P3J

本科 1 期 7 月度

解答

Z会東大進学教室

東大物理

１１章　電気力線と等電位面：ガウスの法則

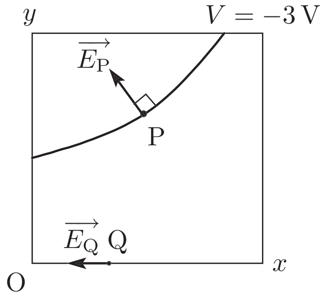
問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 電場は電位の高い方から低い方に向かって生じているので下図のようになる.

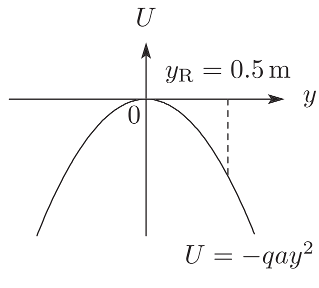


(2) 点 Q の付近と比べて点 P の付近の方が等電位面の間隔が狭いので，電場は点 P の方が大きい ($E_\mathrm{P} > E_\mathrm{Q}$).

(3) 点 Q の付近の x 軸上で $V = 1\,\mathrm{V}$ と $3\,\mathrm{V}$ の等電位面の間隔は $0.22\,\mathrm{m}$ であるから，

$$E_\mathrm{Q} \fallingdotseq \frac{(3-1)\,\mathrm{V}}{0.22\,\mathrm{m}} \fallingdotseq 9\,\mathrm{V/m}$$

(4) y 軸上での電位は $V = -ay^2$ と表せるので，粒子のもつ位置エネルギーは右図のようになり，点 O で最大となる．点 O で速さが 0 になるときのエネルギーの保存より，



$$0 + q\cdot 0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + q\cdot(-a{y_\mathrm{R}}^2) \qquad \therefore \quad v_0 = y_\mathrm{R}\sqrt{\frac{2qa}{m}}$$

$y_\mathrm{R} = 0.5\,\mathrm{m}$，$a = 10\,\mathrm{V/m^2}$ なので，

$$v_0 = 0.5\sqrt{\frac{2q\times 10}{m}} = \sqrt{\frac{5q}{m}}$$

《解説》

x 軸上における電位 $V = 10x^2$ を x で微分することにより，x 軸上に生じる電場の大きさを厳密に求めると，

$$E = \left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right| = 20|x|$$

$$\therefore \quad E_\mathrm{Q} = 20\times 0.42 = 8.4\,\mathrm{V/m}$$

この E_Q の値にかんがみて，(3) の答は 1 桁のみとした.

【2】

《解答》

(ア) $E=\dfrac{kQ}{r^2}$

(イ) 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ なので,

$$N=E\cdot 4\pi r^2=4\pi kQ$$

(ウ) 比例

(エ) よらない

(オ) $N=4\pi kQ_1$

(カ) ガウスの法則より,

$$E\cdot 4\pi r^2=4\pi kQ_1 \qquad \therefore \quad E=\frac{kQ_1}{r^2}$$

(キ) $N=4\pi k(Q_1+Q_2)$

(ク) ガウスの法則より,

$$E\cdot 4\pi r^2=4\pi k(Q_1+Q_2) \qquad \therefore \quad E=\frac{k(Q_1+Q_2)}{r^2}$$

(ケ) $N=4\pi kQ$

(コ) $N=ES$

(サ) ガウスの法則より,

$$ES=4\pi kQ \qquad \therefore \quad E=\frac{4\pi kQ}{S}$$

(シ) $V=Ed$

(ス) (サ), (シ) より,

$$V=\frac{4\pi kQ}{S}\cdot d \qquad \therefore \quad C=\frac{Q}{V}=\frac{S}{4\pi kd}$$

【3】

《解答》

(1) $E(r) = 0$

(2) $N = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

(3) ガウスの法則より，

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = N \qquad \therefore \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(4) $\phi(b) = 0$ より，

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \phi_0 = 0 \qquad \therefore \quad \phi_0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

(5) 導体球は全体が等電位なので，$r < a$ では $\phi(r) = \phi(a)$ となり，

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \phi_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

(6) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

(7) $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a}$

【4】

《解答》

(1) 金属内部の電場 0 ゆえ，上向きを正として，

$$0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{L^2} + \left(E + \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{L^2}\right)$$

$$\therefore \quad q_1 - q_2 = 2\varepsilon_0 L^2 E$$

電荷保存より，

$$q_1 + q_2 = Q_0$$

以上より，

$$q_1 = \frac{1}{2}Q_0 + \varepsilon_0 L^2 E, \qquad q_2 = \frac{1}{2}Q_0 - \varepsilon_0 L^2 E$$

(2) (1) と同様に，A 内の電場 0 と電荷保存より，

$$0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{L^2} + \left(\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{q_2}{L^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_B}{L^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_C}{L^2}\right)$$

これを整理して，

$$q_1 - q_2 = Q_B + Q_C$$

また，電荷保存より，

$$q_1 + q_2 = Q_A$$

以上より，

$$q_1 = \frac{1}{2}(Q_A + Q_B + Q_C), \qquad q_2 = \frac{1}{2}(Q_A - Q_B - Q_C)$$

(3) B→A 向きの電場の大きさを E とすると，

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_B{}'}{L^2} - \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_A{}'}{L^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{Q_C{}'}{L^2}$$

求める電位差は

$$V_B{}' - V_A{}' = Ed = \frac{-Q_A{}' + Q_B{}' + Q_C{}'}{2\varepsilon_0 L^2}d$$

(4) B→C 向きの電場の大きさも E なので，

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_B{}'}{L^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_A{}'}{L^2} - \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_C{}'}{L^2}$$

(3) の E との連立で，

$$Q_A{}' = Q_C{}'$$

また，電荷保存より，

$$Q_A{}' + Q_C{}' = Q_A + Q_C$$

以上より，

$$Q_A{}' = \frac{1}{2}(Q_A + Q_C) \qquad Q_C{}' = \frac{1}{2}(Q_A + Q_C)$$

さらに電荷保存より，

$$Q_B{}' = Q_B$$

(5) AB 間の電場が 0 となるから，

$$0 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_{\mathrm{B}}(1)}{L^2} - \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_{\mathrm{A}}(1)}{L^2} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q_{\mathrm{C}}(1)}{L^2}$$

電荷保存より，

$$Q_{\mathrm{C}}(1) = Q_{\mathrm{C}}{}'$$

整理して，

$$Q_{\mathrm{A}}(1) - Q_{\mathrm{B}}(1) = Q_{\mathrm{C}}(1) = \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{C}})$$

さらに，

$$Q_{\mathrm{A}}(1) + Q_{\mathrm{B}}(1) + Q_{\mathrm{C}}(1) = Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}}$$

より，

$$Q_{\mathrm{A}}(1) + Q_{\mathrm{B}}(1) = \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{C}}) + Q_{\mathrm{B}}$$

以上より，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{A}}(1) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}}) \\ Q_{\mathrm{B}}(1) &= \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B}} \\ Q_{\mathrm{C}}(1) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{C}}) \end{aligned}$$

(6) (5) より，

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{A}}(n) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}}(n-1) + Q_{\mathrm{B}}(n-1) + Q_{\mathrm{C}}(n-1)) \\ Q_{\mathrm{B}}(n) &= \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B}}(n-1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}Q_{\mathrm{B}}(n-2) \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{2^n}Q_{\mathrm{B}} \\ Q_{\mathrm{C}}(n) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}}(n-1) + Q_{\mathrm{C}}(n-1)) \end{aligned}$$

が予想できる．これより，

$$Q_{\mathrm{A}}(n) - Q_{\mathrm{C}}(n) = \frac{1}{2^n}Q_{\mathrm{B}}$$

加えて電荷保存より，

$$Q_{\mathrm{A}}(n) + Q_{\mathrm{C}}(n) = Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}} - \frac{1}{2^n}Q_{\mathrm{B}}$$

これらを連立して，

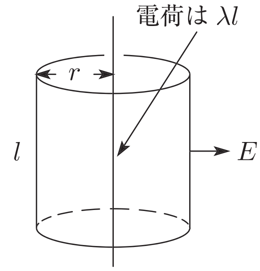
$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{A}}(n) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}}) \\
Q_{\mathrm{C}}(n) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}}) - \frac{1}{2^n}Q_{\mathrm{B}}
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{A}}(\infty) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}}) \\
Q_{\mathrm{B}}(\infty) &= 0 \\
Q_{\mathrm{C}}(\infty) &= \frac{1}{2}(Q_{\mathrm{A}} + Q_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{C}})
\end{aligned}
$$

添削課題

《解答》



(1) ガウスの法則より,

$$E \times 2\pi r \cdot l = 4\pi k \cdot \lambda l \qquad \therefore \quad E = \frac{2k\lambda}{r}$$

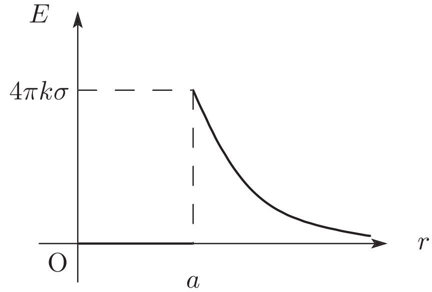
(2) (1) と同様に円筒面について，ガウスの法則を適用する.

$r < a$ のときは,

$$E \times 2\pi r \cdot l = 4\pi k \cdot 0 \qquad \therefore \quad E = 0$$

$r > a$ のときは,

$$E \times 2\pi r \cdot l = 4\pi k \times (\sigma \times 2\pi a \cdot l)$$
$$\therefore \quad E = \frac{4\pi k\sigma a}{r}$$

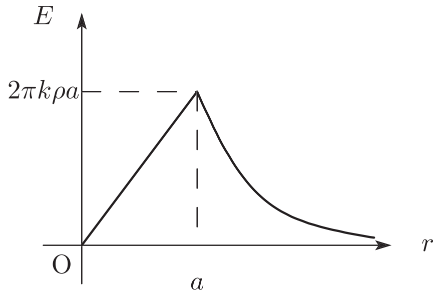


(3) 再び，(1) と同様にガウスの法則を適用する.
$r < a$ のときは,

$$E \times 2\pi r \cdot l = 4\pi k \times (\rho \times \pi r^2 \cdot l)$$
$$\therefore \quad E = 2\pi k\rho r$$

$r > a$ のときは,

$$E \times 2\pi r \cdot l = 4\pi k \times (\rho \times \pi a^2 \cdot l)$$
$$\therefore \quad E = \frac{2\pi k\rho a^2}{r}$$



(4) 静電状態では金属内部の電場が 0 なので，電荷分布 (b) が実現する.

配点

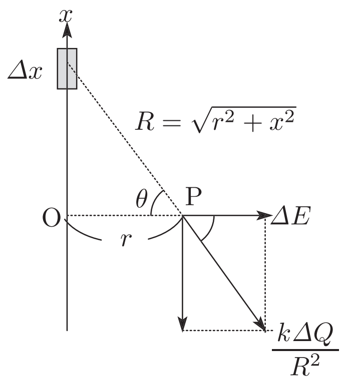
100 点

(1)20 点，(2)30 点，(3)30 点，(4)20 点

《参考》

本問ではガウスの法則を適用して電場を求めたが，これらの電場は「仮想的な点電荷」がつくる電場を合成して求めることもできる．ここでは，(a) の場合について考えてみよう.

x 軸上に電荷が線密度 λ で分布しているとき，右図の点 P に生じる合成電場を求めるには次の手順をふめばよい．



① 微小長さ Δx の部分を点電荷とみなす．
② ①の点電荷が点 P につくる電場を表す．
③ $x=-\infty$ から ∞ にわたって，②の電場を合成 (積分) する．

位置 x の付近の微小長さ Δx の部分の電荷を ΔQ とおくと，$\Delta Q=\lambda\Delta x$ と表せる．この電荷が点 P につくる電場のうち，x 軸に垂直な成分を ΔE とおくと，

$$\Delta E=\frac{k\Delta Q}{R^2}\cdot\frac{r}{R}=\frac{kr\lambda\Delta x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

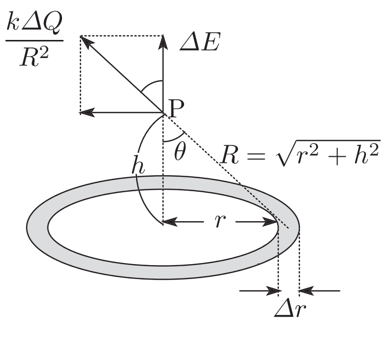
これを合計 (積分) するために，変数変換 $x=r\tan\theta$ を行うと，

$$\begin{cases} r^2+x^2=\dfrac{r^2}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{r}{\cos^2\theta}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}\dfrac{1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\cos^3\theta}{r^3} \\ \mathrm{d}x=\dfrac{r}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

これをふまえて，$x=-\infty$ から ∞ にわたって ΔE を合計 (積分) すると，

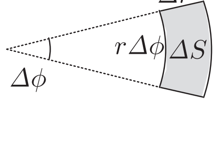
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kr\lambda}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}kr\lambda\cdot\frac{\cos^3\theta}{r^3}\times\frac{r}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\lambda}{r}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\left[\frac{k\lambda}{r}\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{2k\lambda}{r}\qquad\therefore\quad E=\frac{2k\lambda}{r}\end{aligned}$$

こうして，ガウスの法則を適用して求めたのと同じ表式が得られた．また，x 軸に平行な成分について同じように計算すると，ちょうど 0 となることを確認できる．



これと同様の考え方で，無限に広い平面に電荷が一様な面密度 σ で分布している場合の電場を求めることもできる．それには次の手順をふめばよい．

① 微小面積 ΔS の部分を点電荷とみなす．
② ①の点電荷が点 P につくる電場を表す．
③ 平面全体にわたって，②の電場を合計 (積分) する．



幅 Δr の円環のうち，中心角 $\Delta\phi$ の部分の面積は $\Delta S = r\Delta\phi\cdot\Delta r$ なので，この部分の電荷は $\Delta Q = \sigma\cdot r\Delta\phi\Delta r$ と表せる．この電荷が点 P につくる電場のうち，平面に垂直な成分を ΔE とすると，

$$\Delta E = \frac{k\Delta Q}{R^2}\cdot\frac{h}{R} = \frac{kh\sigma r\Delta\phi\Delta r}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

これを合計 (積分) する計算は 2 回に分けて行えばよい．

① $\phi = 0$ から 2π にわたって合計 (積分) する．

② $r = 0$ から ∞ にわたって合計 (積分) する．

まず，$\phi = 0$ から 2π にわたって合計 (積分) すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{kh\sigma r\Delta r}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\phi &= \left[\frac{kh\sigma r\Delta r}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\phi\right]_0^{2\pi}\\ &= \frac{2\pi kh\sigma r\Delta r}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

さらにこれを合計 (積分) するために，変数変換 $r = h\tan\theta$ を行うと，

$$\begin{cases} r^2+h^2 = \dfrac{h^2}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{h}{\cos^2\theta}\end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \dfrac{1}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\cos^3\theta}{h^3} \\ \mathrm{d}r = \dfrac{h}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

これをふまえて，$(*)$ を $r = 0$ から ∞ にわたって合計 (積分) すると，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{2\pi kh\sigma r}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\pi kh\sigma\cdot\frac{\cos^3\theta}{h^3}\times h\tan\theta\right)\times\frac{h}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi k\sigma\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &= \left[-2\pi k\sigma\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2\pi k\sigma \qquad \therefore \quad E = 2\pi k\sigma\end{aligned}$$

なお，$(*)$ を合計 (積分) する計算のすすめ方は，これ以外にもいくつか考えられる．

１２章　誘電体の分極

問題

■演習

【1】

《解答》

(1)　金属板の外部では，Q_1，Q_2 のつくる電場の向きが同じなので，合成電場の大きさは，

$$E = \left| \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right| = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

金属板の内部では，Q_1 と Q_2 のつくる電場の向きが反対なので，合成電場の大きさは，

$$E = \left| \frac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} \right| = 0$$

(2)　図で下向きを正の向きとする．それぞれの金属板内部の電場が 0 なので，

$$\begin{cases} \text{A の内部} \cdots \dfrac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_3}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0 \\ \text{B の内部} \cdots \dfrac{Q_1}{2\varepsilon_0 S} + \dfrac{Q_2}{2\varepsilon_0 S} + \dfrac{Q_3}{2\varepsilon_0 S} - \dfrac{Q_4}{2\varepsilon_0 S} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} Q_1 - Q_4 = 0 \\ Q_2 + Q_3 = 0 \end{cases}$$

さらに，金属板 A の電荷を Q_A，B の電荷を Q_B とすると，

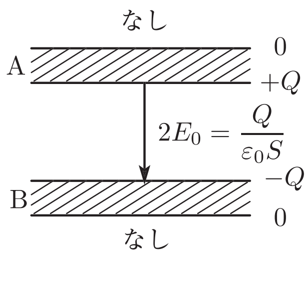
$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q_\mathrm{A} \\ Q_3 + Q_4 = Q_\mathrm{B} \end{cases}$$

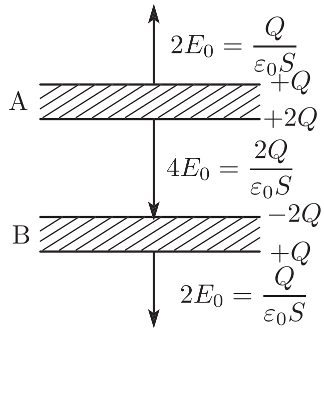
これら 4 つの式より，

$$Q_1 = \frac{Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B}}{2}, \quad Q_2 = \frac{Q_\mathrm{A} - Q_\mathrm{B}}{2}, \quad Q_3 = \frac{Q_\mathrm{B} - Q_\mathrm{A}}{2}, \quad Q_4 = \frac{Q_\mathrm{A} + Q_\mathrm{B}}{2}$$

(a) $Q_\mathrm{A} = Q$，$Q_\mathrm{B} = -Q$ のとき，各面の電荷および各領域の電場は下図左のようになる．

(b) $Q_\mathrm{A} = 3Q$，$Q_\mathrm{B} = -Q$ のとき，各面の電荷および各領域の電場は下図右のようになる．





(3) (a) の状態で，AB 間の電位差は，

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \cdot d \qquad \therefore \quad C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

また，A と B が及ぼし合う引力の大きさは，

$$F = Q \times \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

【2】

《解答》

(1) 上部の極板の，真空部分にたくわえられる電荷を Q_1，誘電体部分にたくわえられる電荷を Q_2 とすると，電位差について，

$$\begin{cases} \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 ax}d = V \\ \dfrac{Q_2}{\varepsilon_r\varepsilon_0 a(b-x)}d = V \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{\varepsilon_0 ax}{d}V \\ Q_2 = \dfrac{\varepsilon_r\varepsilon_0 a(b-x)}{d}V \end{cases}$$

上部の極板の電荷は，

$$Q(x) = Q_1 + Q_2 = \left\{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\frac{x}{b}\right\}\frac{\varepsilon_0 abV}{d}$$

(2) $C(x) = \dfrac{Q(x)}{V} = \left\{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\dfrac{x}{b}\right\}\dfrac{\varepsilon_0 ab}{d}$

(3) $U(x) = \dfrac{1}{2}Q(x)V = \left\{\varepsilon_r - (\varepsilon_r - 1)\dfrac{x}{b}\right\}\dfrac{\varepsilon_0 abV^2}{2d}$

(4) $\Delta U = U(x+\Delta x) - U(x) = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV^2}{2d}\Delta x$

(5) $\Delta Q = Q(x+\Delta x) - Q(x) = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV}{d}\Delta x$

(6) $\Delta W = \Delta Q \cdot V = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV^2}{d}\Delta x$

(7) エネルギーの収支を表す関係式 $\Delta U = \Delta W + f\Delta x$ より，

$$f\Delta x = \Delta U - \Delta W \qquad \therefore \quad f = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aV^2}{2d}$$

(8) $x > 0$ での運動方程式は，

$$m\ddot{x} = -f \qquad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{f}{m}$$

これと初期条件より，

$$x(t) = s - \frac{f}{2m}t^2 \quad \cdots(*)$$

$x = 0$ となるとき，

$$s - \frac{f}{2m}{t_0}^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{2ms}{f}}$$

その後，$x < 0$ での運動方程式は $m\ddot{x} = f$ となり，$x = 0$ を通過してから時間 t_0 かかって $x = -s$ に到達し，いったん停止する．そこからさらに時間 $2t_0$ かかって $x = s$ に戻ってくるので，

$$T_0 = 4t_0 = 4\sqrt{\frac{2ms}{f}}$$

(9) $(*)$ の $x(t)$ を (1) の $Q(x)$ に代入すると，

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left\{\varepsilon_r - \frac{\varepsilon_r - 1}{b}\left(s - \frac{f}{2m}t^2\right)\right\}\frac{\varepsilon_0 abV}{d} \\ &= \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 aVf}{2md}t^2 + (t\ \text{によらない定数}) \end{aligned}$$

【3】

《解答》

(1) 誘電体内部の電場が $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_1 l^2}$ なので,

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_1 l^2} \cdot d \qquad \therefore \quad Q = \frac{\varepsilon_1 l^2}{d} \cdot V$$

電気容量の定義より,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_1 l^2}{d}$$

(2) 誘電体の入っている長さ $l - |x|$ の部分の電荷を Q_1 とすると,誘電体内部の電場は $E_1 = \dfrac{Q_1}{\varepsilon_1 l(l - |x|)}$ なので,

$$V = \frac{Q_1}{\varepsilon_1 l(l-|x|)} \cdot d \qquad \therefore \quad Q_1 = \frac{\varepsilon_1 l(l-|x|)}{d} \cdot V$$

誘電体の入っていない長さ $|x|$ の部分の電荷を Q_2 とすると,空気部分の電場は $E_2 = \dfrac{Q_2}{\varepsilon_2 l|x|}$ なので,

$$V = \frac{Q_2}{\varepsilon_2 l|x|} \cdot d \qquad \therefore \quad Q_2 = \frac{\varepsilon_2 l|x|}{d} \cdot V$$

よって,コンデンサー全体での電荷は,

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{\varepsilon_1 l(l-|x|)}{d} \cdot V + \frac{\varepsilon_2 l|x|}{d} \cdot V \\ &= \frac{\varepsilon_1 l^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) l|x|}{d} \cdot V \end{aligned}$$

電気容量の定義より,

$$C(x) = \frac{Q(x)}{V} = \frac{\varepsilon_1 l^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) l|x|}{d}$$

(3) (a) $x = \varDelta$ のときの電圧を $V(\varDelta)$ として,電荷の保存より,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 l^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) l|\varDelta|}{d} \cdot V(\varDelta) &= \frac{\varepsilon_1 l^2}{d} \cdot V \\ \therefore \quad V(\varDelta) &= \frac{\varepsilon_1 l}{\varepsilon_1 l - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|} V \end{aligned}$$

$x = 0$ のときの静電エネルギーからの変化分が $U(\varDelta)$ なので,

$$\begin{aligned} U(\varDelta) &= \frac{1}{2} Q V(\varDelta) - \frac{1}{2} Q V \\ &= \frac{\varepsilon_1 l^2 V}{2d} \left\{ \frac{\varepsilon_1 l}{\varepsilon_1 l - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|} V - V \right\} \\ &= \frac{\varepsilon_1 l^2 V^2}{2d} \cdot \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|}{\varepsilon_1 l - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|} \qquad \cdots (*) \end{aligned}$$

$|\varDelta|$ が微小のときは，$U(\varDelta) \fallingdotseq \dfrac{\varepsilon_1 l^2 V^2}{2d} \cdot \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|}{\varepsilon_1 l}$ と近似できることを考慮すると，$U(\varDelta)$ を表すグラフは (エ) のようになることがわかる．

(b) 誘電体には $U(\varDelta)$ を減少させる向きすなわち $x = 0$ に引き戻す向きの力が作用するので，$x = 0$ を中心として振幅 $|\varDelta|$ の振動運動をする．

(c) 速さの最大値を v_{max} として，エネルギーの保存より，

$$\frac{1}{2} m {v_{\mathrm{max}}}^2 + U(0) = 0 + U(\varDelta)$$

$(*)$ を代入すると，

$$\frac{1}{2} m {v_{\mathrm{max}}}^2 = \frac{\varepsilon_1 l^2 V^2}{2d} \cdot \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|}{\varepsilon_1 l - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|}$$

$$\therefore \quad v_{\mathrm{max}} = lV \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{md} \cdot \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|}{\varepsilon_1 l - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|\varDelta|}}$$

【4】

《解答》

イ　電気容量 C は,

$$C=\varepsilon\frac{w(\ell-X)}{d}+\varepsilon\frac{wX}{d-c}=\varepsilon w\left(\frac{\ell-X}{d}+\frac{X}{d-c}\right)$$

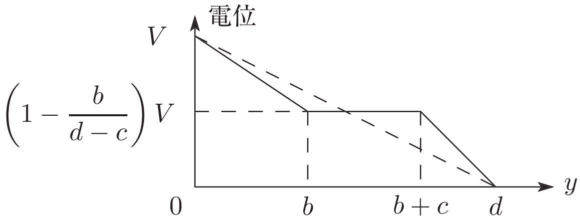
$$\therefore\quad U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{\varepsilon wV^2}{2}\left(\frac{\ell-X}{d}+\frac{X}{d-c}\right)$$

ロ　極板間気体部分の電場は $\dfrac{V}{d-c}$ ゆえ下図．なお，電位を y の関数 $\phi(y)$ と表すと,

$$\phi(0)=V$$

$$\phi(b)=\phi(b+c)=V-\frac{b}{d-c}V=\left(1-\frac{b}{d-c}\right)V$$

$$\phi(d)=0$$



ハ

$$U_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon w(\ell-X)}{d}V^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\times wd(\ell-X)$$

ニ　金属板内の電場 0 ゆえ，$U'=0$

ホ

$$\begin{aligned}\varDelta U&=U(X+\varDelta X)-U(X)\\&=\frac{\varepsilon wV^2}{2}\left\{\frac{\ell-(X+\varDelta X)}{d}+\frac{X+\varDelta X}{d-c}\right\}-\frac{\varepsilon wV^2}{2}\left(\frac{\ell-X}{d}+\frac{X}{d-c}\right)\\&=\frac{\varepsilon wV^2}{2}\left(\frac{1}{d-c}-\frac{1}{d}\right)\varDelta X\end{aligned}$$

ヘ

$$\begin{aligned}\varDelta Q=&\varDelta C\times V\\\therefore\quad \varDelta W&=\varDelta Q\cdot V=\varDelta C\cdot V^2\\&=\varepsilon wV^2\left(\frac{1}{d-c}-\frac{1}{d}\right)\varDelta X\\&=\varDelta U\times 2\end{aligned}$$

ト
$$\varDelta W + \varDelta W' = \varDelta U \qquad \therefore \quad \varDelta W' = -\varDelta U = F \cdot \varDelta X$$

よって，静電気力の大きさは，
$$-F = \varDelta U \div \varDelta X$$

チ　トより $F < 0$．外力 F が $-x$ 向きゆえ静電気力は $+x$ 向き．→①

(1) 大きさは 0

理由：金属板を y 軸方向に移動させても，電気容量，帯電量などは変化せず，また，そのためにエネルギー収支も不変であるから．

リ　ホ，トの結果より，
$$-F = \frac{\varDelta U}{\varDelta X} = \frac{\varepsilon w V^2}{2}\left(\frac{1}{d-c} - \frac{1}{d}\right)$$

数値を代入して，
$$-F \fallingdotseq 2.7 \times 10^{-3}\,\mathrm{N}$$

(2) 静電気力の x 軸，y 軸に平行な成分はともに変化しない．

理由：静電遮蔽により，金属箱内に生じる電場の大きさは 0 である．このため，極板間の電場は金属板を入れた状況と等しいから．

添削課題

《解答》

(1) 極板間の電場を E とすると，

$$V_0 = E \cdot 4d \qquad \therefore \quad E = \frac{V_0}{4d}$$

極板間に存在する電気力線の本数は $\dfrac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q$ なので，

$$E \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot Q \qquad \therefore \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

これらより，

$$Q = \varepsilon_0 SE = \frac{\varepsilon_0 SV_0}{4d}$$

$$U = \frac{1}{2}QV_0 = \frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{8d}$$

(2) 導体内部の電場が 0 となるが，すき間の電場は E に保たれる．A の電圧を V_{A} とすると，

$$V_{\mathrm{A}} = E \cdot 2d = \frac{1}{2}V_0$$

電荷は Q のままなので，

$$C_{\mathrm{A}} = \frac{Q}{V_{\mathrm{A}}} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

$$U_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}QV_{\mathrm{A}} = \frac{\varepsilon_0 S{V_0}^2}{16d}$$

(3) $V-x$ グラフの傾きが電場と一致するので，図 a のようになる．

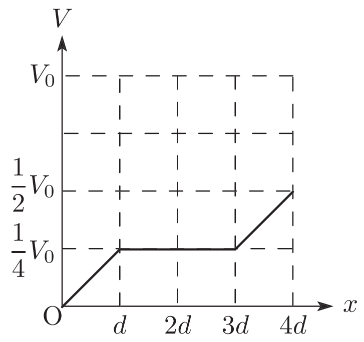


図 a

(4) 誘電体内部の電場が $\dfrac{1}{2}E$ となり，すき間の電場は E に保たれる．B の電圧を V_{B} とすると，

$$V_{\mathrm{B}} = E \cdot 2d + \frac{E}{2} \cdot 2d = \frac{3}{4}V_0$$

電荷は Q のままなので，

$$C_{\mathrm{B}} = \frac{Q}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{\varepsilon_0 S}{3d}$$

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}QV_{\mathrm{B}} = \frac{3\varepsilon_0 S{V_0}^2}{32d}$$

(5) $V-x$ グラフの傾きが電場と一致するので，図 b のようになる．

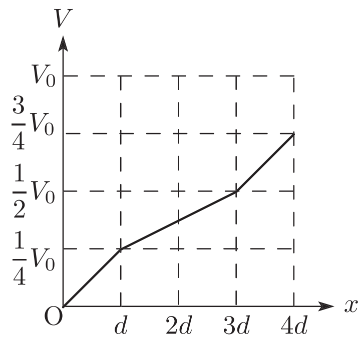


図 b

配点

100 点

(1)〜(5) 各 20 点

１３章　コンデンサー回路

問題

■演習

【１】

《解答》

(1) (1) $N = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

(2) $E_1 = \dfrac{N}{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$

(3) $V_1 = E_1 x = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}x$

(4) $Q - q$

(5) CB 間の電場の大きさは $E_2 = \dfrac{Q-q}{\varepsilon_0 S}$ なので，CB 間の電位差は，

$$V_2 = E_2 \cdot (d-x) = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 S}(d-x)$$

$V_1 = V_2$ より，

$$\frac{q}{\varepsilon_0 S}x = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 S}(d-x) \qquad \therefore \quad q = \left(1 - \frac{x}{d}\right)Q$$

(2) (a) $\varDelta q = -\dfrac{Q}{d}\varDelta x = -\dfrac{Q}{d}v\varDelta t$

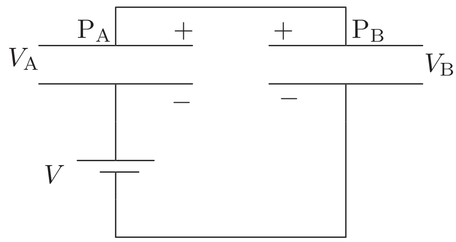
(b) $I = \left|\dfrac{\varDelta q}{\varDelta t}\right| = \dfrac{Qv}{d}$

【2】

《解答》

(1) A の電位差が V となるので，A の電気量は CV.

(2) (a) 電荷の保存より，$+CV$.



(b) $\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ の電荷を正と仮定する．電荷の保存より，

$$+CV_\mathrm{A}+CV_\mathrm{B}=+CV$$

また，電位差について，

$$V+V_\mathrm{A}=V_\mathrm{B}$$

これらより，

$$V_\mathrm{A}=0,\quad V_\mathrm{B}=V$$

(3) (a) 電荷の保存より，

$$+CV+CV_\mathrm{B}=+2CV$$

(b) (2) のときと同様に，$\mathrm{P_A}$ および $\mathrm{P_B}$ の電荷を正と仮定すると，

$$\begin{cases}+CV_\mathrm{A}'+CV_\mathrm{B}'=+2CV\\ V+V_\mathrm{A}'=V_\mathrm{B}'\end{cases}$$

これらより，

$$V_\mathrm{A}'=\frac{1}{2}V,\quad V_\mathrm{B}'=\frac{3}{2}V$$

(4) n 回操作後の $\mathrm{P_A}$，$\mathrm{P_B}$ の電荷を正と仮定し，A，B の電位差を $V_\mathrm{A}(n)$，$V_\mathrm{B}(n)$ とおくと，

$$\begin{cases}+CV_\mathrm{A}(n)+CV_\mathrm{B}(n)=+CV+CV_\mathrm{B}(n-1)\\ V+V_\mathrm{A}(n)=V_\mathrm{B}(n)\end{cases}$$

$n\to\infty$ とした収束状態では，

$$\begin{cases}+CV_\mathrm{A}(\infty)+CV_\mathrm{B}(\infty)=+CV+CV_\mathrm{B}(\infty)\\ V+V_\mathrm{A}(\infty)=V_\mathrm{B}(\infty)\end{cases}$$

これらより，

$$V_\mathrm{A}(\infty)=V,\quad V_\mathrm{B}(\infty)=2V$$

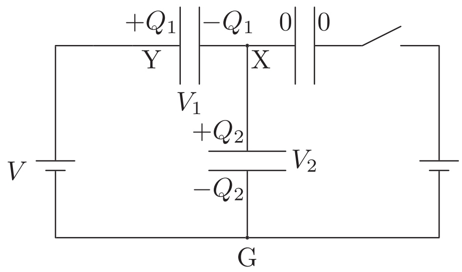
電池を用いて電位差 V に充電した A ともとの電池を組み合わせて構成した「電位差 $2V$ の電源」を用いて B を充電できたため，コンデンサー B の極板間の電位差は $2V$ に収束した．

【3】

《解答》

以下において，コンデンサ C_i の電荷を Q_i，電位差を V_i とする．

(1) 電位差について，



$$V_1 + V_2 = V$$

点 X につながる極板の電荷について，

$$(-Q_1) + Q_2 = 0$$
$$\therefore \quad -CV_1 + CV_2 = 0$$

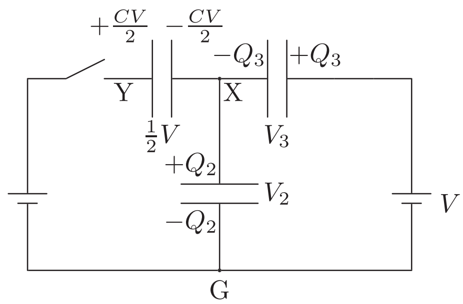
これらより，

$$V_1 = \frac{1}{2}V, \qquad V_2 = \frac{1}{2}V$$

(a) $V_\mathrm{X} = 0 + V_2 = \dfrac{1}{2} \times V$

(b) $Q_2 = CV_2 = \dfrac{1}{2} \times CV$

(2) 電位差について，



$$V_3 + V_2 = V$$

点 X につながる極板の電荷について，

$$\left(-C \cdot \frac{V}{2}\right) + Q_2 + (-Q_3) = 0$$
$$\therefore \quad CV_2 - CV_3 = \frac{CV}{2}$$

これらより，

$$V_2 = \frac{3}{4}V, \qquad V_3 = \frac{1}{4}V$$

(c) $V_\mathrm{X} = 0 + V_2 = \dfrac{3}{4} \times V$

(d) $Q_2 = CV_2 = \dfrac{3}{4} \times CV$

(e) $V_\mathrm{Y} = 0 + V_2 + \dfrac{1}{2}V = \dfrac{5}{4} \times V$

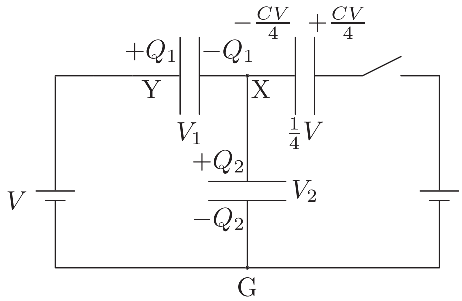
(3) 電位差について，

$$V_1 + V_2 = V$$

点 X につながる極板の電荷について，

$$(-Q_1) + Q_2 + \left(-C \cdot \frac{V}{4}\right) = 0$$

$$\therefore \quad -CV_1 + CV_2 = \frac{CV}{4}$$



これらより，

$$V_1 = \frac{3}{8}V, \qquad V_2 = \frac{5}{8}V$$

(f) $Q_2 = CV_2 = \dfrac{5}{8} \times CV$

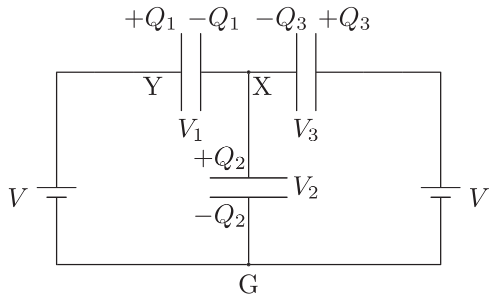
(4) 電位差について，

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V \\ V_3 + V_2 = V \end{cases}$$

点 X につながる極板の電荷について，

$$(-Q_1) + Q_2 + (-Q_3) = 0$$

$$\therefore \quad -CV_1 + CV_2 - CV_3 = 0$$



これらより，

$$V_1 = \frac{1}{3}V, \qquad V_2 = \frac{2}{3}V, \qquad V_3 = \frac{1}{3}V$$

(g) $Q_2 = CV_2 = \dfrac{2}{3} \times CV$

【4】

《解答》

(1) (a) $Q_\mathrm{X} = CV_1$ ゆえ，$W_\mathrm{X} = Q_\mathrm{X} V_1 = C{V_1}^2$

(b) $U_\mathrm{X} = \dfrac{1}{2} Q_\mathrm{X} V_1 = \dfrac{1}{2} C{V_1}^2$

(c) 極板間電場を E_X として，

$$F_\mathrm{X} = \frac{Q_\mathrm{X} \cdot \frac{1}{2} E_\mathrm{X}}{S} = \frac{\varepsilon {V_1}^2}{2d^2}$$

(2) コンデンサー共通電位差は V_Y.

(a) 電荷保存より，

$$CV_\mathrm{Y} + CV_\mathrm{Y} = Q_\mathrm{X} = CV_1 \qquad \therefore \quad V_\mathrm{Y} = \frac{1}{2} V_1 \qquad \therefore \quad E_\mathrm{Y} = \frac{V_\mathrm{Y}}{d} = \frac{V_1}{2d}$$

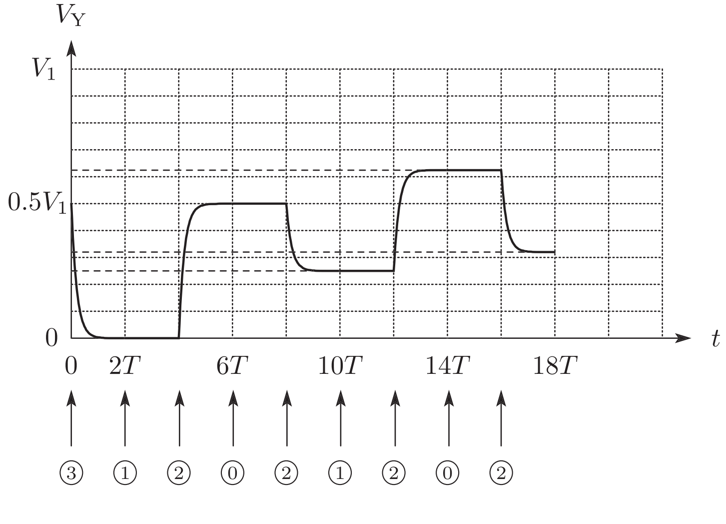
(b)

$$J_\mathrm{Y} = U_\mathrm{X} - \left(\frac{1}{2} C{V_\mathrm{Y}}^2 + \frac{1}{2} C{V_\mathrm{Y}}^2 \right) = \frac{1}{4} C{V_1}^2$$

(c) 最大電流は接続直後ゆえ，

$$RI_\mathrm{Y} - V_1 = 0 \qquad \therefore \quad I_\mathrm{Y} = \frac{V_1}{R}$$

(3) (a) 下図.



(b) ③を行う前は $V_{\mathrm{Y}} = \dfrac{1}{2}V_1$．③で $V_{\mathrm{Y}} = 0$．次に①で $V_{\mathrm{Y}} = 0$ だが②で $V_{\mathrm{Y}} = \dfrac{1}{2}V_1$．次の⓪で V_{Y} 不変．さらに②で電荷保存から

$$CV_{\mathrm{Y}} + CV_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{2}CV_1 \qquad \therefore \quad V_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{4}V_1$$

次に①，②を続けて行うと，電荷保存より，

$$CV_{\mathrm{Y}} + CV_{\mathrm{Y}} = CV_1 + \frac{1}{4}CV_1 \qquad \therefore \quad V_{\mathrm{Y}} = \frac{5}{8}CV_1$$

さらに⓪の後②を行うと，

$$CV_{\mathrm{Y}} + CV_{\mathrm{Y}} = \frac{5}{8}CV_1 \qquad \therefore \quad V_{\mathrm{Y}} = \frac{5}{16}V_1$$

よって，

$$2T : 0 \qquad 6T : \frac{1}{2}V_1 \qquad 10T : \frac{1}{4}V_1 \qquad 14T : \frac{5}{8}V_1 \qquad 18T : \frac{5}{16}V_1$$

P3J

東大物理

Z-KAI

会員番号		氏　名	