 16$$

$\left|\vec{a}\right| = \mathrm{OA} = 5,\ \left|\vec{b}\right| = \mathrm{OB} = 6$ より

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}} = \frac{\left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|^2 - 16}{2} = \boldsymbol{\frac{45}{2}} \qquad \text{(答)}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = k\vec{a}$ より

$$k = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|^2}\left\{\left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}\right\} = \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\left|\vec{a}\right|^2 + \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\cdot 25 + \frac{1}{3}\cdot\frac{45}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{7}{10}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{7}{10}\vec{a} - \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{3}{10}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PE}}\right|^2 = \frac{3^2}{10^2}\left|\vec{a}\right|^2 - \frac{1}{5}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3^2}\left|\vec{b}\right|^2$$

$$= \frac{3^2}{2^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{45}{2} + 2^2 = \frac{7}{4}$$

よって

$$\mathbf{PE} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 2 点 P，Q は $\mathrm{AQ} : \mathrm{QB} = n : m$，$\mathrm{OP} : \mathrm{OA} = m : (m+2n)$ をみたす点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= \frac{m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} - \frac{m}{m+2n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= \left(\frac{m}{m+n} - \frac{m}{m+2n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{mn}{(m+n)(m+2n)}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boldsymbol{\frac{n}{m+n}}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= -\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \frac{m}{m+2n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

よって，(1) の結果より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

をみたすので，3 点 P，Q，R は一直線上にある． （証終）

(3) $\mathrm{OP} : \mathrm{PA} = m : 2n$，$2\overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{BR}}$ であるから

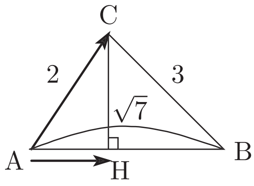
$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{m\overrightarrow{\mathrm{BA}} + 2n\overrightarrow{\mathrm{BO}}}{m+2n} = \boldsymbol{\frac{m\overrightarrow{\mathrm{BA}} + n\overrightarrow{\mathrm{BR}}}{m+2n}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 3,\ \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \sqrt{7}$ であるから

$$3^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2^2 = 7$$

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 3$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ への正射影ベクトルであるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$= \left\{\frac{-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})}{7}\right\}(\vec{b}-\vec{a})$$

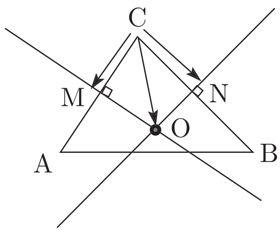
$$= \frac{-3+4}{7}(\vec{b}-\vec{a}) = \frac{1}{7}(\vec{b}-\vec{a})$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{1}{7}(\vec{b}-\vec{a}) + \vec{a}$$

$$= \boldsymbol{\frac{6}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

(2) ■**解答 1**



$\overrightarrow{\mathrm{CO}} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表せる．辺 CA，CB の中点を M，N とすると，外心 O は各辺の垂直 2 等分線の交点なので，$\overrightarrow{\mathrm{CO}}$の$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$への正射影ベクトルが$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$の$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$への正射影ベクトルが$\overrightarrow{\mathrm{CN}}$である．よって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2} = \frac{1}{2},\ \frac{\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad (s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a} = \frac{\left|\vec{a}\right|^2}{2},\ (s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b} = \frac{\left|\vec{b}\right|^2}{2}$$

$\therefore\quad 4s + 3t = 2,\ 2s + 6t = 3$ すなわち $s = \dfrac{1}{6},\ t = \dfrac{4}{9}$

ここで，点 Q は直線 CO 上の点であるから，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = k\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right) = \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{4k}{9}\vec{b}$$

と表せる．また，点 Q は直線 AB 上の点であるから

$$\frac{k}{6} + \frac{4k}{9} = 1 \qquad \therefore\quad k = \frac{18}{11}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \boldsymbol{\frac{3}{11}\vec{a} + \frac{8}{11}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

■**解答 2**

MO $\perp$ CA より

$$\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0 \iff (\overrightarrow{\mathrm{CO}} - \overrightarrow{\mathrm{CM}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$$

$$\iff \left(s\vec{a} + t\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)\cdot\vec{a} = 0$$

$$\iff s\left|\vec{a}\right|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|^2 = 0$$

$$\iff 4s + 3t = 2$$

また，NO $\perp$ CB より

$$\overrightarrow{\mathrm{NO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0 \iff (\overrightarrow{\mathrm{CO}}-\overrightarrow{\mathrm{CN}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$$
$$\iff \left(s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$$
$$\iff s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{2}\left|\vec{b}\right|^2=0$$
$$\iff 2s+6t=3$$

よって

$$s=\frac{1}{6},\ t=\frac{4}{9}$$

点 Q は直線 CO 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}\right)=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{4k}{9}\vec{b}$$

と表せる．また，点 Q は直線 AB 上の点であるから

$$\frac{k}{6}+\frac{4k}{9}=1 \qquad \therefore\quad k=\frac{18}{11}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\boldsymbol{\frac{3}{11}\vec{a}+\frac{8}{11}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

１２章－２　媒介変数表示（１）

問題

【1】(1) $x(\theta)=\cos^3\theta,\ y(\theta)=\sin^3\theta$ とおき，$(x(\theta), y(\theta))$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の描く曲線を C とする．

$$\begin{cases} x(2\pi-\theta)=\cos^3\theta=x(\theta) \\ y(2\pi-\theta)=-\sin^3\theta=-y(\theta) \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\begin{cases} x(\pi-\theta)=-\cos^3\theta=-x(\theta) \\ y(\pi-\theta)=\sin^3\theta=y(\theta) \end{cases} \quad \cdots\cdots ②$$

①より，C の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分と，$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分は x 軸に関して対称である．さらに，②より C の $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の部分は y 軸に関して対称である．

よって，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $x(\theta)$，$y(\theta)$ の増減を調べると

$$x'(\theta)=-3\cos^2\theta\sin\theta \leqq 0$$

$$y'(\theta)=3\sin^2\theta\cos\theta \geqq 0$$

より，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における関数 $x(\theta)$，$y(\theta)$ の増減は下表のようになる．

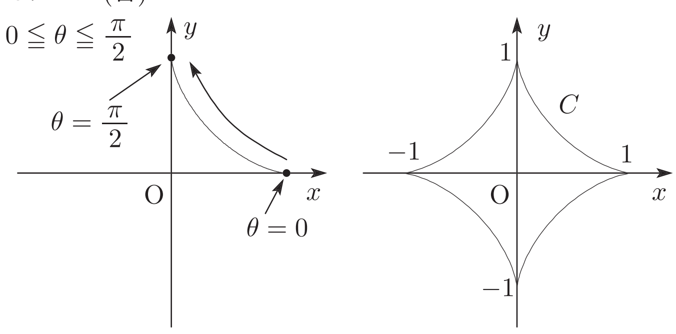
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(\theta)$		$-$	
$x(\theta)$	1	$\searrow$	0
$y'(\theta)$		$+$	
$y(\theta)$	0	$\nearrow$	1

また

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=0$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}=-\infty$$

であるから，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線 C の概形は左下図のようになる．したがって，x 軸，y 軸に関する対称性と合わせると，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における曲線 C の概形は右下図のようになる．　　(答)



(2) $x(t)=e^{-t}\cos t,\ y(t)=e^{-t}\sin t$ とおくと

$$\begin{aligned} x'(t)&=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t \\ &=-\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

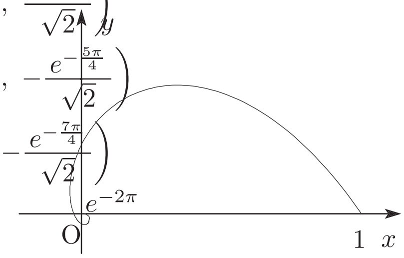
$$y'(t) = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$$
$$= -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，関数 $x(t)$, $y(t)$ の $0 \leqq t \leqq 2\pi$ における増減は下表のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{7\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$x'(t)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$x(t)$		↘	↘	↘	極小	↗	↗	↗	極大	↘	
$y'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$y(t)$		↗	極大	↘	↘	↘	極小	↗	↗	↗	

また

$$(x(0), y(0)) = (1, 0)$$
$$\left(x\left(\frac{\pi}{4}\right), y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\ \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\left(x\left(\frac{3\pi}{4}\right), y\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\ \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\left(x\left(\frac{5\pi}{4}\right), y\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\ -\frac{e^{-\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\left(x\left(\frac{7\pi}{4}\right), y\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{e^{-\frac{7\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\ -\frac{e^{-\frac{7\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$(x(2\pi), y(2\pi)) = \left(e^{-2\pi}, 0\right)$$



であるから，曲線の概形は右図のようになる．

(答)

(3) $x(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$，$y(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ とおくと

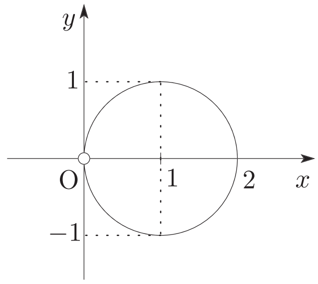
$$x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$
$$y'(t) = 2 \cdot \frac{1+t^2 - t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

よって，t の関数 x, y の増減は下表のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$x'(t)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x(t)$	↗	↗	↗	極大	↘	↘	↘
$y'(t)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$y(t)$	↘	極小	↗	↗	↗	極大	↘

また

$$(x(-1),\ y(-1)) = (1,\ -1),$$
$$(x(0),\ y(0)) = (2,\ 0),$$
$$(x(1),\ y(1)) = (1,\ 1)$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0,\quad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0$$



であるから，曲線の概形は右図のようになる．

ただし，白丸の点 (0, 0) は除く． (答)

（注意）本問は，$x=\dfrac{2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ の分母が一致していることに着目して，この 2 式の商を考えると

$$\frac{y}{x}=t$$

が得られ，これを $x=\dfrac{2}{1+t^2}$ に代入することによって t を消去すると

$$x=\frac{2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \qquad \therefore\quad (x-1)^2+y^2=1$$

のように円の方程式が得られる．

【2】(1) $x=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}=\cos^2\theta$ であるから $y=\cos\theta$ より

$$x=y^2$$

また，$0<\theta<\pi$ であるから

$$-1<\cos\theta=y<1$$

ゆえに，曲線 C は

$$\boldsymbol{y^2=x\ (-1<y<1)}$$

で表される．　　(**答**)

(2) $y^2=x$ を x で微分すると

$$2yy'=1$$

C 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(-1<y_1<1,\ -1<y_2<1)$ における接線を考える．ここで $y_1=0$，$y_2=0$ のとき，$x=0$ が接線となるので，これに垂直に交わる接線は存在しないので，$y_1\fallingdotseq 0$，$y_2\fallingdotseq 0$ のもとで考える．すると，2 点 A，B における接線の方程式は

$$y-y_1=\frac{1}{2y_1}(x-x_1),\quad y-y_2=\frac{1}{2y_2}(x-x_2)$$

$$\therefore\quad y-y_1=\frac{1}{2y_1}(x-{y_1}^2),\quad y-y_2=\frac{1}{2y_2}(x-{y_2}^2)\ \cdots\cdots ①$$

$$(\because\quad x_1={y_1}^2,\ x_2={y_2}^2)$$

であり，この 2 本の接線が直交するので

$$\frac{1}{2y_1}\times\frac{1}{2y_2}=-1 \qquad \therefore\quad y_1y_2=-\frac{1}{4}$$

次に，①の 2 式を辺々引いて

$$y_1-y_2=\left(\frac{1}{2y_2}-\frac{1}{2y_1}\right)x+\frac{1}{2}(y_1-y_2)$$

これを整理して，両辺に $2y_1y_2$ をかけると

$$(y_1-y_2)x=y_1y_2(y_1-y_2)$$

$y_1\fallingdotseq y_2$ なので

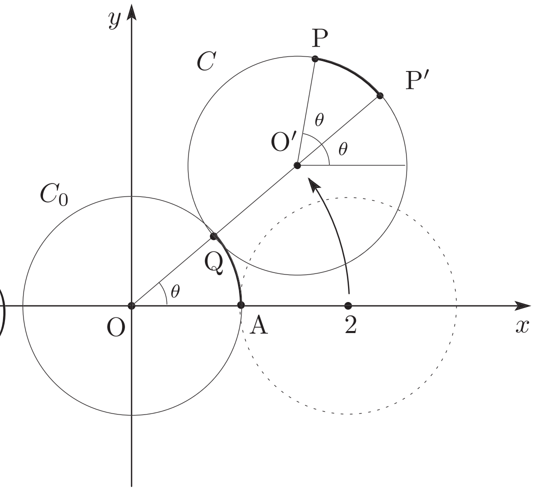
$$x=y_1y_2=-\boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad (\text{答})$$

【3】円 C_0 と動円 C の接点を Q とし，直線 $\mathrm{OO'}$ と円 C の交点のうち，Q 以外の交点を $\mathrm{P'}$ とする．すると，円 C は滑ることなく回転移動するので

$$\text{円弧 AQ} = \text{円弧 P'P} \text{ すなわち } \angle \mathrm{PO'P'} = \angle \mathrm{AOQ} = \theta$$

であり，x 軸正方向から反時計まわりに $\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$ まで測った角が 2θ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P}} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$



したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OO'}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} \\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{O'P}} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos\theta + \cos 2\theta \\ 2\sin\theta + \sin 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{P}(x(\theta),\ y(\theta))$ とおくと

$$x(\theta) = 2\cos\theta + \cos 2\theta$$
$$y(\theta) = 2\sin\theta + \sin 2\theta$$

であり

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= (2\cos\theta + \cos 2\theta)^2 + (2\sin\theta + \sin 2\theta)^2 \\ &= 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta) + 4(\cos\theta\cos 2\theta + \sin\theta\sin 2\theta) \\ &= 4 + 1 + 4\cos(2\theta - \theta) \\ &= 5 + 4\cos\theta\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{OP} = \sqrt{\mathbf{5 + 4\cos\boldsymbol{\theta}}} \qquad \text{(答)}$$

次に，点 P の描く軌跡を C とすると

$$x(2\pi - \theta) = x(\theta),$$
$$y(2\pi - \theta) = -y(\theta)$$

であるから，C の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分と $\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分は x 軸に関して対称となる．そして

$$\begin{aligned}x'(\theta) &= -2\sin\theta - 2\sin 2\theta \\ &= -2\sin\theta - 4\sin\theta\cos\theta \\ &= -2\sin\theta(1 + 2\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'(\theta) &= 2\cos\theta + 2\cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta + 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= 2(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)\end{aligned}$$

より，$0 < \theta < \pi$ における $x(\theta)$, $y(\theta)$ の増減は下表のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$x'(\theta)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x(\theta)$		↘	↘	↘	極小	↗	
$y'(\theta)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$y(\theta)$		↗	極大	↘	↘	↘	

また

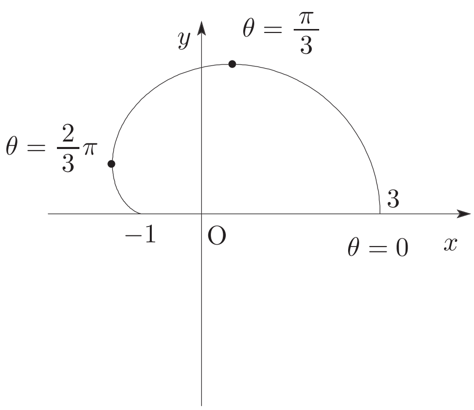
$$(x(0),\ y(0)) = (3,\ 0)$$

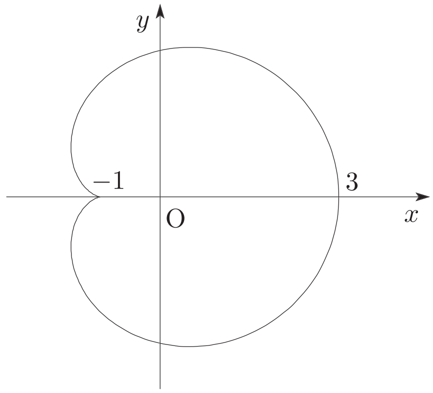
$$\left(x\left(\frac{\pi}{3}\right),\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left(x\left(\frac{2}{3}\pi\right),\ y\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = \left(-\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(x(\pi),\ y(\pi)) = (-1,\ 0)$$

であり，図示すると左下図のようになる．よって，対称性より点 P の軌跡の概形は右下図のようになる．　　(答)





【4】 $\cos(t+2\pi) = \cos t$, $\sin(2t+2\pi) = \sin 2t$ より，曲線 $C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ は $0 \leqq t < 2\pi$ の範囲で考えても一般性は失わない．さらに，曲線 C と直線 $y = kx$ の原点以外の交点について調べるので，曲線 C 上の原点に対応する t の値を求めると

$$\cos t = 0 \text{ かつ } \sin 2t = 0 \qquad \therefore\quad t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

であるから，以下 $0 \leqq t < 2\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$ のもとで考える．

C 上の 2 点 $\mathrm{P}(\cos t_1,\ \sin 2t_1)$，$\mathrm{Q}(\cos t_2,\ \sin 2t_2)$ $(0 \leqq t_1 < 2\pi,\ 0 \leqq t_2 < 2\pi)$ について，2 点 P，Q が一致すると仮定すると

$$\begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \quad \cdots\cdots ① \\ \sin 2t_1 = \sin 2t_2 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり，①より

$$t_1 = t_2,\ \text{または}\ t_2 = 2\pi - t_1$$

であり，$t_1=t_2$ のとき，②は成立する．また，$t_2=2\pi-t_1$ のとき，②より

$$\sin 2t_1=\sin 2(2\pi-t_1)=-\sin 2t_1$$

$$\therefore\quad \sin 2t_1=0 \text{ すなわち } (t_1,\ t_2)=\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right),\ \left(\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

となり，これは原点を表す．よって，C 上の原点以外の点において

$$\mathrm{P}=\mathrm{Q} \text{ ならば } t_1=t_2$$

すなわち

$$t_1\fallingdotseq t_2 \text{ ならば } \mathrm{P}\fallingdotseq\mathrm{Q}$$

であるから，曲線 C と直線 $y=kx$ の交点の個数は，t の方程式

$$\sin 2t=k\cos t\ \left(0\leqq t<2\pi,\ t\fallingdotseq\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore\quad (2\sin t-k)\cos t=0\ \left(0\leqq t<2\pi,\ t\fallingdotseq\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$$

の解の個数と一致し，さらに，$t\fallingdotseq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ より

$$2\sin t-k=0\ \left(0\leqq t<2\pi,\ t\fallingdotseq\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$$

の解の個数と一致する．したがって，求める k の値の範囲は

$\boldsymbol{-2<k<2}$　　(答)

１３章－１　ベクトル（３）

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\therefore\ \ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$$

すなわち

$\mathrm{PQ}\,/\!/\,\mathrm{SR}$ かつ $\mathrm{PQ}=\mathrm{SR}$

であるから，4 角形 PQRS は平行 4 辺形である．（証終）

(2) 4 角形 PQRS は平行 4 辺形であるから，G は線分 PR と線分 QS のそれぞれの中点である．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}}\qquad\text{(答)}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OU}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OU}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$

よって，(2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OV}}$$

となり，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ の 1 次独立性より G と V は一致する．（証終）

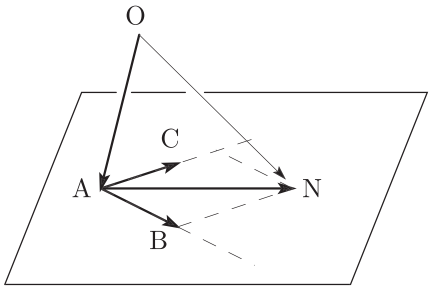
【2】(1) 平面 ABC 上の点 N は，実数 $t,\ u$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せ，始点を O にそろえると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+u(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\therefore\ \ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=(1-t-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



よって

$$s=1-t-u\iff s+t+u=1$$

とおくと

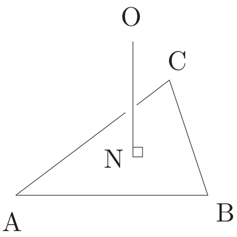
$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の 1 次独立性より，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表すとき

$$s+t+u=1$$

となる．（証終）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|$ は線分 ON の長さを表すので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|$ が最小となるのは



$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp$ 平面 ABC

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

のときである.

よって，$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2 = 1,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = k,\ \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c})\cdot(\vec{b} - \vec{a}) = -s + t + ku = 0 \ \cdots\cdots \ ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c})\cdot(\vec{c} - \vec{a}) = -s + kt + u = 0 \ \cdots\cdots \ ②$$

① − ② より

$$(1-k)(t-u) = 0 \qquad \therefore\quad t = u \ (\because\quad k \neq 1)$$

よって，①および $s + t + u = 1$ に代入して

$$-s + t + kt = 0,\ s + 2t = 1 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{s = \frac{1+k}{3+k},\ t = u = \frac{1}{3+k}} \qquad (答)$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0,\ \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp$ 平面 OBC

なので，4 面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{1-k^2}}{6}} \qquad (答)$$

【3】 (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3} - \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}} \qquad (答)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3} - \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}} \qquad (答)$$

(2) 点 H は DF，EG 上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{DH}} = s\overrightarrow{\mathrm{DF}},\ \overrightarrow{\mathrm{EH}} = t\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ ($s,\ t$ は実数)

と表せ，このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + s\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1-s}{2}\vec{a} + \frac{3+s}{6}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{EG}} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1-t}{2}\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{3+t}{6}\vec{c}$$

よって，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の 1 次独立性より

$$\frac{1-s}{2}=\frac{1-t}{2},\ \frac{3+s}{6}=\frac{t}{3},\ \frac{s}{3}=\frac{3+t}{6}$$

第 1 式より $s=t$ であり，このとき，第 2 式，第 3 式より

$$s=t=3 \qquad \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}+\vec{\boldsymbol{c}} \qquad (答)$$

【4】(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{5}$ より

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=3^2$$

$$\therefore\ \left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=9$$

$$\therefore\ \vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}=\frac{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-9}{2}=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5})^2-9}{2}=\mathbf{-1} \qquad (答)$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{6}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=3$ より

$$\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=(\sqrt{6})^2$$

$$\therefore\ \left|\vec{c}\right|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=6$$

$$\therefore\ \vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}}=\frac{\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2-6}{2}=\frac{(\sqrt{5})^2+3^2-6}{2}=\mathbf{4} \qquad (答)$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|=3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=3$ より

$$\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2=3^2$$

$$\therefore\ \left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=9$$

$$\therefore\ \vec{\boldsymbol{c}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}=\frac{\left|\vec{c}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2-9}{2}=\frac{3^2+(\sqrt{2})^2-9}{2}=\mathbf{1} \qquad (答)$$

(2) 3 角形 ABC は AB = AC = 3 の 2 等辺 3 角形なので，その面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

次に点 O から平面 ABC に降ろした垂線の足を H とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c},\ s+t+u=1\ \cdots\cdots\ ①$$

と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp$ 平面 ABC より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって

$$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$\therefore\ s\vec{a}\cdot\vec{b}-s\left|\vec{a}\right|^2+t\left|\vec{b}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore\ -s-2s+5t+t+4u-u=0$$

$$\therefore\ -s+2t+u=0\ \cdots\cdots\ ②$$

$$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$$

$$\therefore\ s\vec{a}\cdot\vec{c}-s\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\left|\vec{c}\right|^2-u\vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

$$\therefore\ s-2s+4t+t+9u-u=0$$

$$\therefore\ -s+5t+8u=0\ \cdots\cdots\ ③$$

よって，①＋②，①＋③ より

$$\begin{cases} 3t+2u=1 \\ 6t+9u=1 \end{cases}$$

これを解いて

$$u=-\frac{1}{5},\ t=\frac{7}{15}$$

①より $s=\dfrac{11}{15}$ となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{15}(11\vec{a}+7\vec{b}-3\vec{c})$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ の大きさを求める．

$$\begin{aligned} &\left|11\vec{a}+7\vec{b}-3\vec{c}\right|^2 \\ =&11^2\left|\vec{a}\right|^2+7^2\left|\vec{b}\right|^2+3^2\left|\vec{c}\right|^2+2\cdot 11\cdot 7\vec{a}\cdot\vec{b}-2\cdot 7\cdot 3\vec{b}\cdot\vec{c}-2\cdot 3\cdot 11\vec{c}\cdot\vec{a} \\ =&242+245+81-154-168-66=180 \end{aligned}$$

であるから

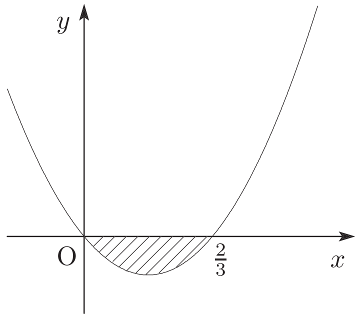
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\frac{\sqrt{180}}{15}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{2}=\mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) $x=\dfrac{t}{3}$ より，t の関数 x は単調増加関数であり，曲線の概形は右図のようになる．したがって，この曲線と x 軸とで囲まれる部分は右図の斜線部分のようになり



$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3},$$

$$x:0\to\frac{2}{3}\text{ のとき } t:0\to 2$$

であるから，求める面積は

$$\int_0^{\frac{2}{3}}(-y)dx=\int_0^2\left(t-\frac{1}{2}t^2\right)\frac{1}{3}dt$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^2$$

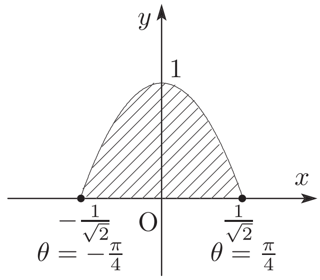
$$=\boldsymbol{\frac{2}{9}}\qquad\text{(答)}$$

≪注≫本問題は媒介変数 t を消去すると，放物線 $y=\dfrac{9}{2}x^2-3x$ が得られるので，これより

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{9}{2}x^2+3x\right)dx=-\frac{9}{2}\int_0^{\frac{2}{3}}x\left(x-\frac{2}{3}\right)dx=\frac{9}{2}\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}-0\right)^3}{6}=\frac{2}{9}$$

と計算してもよい．

(2) $x=\sin t$ より $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において t の関数 x は単調増加関数であり，曲線の概形は右図のようになる．したがって，この曲線と x 軸で囲まれる部分は右図の斜線部分のようになり



$$\frac{dx}{dt}=\cos t,$$

$$x:-\frac{1}{\sqrt{2}}\to\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ のとき } t:-\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{4}$$

であるから，求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}ydx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\cos 3t+\cos t)dt$$

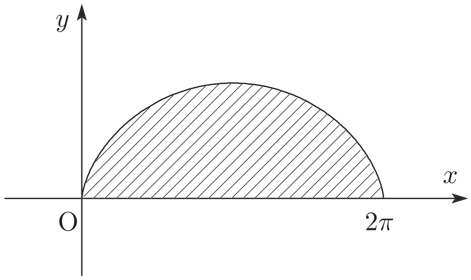
$$=\left[\frac{1}{3}\sin 3t+\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\qquad\text{(答)}$$

(3) $x=t-\sin t$ より

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t \geqq 0$$

なので，t の関数 x は単調増加関数であり，曲線の概形は右図のようになる．したがって，この曲線と x 軸で囲まれる部分は右図の斜線部分のようになり



$x:0 \to 2\pi$ のとき $t:0 \to 2\pi$

であるから，求める面積は

$$\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t-2\cos t)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t-2\cos t\right)dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-2\sin t\right]_0^{2\pi}$$
$$=\boldsymbol{3\pi} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $x=2\cos t,\ y=\sin t$ より

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos t}{2\sin t}$$

であり，$t=\dfrac{\pi}{4}$ のときの x, y および $\dfrac{dy}{dx}$ の値は

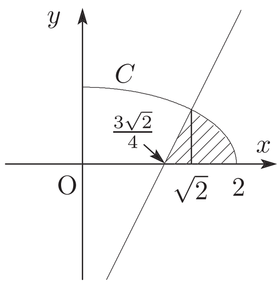
$$x=\sqrt{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$$

となるので，求める法線の方程式は

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=2(x-\sqrt{2})$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y=2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める面積は右図の斜線部分であり，法線と x 軸の交点の x 座標は



$$2x-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

であるから，求める面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+\int_{\sqrt{2}}^{2} y\,dx$$
$$=\frac{1}{8}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sin t(-2\sin t)dt$$
$$=\frac{1}{8}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)dt$$

$$= \frac{1}{8} + \left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8}} \qquad (答)$$

【3】(1) x 軸と曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ との交点を与える t の値は

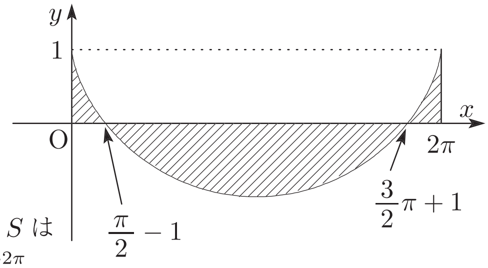
$$\cos t = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

したがって，求める交点の x 座標は

$$x = \boldsymbol{\frac{\pi}{2} - 1,\ \frac{3}{2}\pi + 1} \qquad (答)$$

(2) $x = t - \sin t$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \geqq 0$$



であり，(1) と合わせると，曲線と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 2\pi$ で囲まれる 3 つの部分は右図の斜線部分のようになる．よって求める面積の和 S は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} y dx - \int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{3}{2}\pi+1} y dx + \int_{\frac{3}{2}\pi+1}^{2\pi} y dx$$

と表せ

$$x : 0 \to \frac{\pi}{2} - 1 \to \frac{3}{2}\pi + 1 \to 2\pi \text{ のとき } t : 0 \to \frac{\pi}{2} \to \frac{3}{2}\pi \to 2\pi$$

であるから

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(1 - \cos t)dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos t(1 - \cos t)dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos t(1 - \cos t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t - \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\cos t - \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \left(\cos t - \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \left[\sin t - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin t - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \left[\sin t - \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= \boldsymbol{4} \qquad (答)$$

【4】(1) $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$

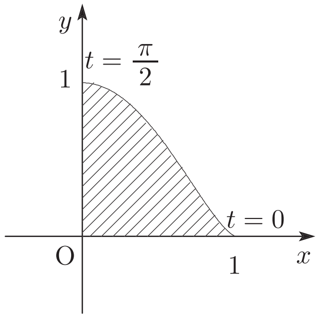
よって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-\sin t}=-3\sin t\cos t=\boldsymbol{-\frac{3}{2}\sin 2t} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，$\dfrac{dx}{dt}\leqq 0$, $\dfrac{dy}{dt}\geqq 0$ より，曲線 C の概形は右図のようになる．また

$x:0\to 1$ のとき $t:\dfrac{\pi}{2}\to 0$

なので，求める面積を S とすると



$$\begin{aligned}
S&=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 t(-\sin t)dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t\right)dt\\
&=\left[\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\boldsymbol{\frac{3}{16}\pi} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) 求める体積を V とおくと

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^1 x^2 dy\\
&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot 3\sin^2 t\cos t\ dt\\
&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cdot 3\sin^2 t\cos t\ dt\\
&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{3\sin^2 t(\sin t)'-3\sin^4 t(\sin t)'\right\}dt\\
&=\pi\left[\sin^3 t-\frac{3}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\boldsymbol{\frac{2}{5}\pi} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

M3MA

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	