M3JSB/M3JB/M3TB

本科 1 期 7 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大文系数学

東大文系数学

難関大文系数学 T

問題

【1】(1) A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{p}$ とおくと, 条件式より,

$$5(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a})+4(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b})+3(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c})=\overrightarrow{0}$$

これより,

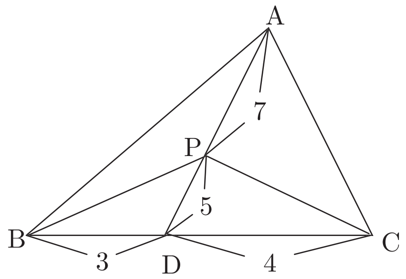
$$\overrightarrow{p}=\frac{5\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}}{12}=\frac{1}{12}\left(5\overrightarrow{a}+7\cdot\frac{4\overrightarrow{b}+3\overrightarrow{c}}{7}\right)$$

よって, BC を $3:4$ の比に内分する点を D とし, その位置ベクトルを $\overrightarrow{d}$ と置くと,

$$\overrightarrow{p}=\frac{5\overrightarrow{a}+7\overrightarrow{d}}{12}$$

従って，図 1 のように，点 P は AD を $7:5$ の比に内分する点である．　(答)

図 1



(2) △ABC の面積を S とおくと, (1) より, 点 P は図 1 のような位置にあるから,

$$\begin{cases}\triangle\mathrm{PBC}=\dfrac{5}{12}S\\ \triangle\mathrm{PCA}=\dfrac{7}{12}\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{4}{7}S=\dfrac{1}{3}S\\ \triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{7}{12}\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{3}{7}S=\dfrac{1}{4}S\end{cases}$$

よって,

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{12}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=5:4:3 \qquad \text{(答)}$$

【2】$\boxed{1}$

(1) 条件

$$\begin{cases}0\leqq s+t\leqq 1 & \cdots\cdots\cdots ①\\ s\geqq 0,\ t\geqq 0 & \cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$$

の下で

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{a}+t(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\ \cdots\cdots\cdots ③$$

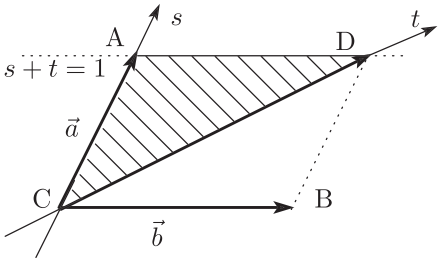
の掃過領域を考える.

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと, 4 角形 CBDA は平行 4 辺形で, ③ は

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}\quad \cdots\cdots\cdots ③'$$

図 2 のように斜交座標 $(s,\ t)$ で考えると, ①, ②, ③$'$ より, 点 P は△ CDA の周と内部を動く. よって, 点 P の存在範囲は図 2 の斜線部で境界を含む.　(答)

図 2



(2) まず，$s \geqq 0, t \geqq 0$ であるから，点 P の存在領域は，$\angle$ACB の内部 (境界である直線 CA, CB を含む) に含まれる．

この下で，条件 $0 \leqq 2s+3t \leqq 4$ を考える．$2s+3t=k$ と置く．

まず，$k=0$ のとき，$s \geqq 0, t \geqq 0$ であるから，$s=t=0$ と定まり，このときは点 P は頂点 C に一致する．

次に，$k \neq 0$ の場合について，$k>0$ であるから，条件 $0<k=2s+3t \leqq 4$ の両辺を k で割って

$$0<\frac{2s}{k}+\frac{3t}{k}=1 \leqq \frac{4}{k}$$

このとき，ベクトル $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ について

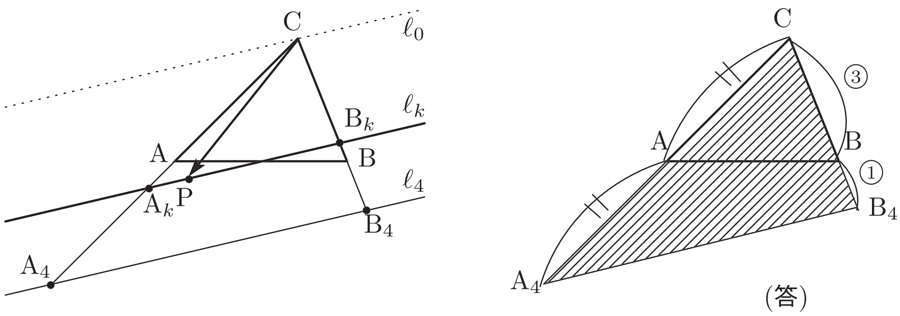
$$\overrightarrow{p}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}=\frac{2s}{k}\cdot\frac{k}{2}\overrightarrow{a}+\frac{3t}{k}\cdot\frac{k}{3}\overrightarrow{b}$$

と変形すれば，$\mathrm{A}_k\left(\dfrac{k}{2}\overrightarrow{a}\right)$，$\mathrm{B}_k\left(\dfrac{k}{3}\overrightarrow{b}\right)$ として，

$$\overrightarrow{p}=\frac{2s}{k}\overrightarrow{\mathrm{CA}_k}+\frac{3t}{k}\overrightarrow{\mathrm{CB}_k},\quad \frac{2s}{k}+\frac{3t}{k}=1$$

より，3 点 $(\mathrm{PA}_k\mathrm{B}_k)$ は共線である．この直線を ℓ_k と表す．図 3 の左側を参照せよ．

図 3



$0<k \leqq 4$ であるから，

$$0<\frac{k}{2} \leqq 2,\quad 0<\frac{k}{3} \leqq \frac{4}{3}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{CA}_4}=2\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}_4}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{b}$ として 2 点 $\mathrm{A}_4, \mathrm{B}_4$ を定めれば，直線 $\ell_k=\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ は直線 $\ell_4=\mathrm{A}_4\mathrm{B}_4$ に平行に移動する．

従って，この場合の点 P の存在領域，つまりベクトル $\overrightarrow{p}$ の掃過領域は ℓ_0 と ℓ_4 で挟まれた帯状領域となる．ただし，境界 ℓ_0 を含まず，ℓ_4 を含む．
これと，$\angle$ACB の内部及び境界からなる領域との共通部分が求める領域となる．
図 3 の右側になる．
以上をまとめて，求める領域は

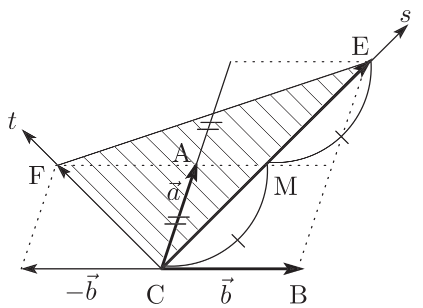
$\overrightarrow{\mathrm{CA_4}} = 2\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB_4}} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{b}$ として，$\triangle \mathrm{CA_4B_4}$ の内部及び周上．　(答)

(3) 条件の下で

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= (2s+t)\overrightarrow{a} + (s-t)\overrightarrow{b} \quad \cdots\cdots\cdots ④\\ &= s(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + t(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\end{aligned}$$

と変形される．

図 4



$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{CE}}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{CF}}$ とおくと, ④は, $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CE}} + t\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ で, (1) と同様に考えて，$0 \leqq s+t \leqq 1$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ より，点 P は $\triangle$CFE の周と内部を動く．
よって, 点 P の存在範囲は図 4 の斜線部で境界を含む．　(答)

$\boxed{\mathbf{2}}$ A($\overrightarrow{a}$)，B($\overrightarrow{b}$)，C($\overrightarrow{c}$)，P($\overrightarrow{p}$)，Q($\overrightarrow{q}$)，R($\overrightarrow{r}$) とし，$0 < s < 1$，$0 < t < 1$，$0 < u < 1$ の下で

$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = s : 1-s$, $\mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = t : 1-t$, $\mathrm{CR} : \mathrm{RA} = u : 1-u$

とすると，P, Q, R の位置ベクトルについて

$$\overrightarrow{p} = (1-s)\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{q} = (1-t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{r} = (1-u)\overrightarrow{c} + u\overrightarrow{a}$$

を得る．
$\triangle$PQR の重心 G($\overrightarrow{g}$)，$\triangle$ABC の重心を $\mathrm{G_0}(\overrightarrow{g_0})$ とすれば,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g} &= \frac{1}{3}\{(1-s+u)\overrightarrow{a} + (1-t+s)\overrightarrow{b} + (1-u+t)\overrightarrow{c}\}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) + \frac{1}{3}\{s(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) + t(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) + u(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})\}\\ &= \overrightarrow{g_0} + \frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{u}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\end{aligned}$$

いま,

$$\overrightarrow{\mathrm{G_0A_0}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{G_0B_0}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{G_0C_0}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

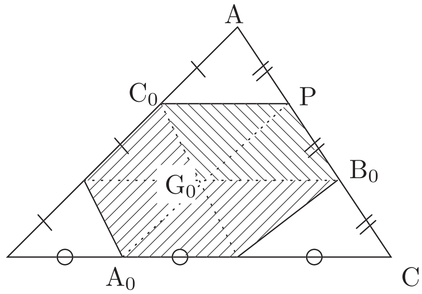
とすれば，$\mathrm{A_0}$, $\mathrm{B_0}$, $\mathrm{C_0}$ はそれぞれ BC, CA, AB を $1:2$ に分ける点である．

ここで

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g_0} + s\overrightarrow{\mathrm{G_0A_0}} + t\overrightarrow{\mathrm{G_0B_0}} + u\overrightarrow{\mathrm{G_0C_0}}$$

が成り立ち，$t\overrightarrow{\mathrm{G_0B_0}} + u\overrightarrow{\mathrm{G_0C_0}}$ は $s=0,\ 0<t<1,\ 0<u<1$ のとき，平行 4 辺形 $\mathrm{G_0B_0PC_0}$ を掃過する (境界含まず)．$0<s<1$ で s を動かせば，この平行 4 辺形は頂点 $\mathrm{G_0}$ を線分 $\mathrm{G_0A_0}$ に置きながら平行移動する．

図 5



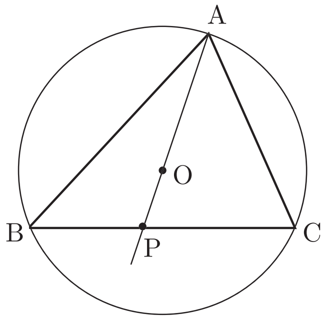
以上より，求める領域は図 5 の 6 角形となる．ただし，境界は含まない。

【3】(1) 条件式より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots\cdots①$$

である．

図 6



$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と置く．①より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{3}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OB}} - 2k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

P が BC 上にあるので

$$-\frac{3}{2}k + (-2k) = 1 \qquad \therefore \quad k = -\frac{2}{7}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

P は線分 BC を 4 : 3 に内分する．　　(答)

(2) 条件式より

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\left(3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

これと $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$ より

$$4 = \left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 = \left|3\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = 9 + 16 + 24\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\frac{7}{8}$$

よって求める面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{16} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\frac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \frac{9}{7} \qquad \text{(答)}$$

また

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 = 1 + 1 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2 + \frac{7}{4} = \frac{15}{4}$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \frac{\sqrt{15}}{2} \qquad \text{(答)}$$

【4】 $\mathrm{A}(\overrightarrow{0}),\ \mathrm{B}(\overrightarrow{b}),\ \mathrm{C}(\overrightarrow{c}),\ \mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ と定める.

(1) 第 1 の条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} \leqq 0 &\iff \overrightarrow{p}\cdot\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{c}\right) \leqq 0\\ &\iff \left|\overrightarrow{p}\right|^2 - \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{c} \leqq 0\\ &\iff \left|\overrightarrow{p} - \frac{1}{2}\overrightarrow{c}\right|^2 \leqq \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{c}\right|^2 = \frac{25}{4}\end{aligned}$$

が成り立つから，点 P の存在領域は $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{c}\right)$ を中心とし，半径が $\dfrac{5}{2}$ の円の内部及び周上である.

第 2 の条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} \leqq \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} &\iff \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p} \leqq -\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}\right)\\ &\iff 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p} - \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \leqq 0\\ &\iff \overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{p} - \frac{\overrightarrow{b}}{2}\right) \leqq 0\end{aligned}$$

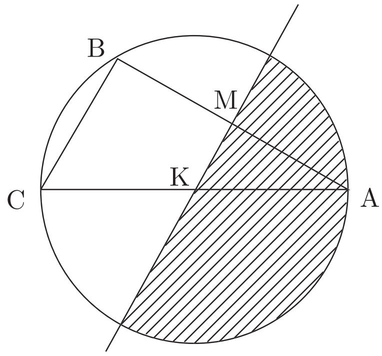
であるから，AB の中点を M として

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}} \leqq 0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}$ のなす角を θ とすれば $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である.

つまり，AB の垂直 2 等分線を境界とする半平面のうち，A を含む片側である．以上より，求める領域は図 7 のようになる.

図 7



(2) △PBC の面積が最大となるのは，P が線分 BC の垂直２等分線と優弧 BAC の交点にあるときである．辺 BC の中点を N として

$$\mathrm{BN} = \frac{3}{2} \qquad \therefore\ \mathrm{NK} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2$$

であるから，

$$\mathrm{NP} = 2 + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}$$

よって，△ PBC の面積の最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{4} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を位置ベクトルとする点をそれぞれ A, B, C とする.

(1) $r+s=k$ とおくと,

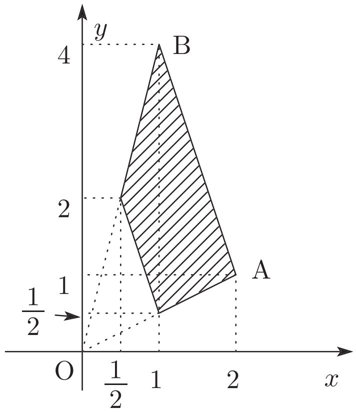
$$\overrightarrow{p}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}=k\left(\frac{r}{k}\overrightarrow{a}+\frac{s}{k}\overrightarrow{b}\right)$$

ここで, k を固定して r, s を変化させると

$$\frac{r}{k}+\frac{s}{k}=\frac{r+s}{r+s}=1$$

だから $\dfrac{r}{k}\overrightarrow{a}+\dfrac{s}{k}\overrightarrow{b}$ を位置ベクトルとする点は線分 AB 上を動く.

次に, k を変化させると, $\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ より, 点 P が動く領域は, 線分 AB を原点を中心に $\dfrac{1}{2}$ 倍から 1 倍まで拡大するときに通過する範囲となる. よって求める領域は上のようになる (境界は含む).

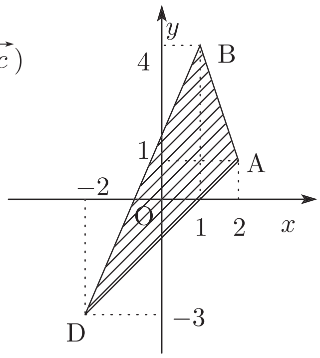


(2) $r+s=k$ とおくと, $k+t=1$ である. また

$$\overrightarrow{p}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}-t\overrightarrow{c}=k\left(\frac{r}{k}\overrightarrow{a}+\frac{s}{k}\overrightarrow{b}\right)+t(-\overrightarrow{c})$$

k を固定して r, s を変化させると, $\dfrac{r}{k}+\dfrac{s}{k}=1$ より, $\dfrac{r}{k}\overrightarrow{a}+\dfrac{s}{k}\overrightarrow{b}$ を位置ベクトルとする点は線分 AB 上を動く.

次に, k, t を変化させると, 点 P が動く領域は, $-\overrightarrow{c}$ を位置ベクトルとする点を D として, 三角形 ABD の周および内部である. よって求める領域は右のようになる (境界は含む).



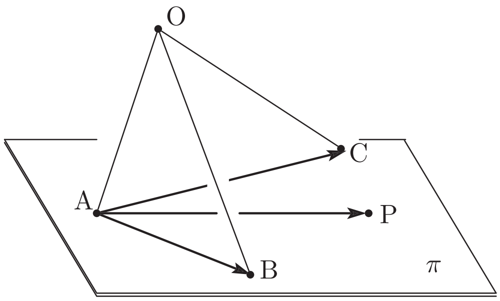
問題

【1】(1)　(i) まず必要条件であることを示す．示すべき命題は

「4 点 (PABC) が共面ならば，$\alpha+\beta+\gamma=1$」

である．

図 1



P が 3 点 A, B, C で定まる平面上にあれば，実数 s と t を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と書ける．基点を O として表せば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる．

3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は同一平面上にない (1 次独立である) ので

$\alpha=1-s-t,\ \beta=s,\ \gamma=t \qquad \therefore\ \alpha+\beta+\gamma=1$

(ii) 次に十分条件であることを示す．$\alpha+\beta+\gamma=1$ とすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-\beta-\gamma)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\beta\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

従って，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の張る平面上にあるから，確かに点 P は 3 点 A, B, C で定まる平面上にある．（証明終）

(2) (1) から $\alpha+\beta+\gamma=1$ は成り立っている．

このとき, P が $\triangle$ABC の内部にあるのは (1) の s と t が

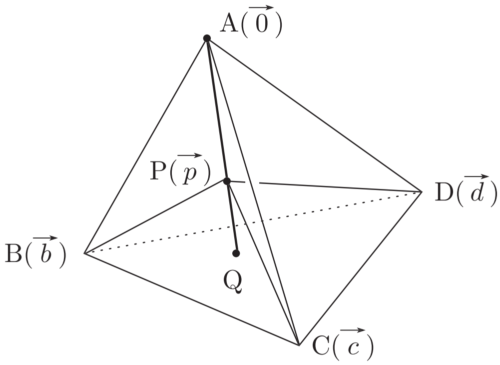
$0<\beta,\ 0<\gamma,\ \beta+\gamma<1$

をみたすときである. $\alpha=1-(\beta+\gamma)$ なので求める条件は

$0<\alpha,\ 0<\beta,\ 0<\gamma,\ \alpha+\beta+\gamma=1$ 　　(答)

【2】 $\mathrm{A}(\overrightarrow{0})$, $\mathrm{B}(\overrightarrow{b})$, $\mathrm{C}(\overrightarrow{c})$, $\mathrm{D}(\overrightarrow{d})$, $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ と定める．また，4 面体 ABCD の体積を V とし，更に直線 AP と面 BCD の交点を Q とする．

図 2



与えられた条件より，

$$\alpha\overrightarrow{p}+\beta\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{b}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}\right)+\delta\left(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{d}\right)=\overrightarrow{0}$$

であるから，これを $\overrightarrow{p}$ について整理すれば

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{p}=\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}+\delta\overrightarrow{d}$$

を得る．$\alpha+\beta+\gamma+\delta=s$ と置けば，$\overrightarrow{p}$ について

$$\overrightarrow{p}=\frac{\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}+\delta\overrightarrow{d}}{s}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

▼ (APQ) は共線だから，ある実数 k について

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{p}=\frac{k}{s}\left(\beta\overrightarrow{b}+\gamma\overrightarrow{c}+\delta\overrightarrow{d}\right)$$

▼ (QBCD) は共面だから

$$\frac{k}{s}(\beta+\gamma+\delta)=1\qquad\therefore\quad k=\frac{s}{\beta+\gamma+\delta}$$

従って，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}=1:k=\beta+\gamma+\delta:\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

が成り立ち，

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{AQ}=\alpha:s$$

となる．4 面体 PBCD と 4 面体 ABCD は，△BCD を底面として共有し，かつその高さの比は PQ : AQ に等しいから，PBCD の体積を V_{A} とすれば，

$$V_{\mathrm{A}}=\frac{\alpha}{s}V$$

まったく同様の計算により，他の 4 面体 PACD, PABD, PABC について，その体積をそれぞれ $V_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{C}}, V_{\mathrm{D}}$ とすれば

$$V_{\mathrm{B}}=\frac{\beta}{s}V,\quad V_{\mathrm{C}}=\frac{\gamma}{s}V,\quad V_{\mathrm{D}}=\frac{\delta}{s}V$$

となる．

よって求める体積比は

$$V_{\mathrm{A}}:V_{\mathrm{B}}:V_{\mathrm{C}}:V_{\mathrm{D}}=\alpha:\beta:\gamma:\delta\qquad(答)$$

【3】(1) $\mathrm{A}\,(1,\,1,\,1)$, $\mathrm{B}\,(-1,\,2,\,3)$, $\mathrm{C}\,(a,\,-1,\,4)$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}a\\-1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

従って, 内積の定義から,

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}=\frac{2(a+1)+3-2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{(a+1)^2+(-3)^2+1^2}}$$

$$=\frac{2a+3}{3\sqrt{a^2+2a+11}}\qquad(\text{答})$$

(2) ベクトルによる 3 角形の面積公式を用いて,

$$S(a)=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\left(a^2+2a+11\right)-(2a+3)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5a^2+6a+90}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(a+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{441}{5}}$$

よって面積 $S\,(a)$ の最小値は $a=-\dfrac{3}{5}$ のときで,

$$\min S=S\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{21\sqrt{5}}{10}\qquad(\text{答})$$

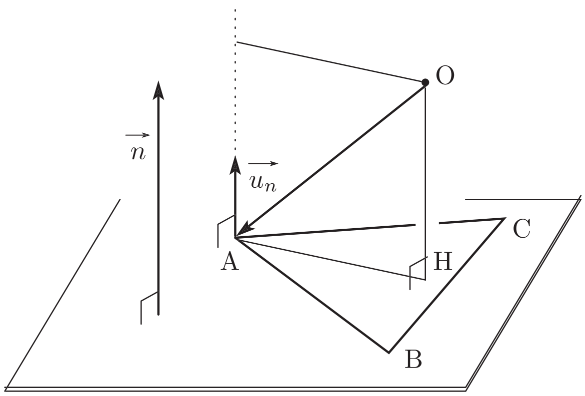
(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\-3\\1\end{pmatrix}$ のいずれとも垂直なベクトルを $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ とすると,

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0\iff 2\alpha-\beta-2\gamma=0$$

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\iff \frac{2}{5}\alpha-3\beta+\gamma=0$$

が成り立つ.

図 3



これから，比 $\alpha:\beta:\gamma$ を求めると，

$\alpha:\beta:\gamma=5:2:4$

を得るから，$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$ とすることができる．

原点 O から面 ABC に下した垂線の足 H について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$のベクトル$\overrightarrow{n}$ への正射影 $\overline{\mathrm{OH}}$ を求めれば，それが点 O と平面 ABC の距離 (ただし，符号をもつ距離) になる．$\overrightarrow{n}$ に平行な単位ベクトルを$\overrightarrow{u_n}$とすると，

$$\overline{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{u_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，

$$\left|\overrightarrow{n}\right|=\sqrt{5^2+2^2+4^2}=3\sqrt{5},\quad \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=11$$

であるから，正射影 $\overline{\mathrm{OH}}$ は $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{11}{3\sqrt{5}}$ となる．従って，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$の$\overrightarrow{n}$への正射影ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{u_n}=\frac{11}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{11}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{11}{45}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$$

従って，求める点 H の座標は

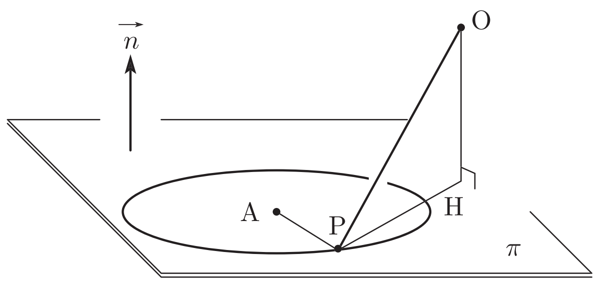
$\mathrm{H}\left(\dfrac{11}{9},\dfrac{22}{45},\dfrac{44}{45}\right)$　　(答)

(4) (2), (3) より四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\,\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{21\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{11}{3\sqrt{5}}=\frac{77}{30}\qquad(\text{答})$$

【4】 原点 O から，この平面 π に下した垂線の足を H とする．題意を図にすると，図 4 のようになる．

図 4

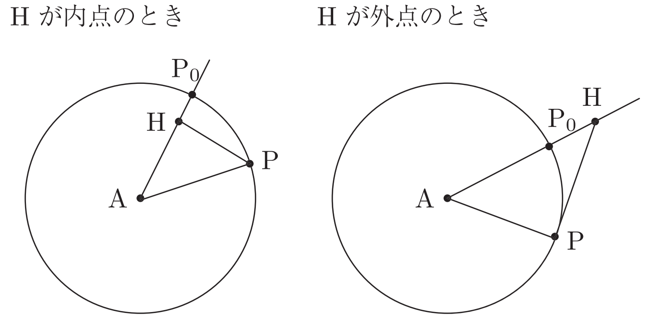


$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2$ であり，OH は定数であるから，OP が最小であるのは，PH が最小であるときである．

更に，PH が最小であるのは，3 点 (AHP) が共線であるときで，このとき

$\min\mathrm{PH}=\left|\mathrm{AH}-2\right|$

図 5



$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$は，$\overrightarrow{n}$への$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$の正射影ベクトルであるから，まず正射影 $\overline{\mathrm{OH}}$ を求めると，$\left|\overrightarrow{n}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ であるから，

$$\overline{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}(5-2+6) = 3$$

従って，$\overrightarrow{n}$ への$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$の正射影ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$は

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OH}}\times\frac{\overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{n}\right|} = 3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \mathrm{H}\,(1,\,2,\,2)$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right| = \sqrt{(-4)^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$$

この値は半径 2 より大きいから，点 H は円の外点である．よって

$$\min\mathrm{PH} = \left|\sqrt{26}-2\right| = \sqrt{26}-2$$

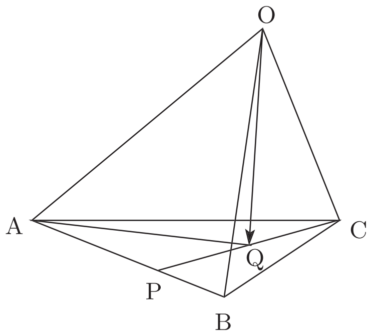
であるから，求める OP^2 の最小値は

$$\begin{aligned}\min\mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OH}^2 + (\min\mathrm{PH})^2\\ &= 3^2 + \left(\sqrt{26}-2\right)^2 = 39-4\sqrt{26} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

添削課題

【1】題意を図にすると，図 1 のようになる．

図 1



(1) $\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 2 : 1$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって, Q は PC の中点であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &= \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 2,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$ であり, また,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos\angle\mathrm{AOB} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| \cos\angle\mathrm{BOC} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \cos\angle\mathrm{COA} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

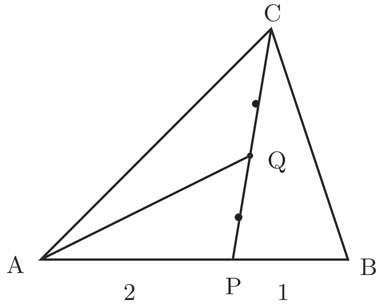
なので,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{6}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}})\right|^2 = \frac{1}{36}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\ &= \frac{1}{36}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 9|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 + 4\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 12\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} + 6\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}})\\ &= \frac{1}{36}\left(3^2 + 4 \cdot 2^2 + 9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{67}{36}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \frac{\sqrt{67}}{6} \qquad \text{(答)}$$

(3) 底面の $\triangle$ABC だけを取り出して図にすると，図 2 のようになる．

図 2



$$\triangle\,\mathrm{APQ} = \frac{1}{2}\triangle\,\mathrm{APC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\triangle\,\mathrm{ABC}$$

であるから, $\triangle\,\mathrm{ABC}$ の面積を求める.

$$\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

を用いる.

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &= 2^2 - 2\cdot 3 + 3^2 \;=\; 7\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &= \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &= 1^2 - 2\cdot\frac{3}{2} + 3^2 \;=\; 7\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\\ &= 1 - 3 - \frac{3}{2} + 3^2 \;=\; \frac{11}{2}\end{aligned}$$

従って

$$\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{7\cdot 7 - \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt{3}$$

であるから,

$$\triangle\,\mathrm{APQ} = \frac{1}{3}\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\sqrt{3} = \frac{5}{12}\sqrt{3} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 接点を $\mathrm{T}_1\,(X_1,\ Y_1)$，および $\mathrm{T}_2\,(X_2,\ Y_2)$ とすれば，接線の方程式は

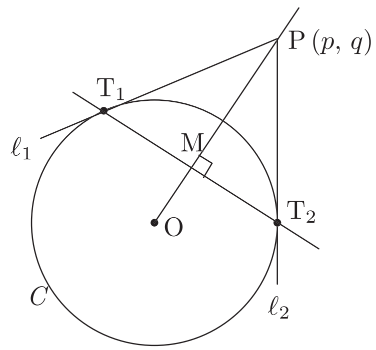
$$\ell_1 : X_1x + Y_1y = 1, \quad \ell_2 : X_2x + Y_2y = 1$$

点 P を $\mathrm{P}\,(p,\,q)$ とすれば，P は ℓ_1，ℓ_2 上にあるから，

$$X_1p + Y_1q = 1, \quad X_2p + Y_2q = 1$$

が成り立つ．

図 1



ここで，直線 $px + qy = 1$ を考えると，点 $\mathrm{T}_1\,(X_1,Y_1)$，$\mathrm{T}_2\,(X_2,Y_2)$ はいずれもこの方程式をみたすから，2 点 $\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2$ はどちらもこの直線上にある．よって，直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ の方程式は

$$\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 : px + qy = 1$$

この直線の法線ベクトルを $\overrightarrow{n}$ とすれば $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ となり，かつ点 M は直線 OP 上にあるから，3 点 OMP は共線で，$\mathrm{M}\,(X,\,Y)$ とすれば，ある実数 $r\,(>0)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{n} = r\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad X = rp,\ Y = rq \Longleftrightarrow p = \frac{X}{r},\ q = \frac{Y}{r} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

点 $\mathrm{M}\,(X,\,Y)$ は直線 $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ 上にあるから，

$$pX + qY = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．②に①を代入して

$$\frac{X^2}{r} + \frac{Y^2}{r} = 1 \Longleftrightarrow r = X^2 + Y^2$$

再び ① に代入して

$$p = \frac{X}{X^2+Y^2},\ q = \frac{Y}{X^2+Y^2}$$

となり，点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{X}{X^2+Y^2},\ \frac{Y}{X^2+Y^2}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) 点 P が直線 $x = k$ 上にあるから，(1) より

$$\frac{X}{X^2+Y^2} = k \Longleftrightarrow X = k\left(X^2+Y^2\right) \text{ かつ } X^2+Y^2 \neq 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

また，点 P が円 $C : x^2+y^2=1$ の外部にあるから，$\mathrm{OP}^2>1$，つまり

$$\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}>1 \iff X^2+Y^2<1$$

である．従って次が成り立つ：

点 M は円 C の内部にあることが必要でさらに $X^2+Y^2\neq 0$ であるから，原点 O に一致することはない．　(♯)

k について，0 かどうかで場合を分ける．

(i) $k=0$ のとき，$X=0$ となり，M の軌跡は y 軸に含まれる．

(♯) を考えて，このとき点 M の軌跡は

$$x=0,\quad -1<y<0,\ 0<y<1$$

(ii) $k>0$ のとき，③より

$$X^2+Y^2=\frac{X}{k} \iff \left(X-\frac{1}{2k}\right)^2+Y^2=\frac{1}{4k^2}$$

となり，点 M の軌跡はこの円の円周に含まれる．この円を C_{P} とする．

(♯) を考えて，この円 C_{P} が単位円 C に含まれるかどうかで場合を分ける．

Case 1.　C_{P} が単位円 C の内部に含まれるとき，半径と中心間の距離を考えて

$$1-\frac{1}{2k}>\frac{1}{2k} \iff 1>\frac{1}{k} \iff k>1$$

つまり，$k>1$ のとき，M の軌跡は

$$\text{円}\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2k}\right)^2,\quad \text{ただし}\,(x,\,y)\neq(0,\,0)$$

Case 2.　C_{P} と C が共有点をもつとき，内接する場合も含めて考えれば

$$\left|1-\frac{1}{2k}\right| \leqq \frac{1}{2k}<1+\frac{1}{2k} \iff (0<)\,k\leqq 1$$

このとき，求める点 M の軌跡は，

$$\text{円}\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2k}\right)^2,\quad \text{ただし}\,x^2+y^2<1\,\text{かつ}\,(x,\,y)\neq(0,\,0)$$

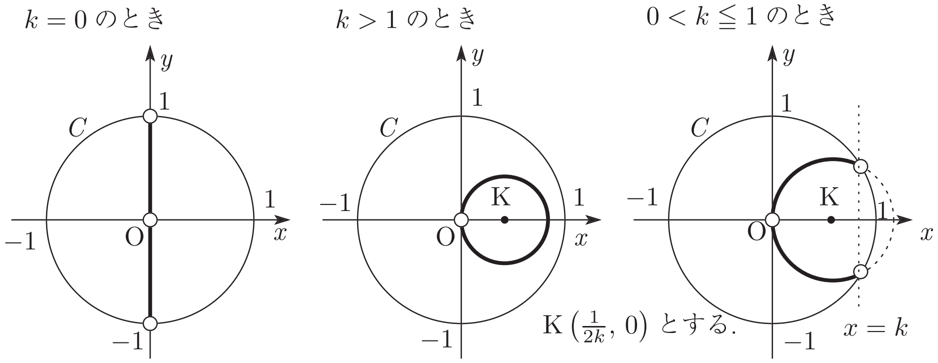
この円 C_{P} と単位円 C との交点は，直線 $x=k$ 上にある．

以上をまとめて，次の結果を得る：

- $k=0$ のとき，y 軸の $-1<y<0,\ 0<y<1$ の部分．
- $k>1$ のとき，円 $\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2k}\right)^2$ の原点 O を除いた図形．
- $0<k\leqq 1$ のとき，円 $\left(x-\frac{1}{2k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2k}\right)^2$ の，単位円 C の内部にあり，かつ原点 O を除いた図形．

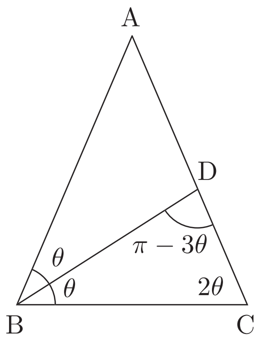
それぞれ図示すれば，図 2 の太線部が求める軌跡になる．　(答)

図 2



【2】底角 $\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=2\theta$ とすれば，$\triangle\mathrm{BDC}$ で $\angle\mathrm{BDC}=\pi-3\theta$ である.

図 3



$\triangle\mathrm{BDC}$ で正弦定理を用いれば

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin 2\theta}=\frac{\mathrm{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{1}{\sin 3\theta}$$

よって線分 BD について，次のようになる：

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}&=\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}\\&=\frac{2\cos\theta}{3-4\sin^2\theta}\\&=\frac{2\cos\theta}{4\cos^2\theta-1}\end{aligned}$$

$t=2\cos\theta$ と置けば，

$$0<2\theta<\frac{\pi}{2}\iff 0<\theta<\frac{\pi}{4}\iff\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\theta<1\iff\sqrt{2}<t<2$$

であり

$$\mathrm{BD}=\frac{2\cos\theta}{(2\cos\theta)^2-1}=\frac{t}{t^2-1}$$

と表される．これを $f(t)$ とすると，

$$f(t)=\frac{t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}\right)$$

$\sqrt{2} < t < 2$ において，$f(t)$ は連続で，$\dfrac{1}{t+1}$, $\dfrac{1}{t-1}$ はいずれも単調に減少するから，$f(t)$ も単調に減少する．よって

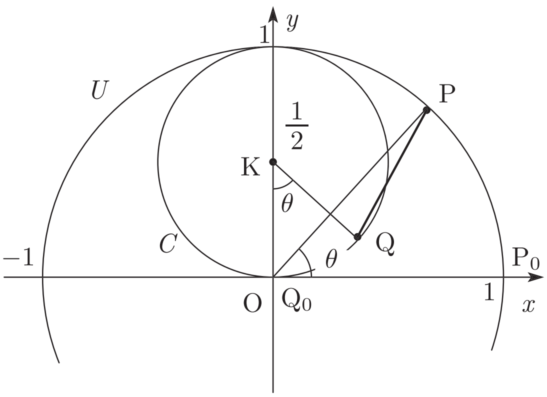
$$f(2) < \mathrm{BD} < f\left(\sqrt{2}\right)$$

$f(2) = \dfrac{2}{2^2-1} = \dfrac{2}{3}$, $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{2}$ であるから，$\angle\mathrm{B}$ の 2 等分線 BD の長さの範囲は

$$\frac{2}{3} < \mathrm{BD} < \sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

【3】P, Q がそれぞれ U および C を 1 周する時間を 2π として一般性を失わない．

図 4



C は

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

と変形されるから，その中心は $\mathrm{K}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，また半径は $\dfrac{1}{2}$ の円である．2 点 P, Q が出発して時間 θ だけ経過したとき，点 P の座標は $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$ である．

また，このときの Q について $\mathrm{Q}(X, Y)$ とすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OK}} + \overrightarrow{\mathrm{KQ}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) \end{pmatrix}$$

であるから，

$$X = \frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$Y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$$

従って，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(1-\cos\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin\theta - 2\cos\theta \\ (1-\cos\theta) - 2\sin\theta \end{pmatrix}$$

ここで，線分 PQ の長さを最大，最小にするために，$4\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を考える．

$$\begin{aligned} 4\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= (\sin\theta - 2\cos\theta)^2 + \{(1-\cos\theta) - 2\sin\theta\}^2 \\ &= 6 - 4\sin\theta - 2\cos\theta \end{aligned}$$

$= 6 - 2(2\sin\theta + \cos\theta)$

$f(\theta) = 2\sin\theta + \cos\theta$ と置いて，合成すると，

$f(\theta) = 2\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{5}\sin(\theta + \alpha)$

となる．ただしここで，α は $\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$ をみたす角である．

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ であるから，$\sin(\theta+\alpha) = 1$，$\sin(\theta+\alpha) = -1$ となる θ が存在する．よって，$f(\theta)$ の最大・最小は

- （最大値）$= \sqrt{5}$，これは $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のときで，このとき $4\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ は最小．
- （最小値）$= -\sqrt{5}$，これは $\theta + \alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ のときで，このとき $4\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ は最大．

以上より，距離 PQ の最大・最小は

- 最大となるのは $f(\theta)$ が最小値 $-\sqrt{5}$ をとるときで，このとき

$$\mathrm{PQ}^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4} \qquad \therefore \quad \max \mathrm{PQ} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad (\text{答})$$

- 最小となるのは $f(\theta)$ が最大値 $\sqrt{5}$ をとるときで，このとき

$$\mathrm{PQ}^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4} \qquad \therefore \quad \min \mathrm{PQ} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (\text{答})$$

【4】 まず，S_1 は中心 $\mathrm{K}(0, 0, 1)$，半径 1 の球面であり，S_2 は中心 $(0, 1, 0)$，半径 1 の球面である．

2 つの球 S_1，S_2 の共有点の集合を求める．一般に，2 個の球が交わるとき，その共通部分は円になる．その円を『公円』と言う．

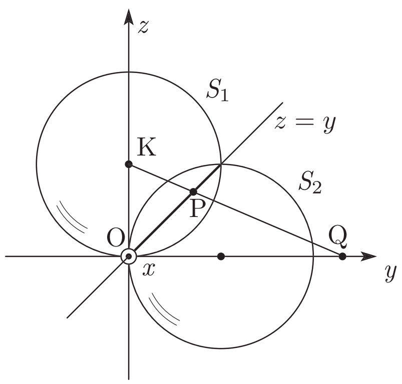
$S_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 1 = 0, \quad S_2 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 - 1 = 0$

のいずれにも含まれる点は，この 2 式を同時にみたすから，連立して辺々引けば

$2y - 2z = 0 \iff y = z$

が成り立つ．従って公円 C は球 S_1 と平面 $y = z$ との共通部分である．そこで，2 球を yz 平面で切断した断面を考えると，次の図 5 のようになる．

図 5



$z=y$ を球面 S_1 の方程式に代入して

$$x^2+y^2+(y-1)^2=1 \iff x^2+2y^2-2y=0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

公円 C 上の点 P は平面 $y=z$ 上にあるから，その座標を $\mathrm{P}\,(x,\,y,\,y)$ とし，また直線 KP と xy 平面との交点 Q を $\mathrm{Q}\,(X,\,Y,\,0)$ とする．3 点 (KPQ) は共線であるから，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=t\overrightarrow{\mathrm{KQ}}$$

が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\y-1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{KQ}}=\begin{pmatrix}X\\Y\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\\-1\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\y-1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}X\\Y\\-1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x=tX\\y=tY\\y-1=-t\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots ②$$

第 3 式より $y=1-t$ であるから，第 2 式と合わせて

$$tY=1-t \qquad \therefore \quad (1+Y)\,t=1$$

点 P の y 座標は常に非負だから，$1+Y>0$ で，従って

$$t=\frac{1}{1+Y}\quad\cdots\cdots\cdots ③$$

②, ③より

$$x=\frac{X}{1+Y},\quad y=\frac{Y}{1+Y}\quad\cdots\cdots\cdots ④$$

④を①に代入して

$$\begin{aligned}&\left(\frac{X}{1+Y}\right)^2+2\left(\frac{Y}{1+Y}\right)^2-2\cdot\frac{Y}{1+Y}=0\\&\iff X^2+2Y^2-2\,(1+Y)\,Y=0\\&\iff X^2-2Y=0 \qquad \therefore \quad Y=\frac{1}{2}X^2\end{aligned}$$

以上より，求める Q の軌跡は

放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2,\ z=0$ 　　(答)

M3JSB/M3JB/M3TB
選抜東大文系数学
東大文系数学
難関大文系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	