M3MB

本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学ⅠＡⅡＢ

難関大文系数学Ｍ

１１章　ベクトル（１）

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ より

$$5\vec{a}+4\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\qquad\therefore\quad \vec{a}=-\frac{4\vec{b}+3\vec{c}}{5}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-k\vec{a}$ となる点 D に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4k}{5}\vec{b}+\frac{3k}{5}\vec{c}$$

と表せる．一方，点 D は辺 BC 上の点であるから

$$\frac{4k}{5}+\frac{3k}{5}=1\qquad\therefore\quad \boldsymbol{k=\frac{5}{7}}\qquad\text{(答)}$$

(2) (1) より

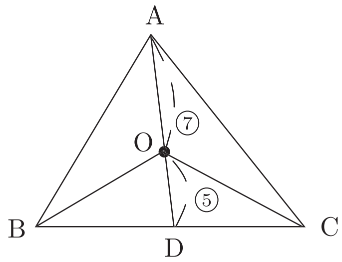
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

となるので

$$\mathrm{OA}:\mathrm{OD}=1:\frac{5}{7}=\mathbf{7:5}\qquad\text{(答)}$$

また，△ OBC と△ ABC は辺 BC を共有する 3 角形なので

$$\triangle\,\mathbf{OBC}:\triangle\,\mathbf{ABC}=\mathrm{OD}:\mathrm{AD}=\mathbf{5:12}\qquad\text{(答)}$$



(3) (1) より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}$ であるので，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=3:4$$

△ ABC の面積を S とすると，(2) より

$$\triangle\,\mathrm{OBC}=\frac{5}{12}S$$

である．また，BD:CD$=3:4$ より

$$\triangle\,\mathrm{ABD}=\frac{3}{7}S,\ \triangle\,\mathrm{ACD}=\frac{4}{7}S$$

であり，OA:OD$=7:5$ より

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{7}{12}\triangle\,\mathrm{ABD}=\frac{1}{4}S$$

$$\triangle\,\mathrm{OAC}=\frac{7}{12}\triangle\,\mathrm{ACD}=\frac{1}{3}S$$

よって

$$\triangle\,\mathrm{OAB}:\triangle\,\mathrm{OBC}:\triangle\,\mathrm{OCA}=\frac{1}{4}S:\frac{5}{12}S:\frac{1}{3}S=\mathbf{3:5:4}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1) 点 H は線分 CD 上の点なので，$0\leqq s\leqq 1$ なる s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1-s}{3}\vec{p}+s\vec{q}\ \cdots\cdots\ ①$$

と表せ，点 H は線分 EF 上の点でもあるから，$0\leqq t\leqq 1$ なる t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AE}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{2t}{3}\vec{p}+\frac{1-t}{2}\vec{q}\ \cdots\cdots\ ②$$

と表せる．$\vec{p}\neq\vec{0},\ \vec{q}\neq\vec{0},\ \vec{p}\not\parallel\vec{q}$ であるから，①，②より

$$\frac{1-s}{3}=\frac{2t}{3},\ s=\frac{1-t}{2}\qquad\therefore\quad s=t=\frac{1}{3}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\boldsymbol{\frac{2}{9}\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{q}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ より，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = k\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{2k}{9}\vec{p} + \frac{k}{3}\vec{q}$$

と表せ，I は BC 上の点であるから

$$\frac{2k}{9} + \frac{k}{3} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{9}{5}$$

よって，AH:AI= 5 : 9 より，AH:HI= 5 : 4 であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{HI}} = \frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{8}{45}\vec{p} + \frac{4}{15}\vec{q}$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{HE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{2}{3}\vec{p} - \left(\frac{2}{9}\vec{p} + \frac{1}{3}\vec{q}\right) = \frac{4}{9}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$$

であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{HI}} + \overrightarrow{\mathrm{HE}} = \frac{28}{45}\vec{p} - \frac{1}{15}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

【3】始点を A に統一すると

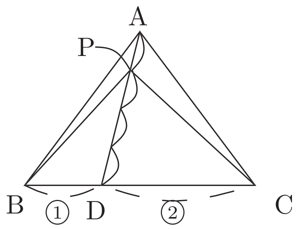
$$-9\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) + \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0} \iff 12\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$$

ここで，線分 BC を 1 : 2 に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

すなわち点 P は線分 AD を 1 : 3 に内分する点である．よって，△ ABC の面積を S とすると



$$\triangle\,\mathrm{PBC} = \frac{3}{4}S$$

$$\triangle\,\mathrm{PAB} = \frac{1}{4}\triangle\,\mathrm{ABD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{1}{12}S$$

$$\triangle\,\mathrm{PCA} = \frac{1}{4}\triangle\,\mathrm{ACD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{1}{6}S$$

であるから

$$\boldsymbol{\triangle\,\mathrm{PAB} : \triangle\,\mathrm{PBC} : \triangle\,\mathrm{PCA}} = \frac{1}{12}S : \frac{3}{4}S : \frac{1}{6}S = \boldsymbol{1 : 9 : 2} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 3 角形の重心は 3 中線の交点であり，重心 G は 3 中線を 2 : 1 に内分するので

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c})} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = s : (1-s)$，$\mathrm{PG} : \mathrm{GQ} = t : (1-t)$ (s，t：実数) とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BP}} + t\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \frac{2}{5}(1-t)\vec{a} + st\vec{c}$$

と表される．よって，$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，(1) より

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5}(1-t) = \dfrac{1}{3} \\ st = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad s = 2, \quad t = \frac{1}{6}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = 2\vec{c}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 始点を A に統一すると

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{(2-k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}\ \cdots\cdots ①$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}-\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

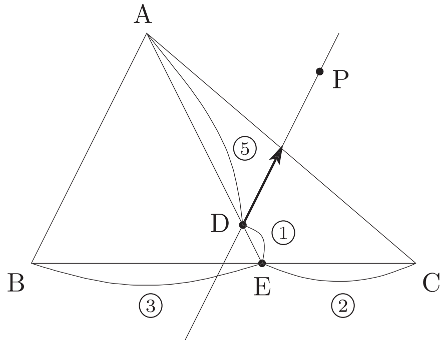
と変形できる．ここで

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$$

となる点 D を考えると，点 D は線分 BC を 3 : 2 に内分する点 E に対して，線分 AE を 5 : 1 に内分する点である．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\frac{k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

より，点 P は点 D を通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線上の点である．したがって，k は任意の実数だから，点 P は**点 D を通り $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルとする直線を描く**．ただし，線分 BC を 3 : 2 に内分する点を E として，点 D は線分 AE を 5 : 1 に内分する点である．　　(答)



≪注≫

点 P の描く直線 l と BC，AC の交点をそれぞれ F，G とおく．

AB // DF および AD : AE = 5 : 1 より

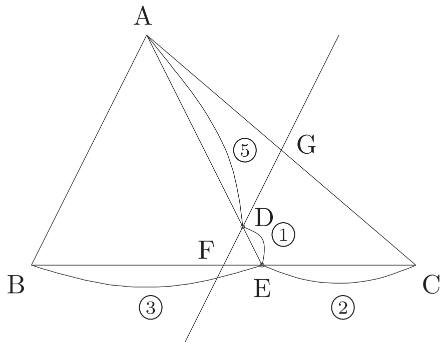
BF : FE = 5 : 1

であり，BE : EC = 3 : 2 と合わせると

BF : FC = 1 : 1

すなわち，点 F は BC の中点である．

よって，点 G も AC の中点であるから，点 P は BC，AC の中点を通る直線を描くことがわかる．



(2) ①より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2-k}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であり，点 P は△ ABC の内部にあるので

$$\frac{2-k}{6}>0,\quad \frac{2-k}{6}+\frac{1}{2}<1 \qquad \therefore\ k<2,\ -1<k$$

よって

$\boldsymbol{-1<k<2}$　　(答)

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a},\ \mathrm{AB}=4$ より

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|=4$$

すなわち

$$\left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2=16$$

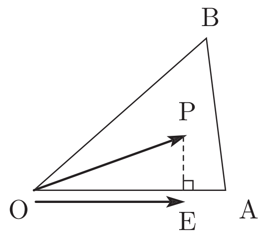
$$\iff (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=16$$

$$\iff \vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}=16$$

$$\iff \left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{a}\right|^2=16$$

$\left|\vec{a}\right|=\mathrm{OA}=5,\ \left|\vec{b}\right|=\mathrm{OB}=6$ より

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}}=\frac{\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2-16}{2}=\boldsymbol{\frac{45}{2}} \qquad \text{(答)}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ への正射影ベクトルであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\vec{a}$ より

$$k=\frac{1}{\left|\vec{a}\right|^2}\left\{\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\vec{a}\right\}=\frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}\cdot 25+\frac{1}{3}\cdot\frac{45}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{7}{10}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{7}{10}\vec{a}-\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{3}{10}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PE}}\right|^2=\frac{3^2}{10^2}\left|\vec{a}\right|^2-\frac{1}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{3^2}\left|\vec{b}\right|^2$$

$$=\frac{3^2}{2^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{45}{2}+2^2=\frac{7}{4}$$

よって

$$\mathbf{PE}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 始点を A に統一すると

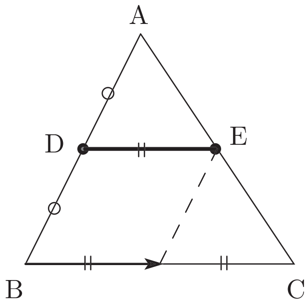
$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+x(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+y(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$$\iff (3+x+y)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より，$x+y+3 \fallingdotseq 0$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\frac{x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3+x+y}} \qquad \text{(答)}$$

(2) **■解答 1**



$x+y=3$ より x を消去して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3-y}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

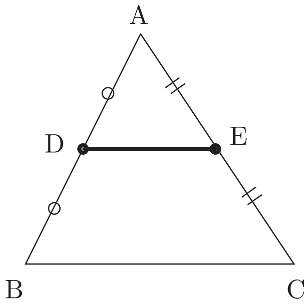
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であり，$x+y=3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ より

$$3-y \geqq 0,\ y \geqq 0 \iff 0 \leqq \frac{y}{3} \leqq 1 \quad \cdots\cdots ①$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{y}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたす点 D をとると点 P は点 D を通り，$\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を方向ベクトルとする直線上にある．さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたす点 E をとると，① と中点連結定理より，点 P は線分 AB，AC の中点 D，E に対して線分 DE をえがく．　　(答)

■解答 2



$x+y=3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において $\frac{x}{3}=X$，$\frac{y}{3}=Y$ とおくと

$$X+Y=1,\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{6}(3X\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3Y\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{X}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{Y}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

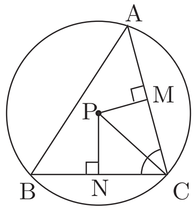
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたす点 D，E をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=X\overrightarrow{\mathrm{AD}}+Y\overrightarrow{\mathrm{AE}},\ X+Y=1,\ X \geqq 0,\ Y \geqq 0$$

であるから，点 P は線分 AB，AC の中点 D，E に対して線分 DE をえがく．　　(答)

【4】 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$ **(答)**

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ $(s,\ t:\text{実数})$



とおく．CA，CB の中点をそれぞれ M，N とすると，
P は外心だから

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\mathrm{CM}\cdot\mathrm{CA}=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\mathrm{CN}\cdot\mathrm{CB}=1\cdot 2=2$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=s\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=9s+3t$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b}=3s+4t$$

であるから

$$9s+3t=\frac{9}{2},\ 3s+4t=2 \qquad \therefore\quad s=\frac{4}{9},\ t=\frac{1}{6}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}}\quad \textbf{(答)}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{18}(8\vec{a}+3\vec{b})$ であり

$$\begin{aligned}\left|8\vec{a}+3\vec{b}\right|^2&=64\left|\vec{a}\right|^2+48\vec{a}\cdot\vec{b}+9\left|\vec{b}\right|^2\\&=576+144+36\\&=756\end{aligned}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=\frac{\sqrt{756}}{18}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{3}}\qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})}$$
である.　　**(答)**

(2) 線分 OE を $s:(1-s)$ に内分する点を P

線分 CF を $(1-t):t$ に内分する点を Q

とすると (ただし，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$)
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{s}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OF}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1-t}{3}\vec{a}+\frac{1-t}{3}\vec{b}+t\vec{c}$$
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるような s，t が存在するための条件は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が一次独立であることより
$$\begin{cases}\dfrac{s}{3}=\dfrac{1-t}{3}\\ \dfrac{s}{3}=t\end{cases}$$
を同時にみたす s，t が存在すればよく，
$$(s,\ t)=\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$
のときみたすので，線分 CF と OE は
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$
をみたす点 R で交わる.　　(証終)

(3)
$$\triangle\mathrm{ADE}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADE}=6:1$$
$\mathrm{OE}:\mathrm{GE}=4:1$ であるから
$$V_1:V_2=6\times4:1\times1=\boldsymbol{24:1}\quad\textbf{(答)}$$

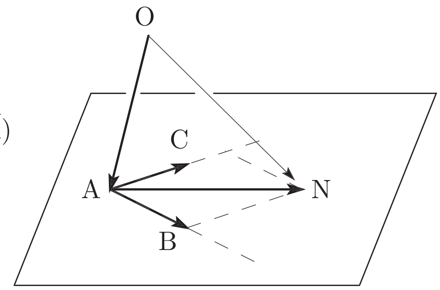
【2】(1) 平面 ABC 上の点 N は，実数 t，u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表せ，始点を O にそろえると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) + u(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = (1-t-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



よって

$$s = 1 - t - u \iff s + t + u = 1$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の 1 次独立性より，$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で表すとき

$$s + t + u = 1$$

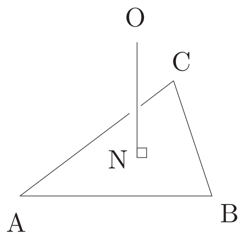
となる．（証終）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|$ は線分 ON の長さを表すので，$\left|\overrightarrow{\mathrm{ON}}\right|$ が最小となるのは

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \text{ 平面 ABC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{ON}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$$



のときである．

よって，$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{c}\right|^2 = 1$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，$\vec{b} \cdot \vec{c} = k$，$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -s + t + ku = 0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = -s + kt + u = 0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

① − ② より

$$(1-k)(t-u) = 0 \qquad \therefore \quad t = u \ (\because \quad k \fallingdotseq 1)$$

よって，①および $s + t + u = 1$ に代入して

$$-s + t + kt = 0,\ s + 2t = 1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{s = \frac{1+k}{3+k},\ t = u = \frac{1}{3+k}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$，$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \text{ 平面 OBC}$$

なので，4 面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \triangle \mathrm{OBC} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{1-k^2}}{6}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}} \qquad \text{(答)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 点 H は DF，EG 上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=s\overrightarrow{\mathrm{DF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=t\overrightarrow{\mathrm{EG}}$ (s，t は実数)

と表せ，このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+s\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1-s}{2}\vec{a}+\frac{3+s}{6}\vec{b}+\frac{s}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{EG}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+t\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}+\frac{3+t}{6}\vec{c}$$

よって，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の 1 次独立性より

$$\frac{1-s}{2}=\frac{1-t}{2},\ \frac{3+s}{6}=\frac{t}{3},\ \frac{s}{3}=\frac{3+t}{6}$$

第 1 式より $s=t$ であり，このとき，第 2 式，第 3 式より

$s=t=3$ $\qquad\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\boldsymbol{=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$ $\qquad$ (答)

【4】(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{KL}}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}}\quad\textbf{(答)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{KM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}}\quad\textbf{(答)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{KN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OK}}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}}\quad\textbf{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{KN}}=s\overrightarrow{\mathrm{KL}}+t\overrightarrow{\mathrm{KM}}$ (s, t：実数) とおくと，(1) の結果より

$$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}=s\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)+t\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$

$$=\left(-\frac{s}{2}+\frac{t}{6}\right)\vec{a}+\frac{s}{5}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立だから

$$\begin{cases}-\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{6}=-\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{s}{5}=\dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ② \\ \dfrac{t}{3}=\dfrac{2}{3} & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

②, ③より

$$s=\frac{5}{3},\ t=2$$

これは①をみたすので

$$\overrightarrow{\mathrm{KN}}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{KL}}+2\overrightarrow{\mathrm{KM}}$$

よって，4 点 K, L, M, N は同一平面上にある．（証終）

M3MB

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大文系数学 M

会員番号		氏　名	