本科 1 期 7 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大物理／難関大物理 T

１１章　電場と電位

問題

■演習

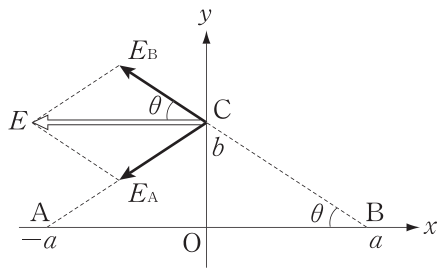
【1】

《解答》

(1) 図のように，点 A，B の電荷が点 C に作る電場ベクトルを $\overrightarrow{E_{\mathrm{A}}}, \overrightarrow{E_{\mathrm{B}}}$，$\left|\overrightarrow{E_{\mathrm{A}}}\right|=E_{\mathrm{A}}$，$\left|\overrightarrow{E_{\mathrm{B}}}\right|=E_{\mathrm{B}}$ とすると

$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{a^2+b^2}$ より

$$E_{\mathrm{A}}=E_{\mathrm{B}}=k\frac{q}{a^2+b^2}$$



したがって

$$\overrightarrow{E_{\mathrm{A}}}=\begin{pmatrix}-E_{\mathrm{A}}\cos\theta\\ -E_{\mathrm{A}}\sin\theta\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{E_{\mathrm{B}}}=\begin{pmatrix}-E_{\mathrm{B}}\cos\theta\\ E_{\mathrm{B}}\sin\theta\end{pmatrix}$$

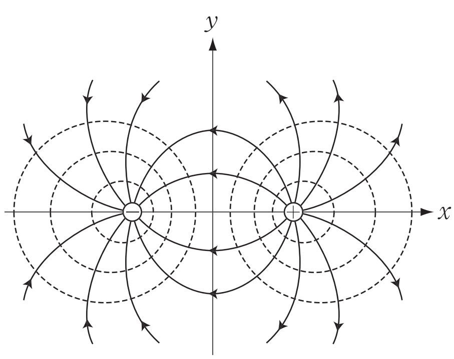
$$\therefore\quad \overrightarrow{E_{\mathrm{A}}}+\overrightarrow{E_{\mathrm{B}}}=\begin{pmatrix}-2E_{\mathrm{A}}\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}$$

また，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より

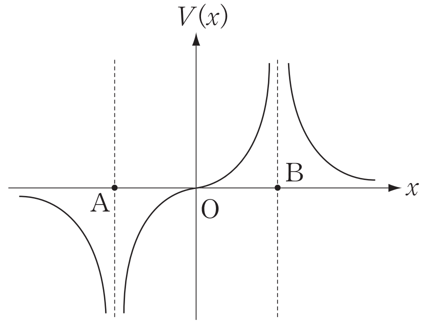
$$E=2E_{\mathrm{A}}\cos\theta=2\times k\frac{q}{a^2+b^2}\times\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\underline{\frac{2kaq}{(a^2+b^2)^{3/2}}},\quad \underline{-x\text{ 向き}}$$

(2) ①　電気力線は正電荷から出て負電荷に入る．

②　両電荷の絶対値が等しいので，正電荷から出る電気力線の本数と負電荷に入る電気力線の本数は等しく，x 軸，y 軸に関して対称．



(3) 点 A の電荷による $(x,\ 0)$ の電位を V_{A}，点 B の電荷による $(x,\ 0)$ の電位を V_{B} とすると



i）$x < -a$ の場合

$$V(x) = V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}}$$
$$= k\frac{-q}{-a-x} + k\frac{q}{a-x} = \underline{-\frac{2kqa}{x^2-a^2}}$$

ii）$-a < x < a$ の場合

$$V(x) = V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}} = k\frac{-q}{x-(-a)} + k\frac{q}{a-x} = \underline{\frac{2kqx}{a^2-x^2}}$$

iii）$x > a$ の場合

$$V(x) = V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}} = k\frac{-q}{x-(-a)} + k\frac{q}{x-a} = \underline{\frac{2kqa}{x^2-a^2}}$$

(4) 点 A の電荷による $(0,\ y)$ の電位を $V_{\mathrm{A}}{}'$，点 B の電荷による $(0,\ y)$ の電位を $V_{\mathrm{B}}{}'$ とすると

$$V(y) = V_{\mathrm{A}}{}' + V_{\mathrm{B}}{}' = k\frac{-q}{\sqrt{a^2+y^2}} + k\frac{q}{\sqrt{a^2+y^2}} = \underline{0}$$

(5) 点 D の電位を V_{D}，点 E の電位を V_{E} とすると，(3) ii) より

$$V_{\mathrm{D}} = V\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2kq\left(\frac{a}{2}\right)}{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{4kq}{3a},\quad V_{\mathrm{E}} = V\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{2kq\left(-\frac{a}{2}\right)}{a^2-\left(-\frac{a}{2}\right)^2} = -\frac{4kq}{3a}$$

まず，(4) より，点 C の電位を V_{C} とすると，$V_{\mathrm{C}} = 0$ であることと，$V_{\mathrm{D}} = \dfrac{4kq}{3a} > 0$ より $V_{\mathrm{C}} < V_{\mathrm{D}}$ であるから，正電荷を点 C から点 D に運ぶ外力の仕事は正である．よって

$$W = Q(V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{C}}) = Q\left(\frac{4kq}{3a} - 0\right) = \underline{\frac{4kQq}{3a}}$$

また，点 D と点 E におけるエネルギー保存より

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + Q\times\frac{4kq}{3a} = \frac{1}{2}mv^2 + Q\times\left(-\frac{4kq}{3a}\right) \qquad \therefore\quad v = \underline{4\sqrt{\frac{kQq}{3ma}}}$$

【2】

《解答》

(1) ＜点電荷による電場＞

$\boxed{\text{ア}}$ $\underline{k\dfrac{q}{r^2}}$

$\boxed{\text{イ}}$ $k\dfrac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \underline{4\pi kq}$

(2) ＜一様な電場＞

$\boxed{\text{ウ}}$ ガウスの法則より $\underline{4\pi kQ}$

$\boxed{\text{エ}}$ [電場の大きさ] = [単位面積当たりの電気力線の本数] であるから，求める電界の強さを E とすると

$$E = \underline{\frac{4\pi kQ}{S}}$$

$\boxed{\text{オ}}$ 求める力の大きさを F[N] とすると

$$F = qE = \underline{\frac{4\pi kQq}{S}}$$

$\boxed{\text{カ}}$ 求める仕事を W[J] とすると

$$W = Fd = \underline{\frac{4\pi kQqd}{S}}$$

$\boxed{\text{キ}}$ 求める電位差を V[V] とすると，$W = qV$ より

$$V = \frac{W}{q} = \underline{\frac{4\pi kQd}{S}}$$

添削課題

《解答》

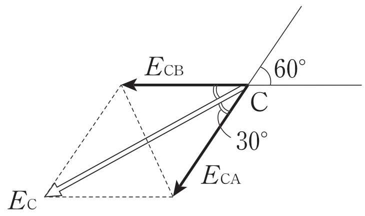
(1) 点 A，B の電荷が点 C につくる電場を E_{CA}，E_{CB} とすると　$|E_{\mathrm{CA}}| = |E_{\mathrm{CB}}| = k\dfrac{Q}{a^2}$

右下の図より，$E_{\mathrm{C}} = \sqrt{3}|E_{\mathrm{CA}}| = \dfrac{\sqrt{3}kQ}{a^2}$　　∴　大きさ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}kQ}{a^2}}$，向き <u>M→C 向き</u>

(2) 正電荷は電場の向きに力を受けるので

$$F = qE_{\mathrm{C}} = \frac{\sqrt{3}kqQ}{a^2}$$

∴　大きさ $\underline{\dfrac{\sqrt{3}kqQ}{a^2}}$，　向き <u>M → C 向き</u>



(3) 点 A，B の電荷が点 C につくる電位を V_{CA}，V_{CB} とすると

$$V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{CA}} + V_{\mathrm{CB}} = k\frac{Q}{a} + k\frac{Q}{a} = \underline{\frac{2kQ}{a}}$$

(4) 点 A，B の電荷が点 M につくる電位を V_{MA}，V_{MB} とすると

$$V_{\mathrm{M}} = V_{\mathrm{MA}} + V_{\mathrm{MB}} = k\frac{Q}{a/2} + k\frac{Q}{a/2} = \underline{\frac{4kQ}{a}}$$

(5) 点 C の電位に対する点 M の電位 V は

$$V = V_{\mathrm{M}} - V_{\mathrm{C}} = \frac{4kQ}{a} - \frac{2kQ}{a} = \frac{2kQ}{a}$$

運動の向きに外力を及ぼすので，外力のした仕事 W は正であるから

$$W = qV = \underline{\frac{2kqQ}{a}}$$

配点

(1) 各 10 点　　(2) 各 10 点　　(3)〜(5) 各 20 点

１２章　コンデンサー

問題

■演習

【1】

《解答》

$\boxed{\quad 1 \quad}$ コンデンサーに蓄えられた電気量を Q [C] とすると

$$Q = \underline{CV}$$

$\boxed{\quad 2 \quad}$ コンデンサーの極板間の電場の大きさを E [V/m] とすると，比誘電率 ϵ_r の誘電体内では電場の大きさが $\dfrac{1}{\epsilon_r}$ 倍になるから，求める極板間の電圧を V'[V] として

$$V = Ed, \quad V' = \frac{E}{\epsilon_r} \times d = \underline{\frac{V}{\epsilon_r}}$$

$\boxed{\quad 3 \quad}$ 求める電気容量を C' [F] とすると

$$C' = \frac{Q}{V'} = \frac{CV}{V/\epsilon_r} = \underline{\epsilon_r C}$$

$\boxed{\quad 4 \quad}$ コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーを U [J] とすると

$$U = \frac{1}{2}C'V'^2 = \frac{1}{2} \times \epsilon_r C \times \left(\frac{V}{\epsilon_r}\right)^2 = \underline{\frac{CV^2}{2\epsilon_r}}$$

$\boxed{\quad 5 \quad}$ コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの変化量を $\mathit{\Delta} U$ [J] とすると

$$\mathit{\Delta} U = \frac{1}{2}C'V'^2 - \frac{1}{2}CV^2 = \frac{CV^2}{2\epsilon_r} - \frac{CV^2}{2} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\frac{CV^2}{2}$$

よって，コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの減少量は $\underline{\left(1 - \dfrac{1}{\epsilon_r}\right)\dfrac{CV^2}{2}}$

$\boxed{\quad 6 \quad}$ スイッチ S を閉じたままであるから，コンデンサーの極板間電位差は電源電圧 V [V] に保たれるので，蓄えられた電気量を Q' [C] とすると

$$Q' = C'V = \underline{\epsilon_r CV}$$

$\boxed{\quad 7 \quad}$ $\boxed{\quad 6 \quad}$ と同様にコンデンサーの静電エネルギーを U' [J] とすると

$$U' = \frac{1}{2}C'V^2 = \underline{\frac{\epsilon_r CV^2}{2}}$$

$\boxed{\quad 8 \quad}$ コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの変化量 (増加量) を $\Delta U'$ [J] とすると

$$\Delta U' = \frac{1}{2}C'V^2 - \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\epsilon_r CV^2}{2} - \frac{CV^2}{2} = \underline{(\epsilon_r - 1)\frac{CV^2}{2}}$$

$\boxed{\quad 9 \quad}$ $\boxed{\quad 5 \quad}$ と同様に誘電体挿入のために費やされる仕事は負であるが，スイッチ S を閉じたままであるから，電荷が移動することによって静電エネルギーは増加する．電荷の移動は電池の仕事によるものであるから，この静電エネルギー増加分は <u>電池</u> から供給されたものである．

【2】

《解答》

(1) AD 間，BD 間それぞれが，D を正極板とする電気容量 $2C_0$ のコンデンサーとなっており，どちらも極板間電位差が V_0 であるから，極板 D の上面，下面に帯電する電荷はそれぞれ

$$2C_0 \times V_0 = 2C_0V_0$$

よって，極板 D に帯電する電荷の総量 Q は

$$Q = 2C_0 \times V_0 \times 2 = \underline{4C_0V_0}$$

(2) スイッチ S を開いたので，A と B に帯電する電荷の総量 $-4C_0V_0$，D の上下それぞれに帯電する電荷の総量 $+4C_0V_0$ は保存される．また，極板 A と B は接続されているので AD 間，BD 間の電位差は等しいから，極板 A，B 上の電荷 Q_{A}，Q_{B} は総量 $-4C_0V_0$ が容量の比に分配される．金属板 D を移動した後の AD，BD それぞれの極板間隔は移動する前の $\dfrac{d-x}{d}$ 倍，$\dfrac{d+x}{d}$ 倍であるから，AD 間，BD 間それぞれの電気容量 C_{AD}，C_{BD} は

$$C_{\mathrm{AD}} = \frac{d}{d-x}\cdot 2C_0,\ C_{\mathrm{BD}} = \frac{d}{d+x}\cdot 2C_0$$

$$\therefore\quad C_{\mathrm{AD}} : C_{\mathrm{BD}} = \frac{d}{d-x} : \frac{d}{d+x} = d+x : d-x$$

よって，電荷 Q_{A}，Q_{B} は負電荷であるから

$$Q_{\mathrm{A}} = -4C_0V_0 \times \frac{d+x}{2d} = \underline{-\frac{2(d+x)}{d}C_0V_0},$$

$$Q_{\mathrm{B}} = -4C_0V_0 \times \frac{d-x}{2d} = \underline{-\frac{2(d-x)}{d}C_0V_0}$$

$$\therefore\quad V = \frac{|Q_{\mathrm{A}}|}{C_{\mathrm{AD}}} = \frac{|Q_{\mathrm{B}}|}{C_{\mathrm{BD}}} = \underline{\frac{d^2-x^2}{d^2}V_0}$$

(3) AD 間，BD 間の電位差は等しいから，「公式：$U = \dfrac{1}{2}CV^2$」より，静電エネルギーをそれぞれ U_{AD}，U_{BD} とすると，それらの比は電気容量の比に等しい．よって，

$$U_{\mathrm{AD}} : U_{\mathrm{BD}} = C_{\mathrm{AD}} : C_{\mathrm{BD}} = d+x : d-x \qquad \therefore\quad \frac{U_{\mathrm{AD}}}{U_{\mathrm{BD}}} = \underline{\frac{d+x}{d-x}\ 倍}$$

添削課題

《解答》

I. コンデンサーの極板面積を S，極板間隔を d，誘電率を ϵ，電気容量を C とおくと

$$C = \epsilon\frac{S}{d}$$

極板間隔を 2 倍にした後の電気容量を C' とおくと

$$C' = \epsilon\frac{S}{2d} = \frac{1}{2}C$$

極板間隔を 2 倍にする前の，蓄えられる電気量を Q，極板間の電位差を V，電界の強さを E，静電エネルギーを U，極板間隔を 2 倍にした後の電気量を Q'，電界の強さを E'，静電エネルギーを U' とおくと

(1) S を閉じたまま極板間隔を 2 倍にする場合，つまり極板間の電位差を一定のまま極板間隔を 2 倍にする場合

(ア) 蓄えられる電気量　$Q = CV \ \rightarrow\ Q' = \left(\frac{1}{2}C\right)V = \frac{1}{2}Q \qquad \therefore\ \underline{\frac{1}{2}倍}$

(イ) 極板間の電位差　$V \ \rightarrow\ V \qquad \therefore\ \underline{1倍}$

(ウ) 電界の強さ　$E = \frac{V}{d} \ \rightarrow\ E' = \frac{V}{2d} = \frac{1}{2}E \qquad \therefore\ \underline{\frac{1}{2}倍}$

$\left(E = \frac{Q}{\epsilon S} \ \rightarrow\ E' = \frac{Q'}{\epsilon S} = \frac{Q}{2\epsilon S} = \frac{1}{2}E \qquad \therefore\ \underline{\frac{1}{2}倍}\right)$

(エ) 静電エネルギー　$U = \frac{1}{2}QV \ \rightarrow\ U' = \frac{1}{2}Q'V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Q\right)V = \frac{1}{2}U$

$\therefore\ \underline{\frac{1}{2}倍}$

(2) S を開いてから極板間隔を 2 倍にする場合，つまり蓄えられる電気量を一定のまま極板間隔を 2 倍にする場合

(ア) 蓄えられる電気量　$Q \ \rightarrow\ Q \qquad \therefore\ \underline{1倍}$

(イ) 極板間の電位差　$V = \frac{Q}{C} \ \rightarrow\ V' = \frac{Q}{C'} = \frac{2Q}{C} = 2V \qquad \therefore\ \underline{2倍}$

(ウ) 電界の強さ　$E = \frac{V}{d} \ \rightarrow\ E' = \frac{2V}{2d} = E \qquad \therefore\ \underline{1倍}$

$\left(E = \frac{Q}{\epsilon S} \ \rightarrow\ E' = \frac{Q}{\epsilon S} = E \qquad \therefore\ \underline{1倍}\right)$

(エ) 静電エネルギー　$U = \frac{1}{2}QV \ \rightarrow\ U' = \frac{1}{2}QV' = \frac{1}{2}Q(2V) = 2U$

$\therefore\ \underline{2倍}$

II. (1) コンデンサーの極板面積を S，極板間隔を d，真空の誘電率を ϵ_0，比誘電率を ϵ_r とおき，誘電体を入れる前の電気量を Q，極板間電圧を V， 電界の強さを E とおくと

$$V = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 S}d \ \rightarrow\ V' = \frac{Q}{\epsilon_r\epsilon_0 S}d = \frac{1}{\epsilon_r}V$$

$$\therefore \quad \epsilon_r = \frac{V}{V'} = \frac{40}{8.0} = \underline{5.0}$$

(2) 誘電体を入れる前の電気容量を C，静電エネルギーを U，誘電体を入れた後の極板間の電圧を $V'(= 8.0\mathrm{V})$，静電エネルギーを U' とおくと

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 120 \times 10^{-12} \times 40^2 = 9.6 \times 10^{-8}\mathrm{J}$$

$$\rightarrow\ U' = \frac{1}{2}\epsilon_r C(V')^2 = \frac{1}{2} \times 5.0 \times 120 \times 10^{-12} \times 8.0^2 = 1.92 \times 10^{-8}\mathrm{J}$$

$$\therefore \quad U' - U = -7.68 \times 10^{-8} \fallingdotseq -7.7 \times 10^{-8} \qquad \therefore \quad \underline{7.7 \times 10^{-8}\mathrm{J}\ 減少}$$

(3) 再び S を閉じたときの静電エネルギーの増加量を U'' とすると

$$U'' = \frac{1}{2}\epsilon_r CV^2 = \frac{1}{2} \times 5.0 \times 120 \times 10^{-12} \times 40^2 = 4.8 \times 10^{-7}\mathrm{J}$$

$$\therefore \quad U'' - U' = 4.608 \times 10^{-7} \fallingdotseq 4.6 \times 10^{-7} \qquad \therefore \quad \underline{4.6 \times 10^{-7}\mathrm{J}\ 増加}$$

配点

I. (1)(ア)〜(エ) 各 8 点　(2)(ア)〜(エ) 各 8 点　　II. (1)〜(3) 各 12 点

１３章　直流回路

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) キルヒホッフの第 1 法則より

$$\underline{i_1+i_2+i_3=0} \quad \cdots ①$$

キルヒホッフの第 2 法則より

左の閉回路について　$11-2i_1+3i_2-5=0$　　$\therefore$　$\underline{2i_1-3i_2=6}$　$\cdots ②$

右の閉回路について　$3-2i_3+3i_2-5=0$　　$\therefore$　$\underline{3i_2-2i_3=2}$　$\cdots ③$

(E_1，E_3を含む閉回路について

$11-2i_1+2i_3-3=0$　　$\therefore$　$\underline{i_1-i_3=4}$　も (②, ③の代わりとして) 可。)

(2) ②より　$i_1=\dfrac{3}{2}i_2+3 \quad \cdots ②'$　　③より　$i_3=\dfrac{3}{2}i_2-1 \quad \cdots ③'$

②′③′ を①に代入して　$\left(\dfrac{3}{2}i_2+3\right)+i_2+\left(\dfrac{3}{2}i_2-1\right)=0$　　$\therefore$　$i_2=\underline{-0.5\mathrm{A}}$

(3) (1) において，$i_2=0$，求める R_1 の抵抗値を r_1 とすると

$$i_1+i_3=0 \quad \cdots ④ \qquad r_1 i_1=6 \quad \cdots ⑤ \qquad -2i_3=2 \quad \cdots ⑥$$

④⑤⑥より　$r_1=\underline{6\Omega}$

【2】

《解答》

(1) $\mathrm{AD}=30\mathrm{cm}$，つまり AD 間の抵抗が $(500\times 30/50=)300\Omega$ であるとき，検流計 G の指針が振れなかったことから，H と C の電位が等しいので，T の抵抗値を R_{T} とすると

$$\frac{300}{R_{\mathrm{T}}}=\frac{900}{300} \qquad \therefore \quad R_{\mathrm{T}}=\underline{100\Omega}$$

(2) このとき，A，F2 点間の合成抵抗を R とすると

AD 間，FH 間の合成抵抗が　$300+900=1200\Omega$

AC 間，FC 間の合成抵抗が　$100+300=400\Omega$

であるから

$$R=\frac{1200\times 400}{1200+400}=\underline{300\Omega}$$

(3) $\mathrm{AD}=36\mathrm{cm}$，つまり AD 間の抵抗が $(500\times 36/50=)360\Omega$ であるとき，検流計 G の指針が振れなかったので，このときの T の抵抗値を R'_{T} とすると

$$\frac{360}{R'_{\mathrm{T}}}=\frac{900}{300} \qquad \therefore \quad R'_{\mathrm{T}}=120\Omega$$

ここで，T の抵抗率を $\rho=\rho_0(1+\alpha t)[\Omega\cdot\mathrm{m}]$，長さを l [m]，断面積を $S[\mathrm{m}^2]$ とすると $t=100$ ℃ のとき $R_{\mathrm{T}}=150\Omega$ であるから

$$R_{\mathrm{T}}=\rho\frac{l}{S}=\rho_0(1+100\alpha)\frac{l}{S}=150\Omega \quad \cdots ①$$

また (1) より，$t=0$ ℃ のとき $R_{\mathrm{T}}=100\Omega$ であるから

$$R_{\mathrm{T}}=\rho_0(1+0\cdot\alpha)\frac{l}{S}=100\Omega \qquad \therefore \quad \rho_0\frac{l}{S}=100 \quad \cdots ②$$

①②より　$\alpha=5.0\times 10^{-3}$．よって，求める温度を t とすると

$$R'_{\mathrm{T}}=\rho_0(1+\alpha t)\frac{l}{S}=100(1+5.0\times 10^{-3}t)=120$$

$$\therefore \quad t=\underline{40\text{ ℃}}$$

(4) D を A から 30cm の所に固定して，T を 100 ℃の沸騰水につけると，(1) の状態と比較して，T の温度が高い分，T の抵抗値が大きくなり，AC 間の電位差が大きくなって C の電位が下がるから，$\underline{\mathrm{H}\rightarrow\mathrm{C}}$ の向きに流れる．

(5) 白金線の半径を r [m]，このときの金属線の半径を r' [m] とすると

$$R_{\mathrm{T}}=\rho\frac{l}{\pi r^2}=\frac{\rho}{4}\cdot\frac{l}{\pi r'^2} \qquad \therefore \quad r'=\frac{1}{2}r \qquad \text{よって，}\quad \underline{\frac{1}{2}\text{倍}}$$

(6) <u>温度が上昇すると，金属イオンの熱運動が激しくなり，自由電子と衝突しやすくなるから．</u>

Z-KAI

会員番号		氏　名	