本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

１１章－１　確率（２）

問題

【1】

- 甲が当たりを引く確率

  1 回で当たりくじを引く確率は

  $$\frac{3}{10}$$

  1 回チャンスくじを引き，もう一度引いて当たりくじを引く確率は

  $$\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{3\cdot 10}$$

  したがって，甲が当たりくじを引く確率は

  $$\frac{3}{10}+\frac{1}{3\cdot 10}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

  である．

- 乙が当たりを引く確率

  (i) 甲が 1 回で当たりを引いた後，乙が当たりを引く確率は

  $$\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\right)=\frac{3}{40}$$

  (ii) 甲が 1 回チャンスくじを引き 2 回目で当たりを引いた後，乙が当たりを引く確率は

  $$\frac{1}{30}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{3\cdot 40}$$

  (iii) 甲が 1 回ではずれを引いた後，乙が当たりを引く確率は

  $$\frac{6}{10}\cdot\left(\frac{3}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}\right)=\frac{9}{40}$$

  (iv) 甲が 1 回チャンスくじを引き 2 回目ではずれを引いた後，乙が当たりを引く確率は

  $$\frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{40}$$

  したがって，乙が当たりくじを引く確率は

  $$\frac{3}{40}+\frac{1}{3\cdot 40}+\frac{9}{40}+\frac{1}{40}=\boldsymbol{\frac{1}{3}} \qquad \text{(答)}$$

  である．

【2】(1) $3 \leqq n \leqq 18$ とすると，求める確率 p_n は，白球 15 個と赤球 4 個の計 19 個の球を 1 列に並べるとき

$$\begin{cases} 1\sim(n-1) \text{ 個までのうち 2 個が赤球, } (n-3) \text{ 個が白球} \\ n \text{ 個目が赤球} \\ (n+1)\sim 19 \text{ 個目までのうち 1 個が赤球, } (18-n) \text{ 個が白球} \end{cases}$$

となる確率に等しく，並べ方の数は

$$\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} \cdot 1 \cdot \frac{(19-n)!}{(18-n)!} = \frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{2}$$

である．また，並べ方の総数は

$$\frac{19!}{15!4!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3876$$

であるから

$$p_n = \frac{\frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{2}}{3876} = \boldsymbol{\frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{7752}} \qquad \text{(答)}$$

これは，$n = 1,\ 2,\ 19$ のときも成り立つ．

(2) 最大値を求めるから，$p_n > 0$ となる範囲，すなわち，$3 \leqq n \leqq 18$ のときで考える．

このとき

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\frac{n(n-1)(18-n)}{7752}}{\frac{(n-1)(n-2)(19-n)}{7752}} = \frac{n(18-n)}{(n-2)(19-n)}$$

より，$\dfrac{p_{n+1}}{p_n} > 1$ (ただし，$3 \leqq n \leqq 17$) となる n について調べると

$$\begin{aligned} p_{n+1} > p_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{n(18-n)}{(n-2)(19-n)} > 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad -n^2 + 18n > -n^2 + 21n - 38 \\ &\Longleftrightarrow \quad n < \frac{38}{3} = 12 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} 3 \leqq n \leqq 12 \text{ のとき} & p_n < p_{n+1} \\ 13 \leqq n \leqq 17 \text{ のとき} & p_n > p_{n+1} \end{cases}$$

すなわち

$$0 = p_1 = p_2 < p_3 < \cdots\cdots < p_{12} < p_{13} > p_{14} > p_{15} > \cdots\cdots > p_{18} > p_{19} = 0$$

となり，p_n を最大にする n の値は

$n = \mathbf{13}$ (答)

である．

【3】(1) 題意をみたすパターンは

(i) 第 1 戦，第 2 戦とも A が勝って，A が優勝する．

(ii) 第 1 戦で A，第 2 戦で C，第 3 戦で B が勝ち，第 4 戦で再び A と B が対戦する．

がある．表にすると，次のようになる．

(i)

	第 1 戦	第 2 戦
勝	A	A
負	B	C

(ii)

	第 1 戦	第 2 戦	第 3 戦	第 4 戦	$\cdots\cdots$
勝	A	C	B	A	$\cdots\cdots$
負	B	A	C	B	$\cdots\cdots$

(i) となる確率は

$p \cdot q$

である．

(ii) の第 4 戦以降は，(i) が起こるか，(ii) の第 1 戦〜第 3 戦までが繰り返して現れるから，(ii) となる確率は

$$\left\{p \cdot (1-q) \cdot \frac{1}{2}\right\} \cdot \left\{p \cdot (1-q) \cdot \frac{1}{2}\right\} \cdots\cdots\cdots \left\{p \cdot (1-q) \cdot \frac{1}{2}\right\} \cdot p \cdot q$$

の和である．したがって，求める確率は

$$pq + \left\{\frac{1}{2}p(1-q)\right\} \cdot pq + \left\{\frac{1}{2}p(1-q)\right\}^2 \cdot pq + \cdots\cdots + \left\{\frac{1}{2}p(1-q)\right\}^n \cdot pq + \cdots\cdots$$

$$= pq + \frac{\frac{1}{2}p(1-q)}{1-\frac{1}{2}p(1-q)} \cdot pq$$

$$= pq\left(1 + \frac{p-pq}{pq-p+2}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{2pq}{pq-p+2}} \qquad \text{(答)}$$

<別解>

求める確率を P とすると，(i) となる確率が pq, (ii) となる確率が $p \cdot (1-q) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot P$ と表されるから

$$P = pq + p(1-q) \cdot \frac{1}{2} \cdot P \qquad \therefore \quad P = \boldsymbol{\frac{2pq}{pq-p+2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 題意をみたすパターンは，勝つ高校が順に (BCA)(BCA)$\cdots$(BCA)A となる場合である．(ただし，(BCA) は一回以上) したがって，求める確率は

$$\left\{(1-p) \cdot \frac{1}{2}q\right\} \cdot p + \left\{(1-p) \cdot \frac{1}{2}q\right\}^2 \cdot p + \cdots + \left\{(1-p) \cdot \frac{1}{2}q\right\}^n \cdot p + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}q(1-p)}{1-\frac{1}{2}q(1-p)} \cdot p$$

$$= \boldsymbol{\frac{pq(1-p)}{pq-q+2}} \quad \text{(答)}$$

(3) (i) 第 1 戦で B が勝つ場合

第 2 戦以降は (1) と同じ．よって

$$\frac{1}{2}\frac{2pq}{pq-p+2}$$

(ii) 第 1 戦で C が勝つ場合

第 2 戦以降は (1) で B と C を入れ替えたものと同じだから

$$\frac{1}{2}\frac{2pq}{pq-q+2}$$

よって，求める確率は

$$\frac{pq}{pq-p+2}+\frac{pq}{pq-q+2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{pq(2pq-p-q+4)}{(pq-p+2)(pq-q+2)}} \quad \text{(答)}$$

【4】(1) 出発点を 0 とし，進行方向に向かって，順に点を，1, 2, $\cdots$, m, $\cdots$ とする．このとき，出発点は点 0, n, $2n$, $\cdots$ と名付けられることになる．

m 番目の点を跳び越すのは，$m-1$ 番目の点を踏んだ後，コインに裏が出る場合であるから

$$p_m = (1-p_{m-1})\cdot\frac{1}{2} \quad (m \geqq 1)$$

これは

$$p_m - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_{m-1}-\frac{1}{3}\right)$$

とかけるから，数列 $\left\{p_m-\frac{1}{3}\right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列である．$p_0=0$ だから

$$p_n-\frac{1}{3} = \left(p_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって

$$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

(2) $k-1$ 周目までは出発点を跳び越し，k 周目に初めて出発点を踏むのは

① $n-1$ 番目の点を踏む

②「裏が出て 2 進んだ後 $n-2$ 進む」を $k-2$ 回繰り返す

③ 裏が出て 2 進んだ後 $n-1$ 進む

となる場合であるから

$$q_{n,k} = (1-p_{n-1})\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(1-p_{n-2})\right\}^{k-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-p_{n-1})$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{1}{3}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} q_{n,k} = \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}^{k-2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3^k}}$$

＜(1) の別解＞

m 番目の点を踏む確率を r_m とおく．$m+1$ 番目の点を踏むのは

(i) m 番目の点を踏んだ後コインに表が出る．

(ii) $m-1$ 番目の点を踏んだ後コインに裏が出る．

のいずれかの場合で，これらは互いに排反である．よって

$$r_{m+1} = r_m \cdot \frac{1}{2} + r_{m-1} \cdot \frac{1}{2}$$

これは

$$r_{m+1} - r_m = -\frac{1}{2}(r_m - r_{m-1})$$
$$r_{m+1} + \frac{1}{2}r_m = r_m + \frac{1}{2}r_{m-1}$$

とかくことができるから

$$r_{n+1} - r_n = (r_1 - r_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$r_{n+1} + \frac{1}{2}r_n = r_1 + \frac{1}{2}r_0$$

$r_0 = 1,\ r_1 = \frac{1}{2}$ であるから

$$r_{n+1} - r_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$
$$r_{n+1} + \frac{1}{2}r_n = 1$$

となり

$$r_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

求める確率は $n-1$ の点を踏んでコインに裏が出る場合であるから

$$p_n = r_{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$$

【5】(1) 「白白白」から始めて 3 回の操作の結果,「黒白白」となるのは，左端の板を奇数回，残りの板をそれぞれ偶数回，合計して 3 回裏返した場合である．

求める確率は

(i) 左端を 3 回裏返すとき

(ii) 左端を 1 回，残りの 2 枚のいずれかを 2 回裏返すとき

のいずれかの確率であるから

$$(1 + 2 \cdot {}_3\mathrm{C}_1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{7}{27}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 「白白白」から始めて n 回の操作の結果，両端が白となる確率を p_n，両端が黒となる確率を q_n とする．

$n+1$ 回目の操作の結果，両端が白となるのは

(i) 直前の状態が両端白で，中央を裏返すとき

(ii) 直前の状態が片方だけ黒で，その板を裏返すとき

のいずれかである．

また，$n+1$ 回目の操作の結果，両端が黒となるのは，同様に

(i) 直前の状態が両端黒で，中央を裏返すとき

(ii) 直前の状態が片方だけ白で，その板を裏返すとき

のいずれかである．

したがって

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{1}{3} + (1 - p_n - q_n) \cdot \frac{1}{3} = (1 - q_n) \cdot \frac{1}{3}$$
$$q_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{3} + (1 - p_n - q_n) \cdot \frac{1}{3} = (1 - p_n) \cdot \frac{1}{3}$$

であり，この 2 式の和と差を考えると

$$\begin{cases} p_{n+1} + q_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}\left(p_n + q_n - \dfrac{1}{2}\right) \\ p_{n+1} - q_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(p_n - q_n\right) \end{cases}$$

となる．

数列 $\left\{p_n + q_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_0 + q_0 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + q_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$
$$\therefore \quad p_n + q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots ①$$

数列 $\{p_n - q_n\}$ は，初項 $p_0 - q_0 = 1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots ②$$

求める確率は p_n であるから，(① + ②) ÷ 2 より

$$p_n = \boldsymbol{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}dx \\
&= \int_0^1 x\left(-e^{-x}\right)' dx \\
&= \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= -\frac{1}{e} + \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 \\
&= -\frac{2}{e} + 1
\end{aligned}
$$

$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n\left(-e^{-x}\right)' dx \\
&= \frac{1}{n!}\Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^1 + \frac{n}{n!}\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx \\
&= -\frac{1}{n!e} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx \\
&= -\frac{1}{e\cdot n!} + I_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad I_n = -\frac{1}{e\cdot n!} + I_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

したがって

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\frac{1}{e\cdot n!} + I_{n-1} \\
&= -\frac{1}{e\cdot n!} - \frac{1}{e(n-1)!} + I_{n-2} \\
&= -\frac{1}{e\cdot n!} - \frac{1}{e(n-1)!} - \frac{1}{e(n-2)!} - \cdots - \frac{1}{e\cdot 2!} + I_1 \\
&= -\frac{1}{e}\left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \cdots + \frac{1}{2!}\right) - \frac{2}{e} + 1 \\
&= \boldsymbol{1 - \frac{2}{e} - \frac{1}{e}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【2】(1)　$f(x) = \tan x - \dfrac{4}{\pi}x$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{\pi}$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ で $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ は増加し

$$f'(0) = 1 - \frac{4}{\pi} < 0,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{4}{\pi} > 0$$

だから，この範囲に $f'(x) = 0$ の解 α がただ 1 つ存在し，$f'(x)$ の符号と $f(x)$ の値の増減は，下の表のようになるから，問題の区間で $f(x) < 0$

x	0		α		$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

よって，

$$\tan x < \frac{4}{\pi}x \qquad \text{(証明終)}$$

(2)　$n \geqq 1$ なら，$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$0 < (\tan x)^n < \left(\frac{4}{\pi}x\right)^n$$

となるから

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4^n}{\pi^n} x^n dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4^n}{\pi^n} x^n dx = \frac{4^n}{\pi^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4(n+1)} \qquad \text{(証明終)}$$

(3)

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \qquad \text{(証明終)} \end{aligned}$$

(4)　(3) において，$n = 2k$ の場合を考えると

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2})$$

$$= (I_0 + I_2) - (I_2 + I_4) + (I_4 + I_6) - \cdots\cdots + (-1)^n (I_{2n} + I_{2n+2})$$

$$= I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$$

(2) から

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n+2} = 0$$

だから

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}\qquad \text{(証明終)}$$

【3】(1)

$$\int_0^{\pi}f(\pi-x)|\cos x|dx=C$$

とおくと

$$f(x)=\cos 2x+C$$

だから,

$$f(\pi-x)=\cos 2(\pi-x)+C=\cos 2x+C$$

$$\begin{aligned}C&=\int_0^{\pi}(\cos 2x+C)|\cos x|dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x+C)\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos 2x+C)\cos x dx\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}&(\cos 2x+C)\cos x\\=&(2\cos^2 x-1+C)\cos x\\=&2\cos^3 x+(C-1)\cos x\end{aligned}$$

であり

$$\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$$

だから,

$$\begin{aligned}&(\cos 2x+C)\cos x\\=&\frac{1}{2}(3\cos x+\cos 3x)+(C-1)\cos x\\=&\frac{1}{2}\cos 3x+\left(C+\frac{1}{2}\right)\cos x\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\int(\cos 2x+C)\cos x dx\\=&\int\left\{\frac{1}{2}\cos 3x+\left(C+\frac{1}{2}\right)\cos x\right\}dx\\=&\frac{1}{6}\sin 3x+\left(C+\frac{1}{2}\right)\sin x+C'\end{aligned}$$

なので，① は

$$\begin{aligned}C&=\left[\frac{1}{6}\sin 3x+\left(C+\frac{1}{2}\right)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\frac{1}{6}\sin 3x+\left(C+\frac{1}{2}\right)\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=\left(-\frac{1}{6}+C+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}+C+\frac{1}{2}\right)\\&=2C+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad C=-\frac{2}{3}$$

よって

$$\boldsymbol{f(x)=\cos 2x-\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x-t=u$ とおく．

$dt=-du$，$t:0\to x$ のとき，$u:x\to 0$

$$\therefore \quad \int_0^x f(x-t)e^{-t}dt=-\int_x^0 f(u)e^{u-x}du=e^{-x}\int_0^x f(u)e^u du$$

$$\therefore \quad f(x)=(x^2+1)e^{-x}+e^{-x}\int_0^x f(u)e^u du\cdots\cdots(*)$$

$$f(x)e^x=(x^2+1)+\int_0^x f(u)e^u du$$

$(*)$ の式において，右辺が微分可能であるから，$f(x)$ は微分可能である．したがって，両辺を x で微分すると

$$f'(x)e^x+f(x)e^x=2x+f(x)e^x$$

$$\therefore \quad f'(x)e^x=2x \qquad \therefore \quad f'(x)=2xe^{-x}$$

$$\therefore \quad f(x)=2\int xe^{-x}dx$$

$$=-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx$$

$$=-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$$

与えられた式で，$x=0$ とおけば，$f(0)=1$

一方

$$f(0)=-2+C=1 \qquad \therefore \quad C=3$$

$$\boldsymbol{f(x)=3-2xe^{-x}-2e^{-x}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1)

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2t}{1+t^2}$$

また

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{1+t^2}{2}$$

よって

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t}$$

$$=\log|t|+C$$

$$=\boldsymbol{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x=\frac{\pi}{12}$ と $x=\frac{5}{12}\pi$ の中点は

$$x=\frac{\pi}{4}$$

である．ここで

$$\frac{x+t}{2}=\frac{\pi}{4} \qquad \therefore \quad x=\frac{\pi}{2}-t$$

とおくと

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$$

$$x:\ \frac{\pi}{12}\to\frac{5}{12}\pi \quad \text{で} \quad t:\frac{5}{12}\pi\to\frac{\pi}{12}$$

だから，与式を I とすれば

$$I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{5}{12}\pi}^{\frac{\pi}{12}}\frac{\cos^2 t}{\cos t+\sin t}(-dt)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{dt}{\sin t+\cos t}-I$$

$$\therefore \quad 2I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{dt}{\sin t+\cos t}$$

ここで

$$2I=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5}{12}\pi}\frac{dt}{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

だから，$s=t+\dfrac{\pi}{4}$ とすると

$$t:\ \frac{\pi}{12}\to\frac{5}{12}\pi \quad \text{で} \quad s:\ \frac{\pi}{3}\to\frac{2}{3}\pi$$

より

$$2\sqrt{2}I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{ds}{\sin s}$$

(1) より

$$2\sqrt{2}I=\Big[\log\left|\tan\frac{s}{2}\right|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$=\log\left|\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{\tan\frac{\pi}{6}}\right|$$

$$=\log 3$$

$$\therefore \quad I=\mathbf{\frac{\log 3}{2\sqrt{2}}} \qquad \text{(答)}$$

【5】$x\neq 0$ のとき，積分の平均値の定理より

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x(1+\cos t)^2dt=(1+\cos c)^2$$

$0<c<x$ または $x<c<0$

となる数 c が存在する．

$x\to 0$ のとき $c\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{c\to 0}(1+\cos c)^2=(1+1)^2=\mathbf{4} \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) X が 3 で割り切れないのは，さいころの目が 1，2，4，5 のいずれかだけを n 回出すときであるから

$$1 - p_n = \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

$$\therefore \quad p_n = \mathbf{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) X が 6 で割り切れないのは，X が 2 で割り切れないまたは X が 3 で割り切れないときだから，さいころの目が

(i) 全て 1, 2, 4, 5 のいずれかである確率を $P(A)$

(ii) 全て 1, 3, 5 のいずれかである確率を $P(B)$

(iii) 全て 1, 5 のいずれかである確率を $P(C)$

とすると，X が 6 で割り切れない確率は

$$1 - q_n = P(A) + P(B) - P(C)$$

$$\therefore \quad q_n = 1 - \{P(A) + P(B) - P(C)\}$$

$$= \mathbf{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\boldsymbol{n}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{(答)}$$

１２章－１　整数（１）

問題

【1】 $\boxed{1}$

$p,\ q$ を整数として

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a = b + pn$$

$$c \equiv d \pmod{n} \iff c = d + qn$$

であるから

$$a \pm c = (b + pn) \pm (d + qn) = (b \pm d) + (p \pm q)n$$

より

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$$

〔証明終〕

また

$$ac = (b + pn)(d + qn) = bd + \{(bq + dp) + pqn\}n$$

より

$$ac \equiv bd \pmod{n}$$

〔証明終〕

$\boxed{2}$

$4^2 \equiv 3 \pmod{13}$ なので

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 4^{2n-1} &= 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 4^{2(n-1)} \\ &\equiv 9 \cdot 3^{n-1} + 4 \cdot 3^{n-1} \pmod{13} \\ &\equiv 13 \cdot 3^{n-1} \pmod{13} \\ &\equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

〔証明終〕

【2】 $\boxed{1}$

正整数 $a,\ b$ について次のように記号を定義する：

▼ a が b を割り切るとき，この事実を $a|b$ で表す．$a|b$ で

　a は b の約数である，b は a の倍数である，b は a で割り切られる

などを表すことができる．

▼ a と b の最大公約数を $(a,\ b)$ で表す．例えば

$$(18,\ 30) = 6,\quad (18,\ 28) = 2,\quad (8,\ 27) = 1$$

この最後の例からわかるように，a と b が互いに素であることは

$$(a,\ b) = 1$$

と表される．この記法によって

　正整数 $a,\ b,\ a > b$ について

$$a = bQ + r,\quad 0 \leqq r < b \implies (a,\ b) = (b,\ r)$$

を示すことになる．

証明

$(a,\ b) = G,\ (b,\ r) = g$ とする．

(i) G は g を割り切ること，$G|g$ を示す．

$(a,\ b)=G$ であるから，$\alpha,\ \beta$ を整数として $a=G\alpha,\ b=G\beta$ とおける．このとき，余り r について

$$r=a-bQ=G\alpha-G\beta\cdot Q=G(\alpha-\beta Q) \qquad \therefore\quad G|r$$

仮定より $G|b$ であるから，G は b と r の両方を割り切る．よって G は $(b,\ r)=g$ の約数となり

$$G|g \quad \cdots\cdots①$$

(ii) 同様に $g|G$ を示す．$b=g\alpha_1,\ r=g\beta_1$ (ただし $\alpha_1,\ \beta_1$ は整数) とおけて

$$a=bQ+r=g\alpha_1Q+g\beta_1=g(\alpha_1Q+\beta_1) \qquad \therefore\quad g|a$$

$g|b$ とあわせて，g は a と b の公約数であるから，その最大公約数 $(a,\ b)=G$ の約数となり

$$g|G \quad \cdots\cdots②$$

①，② より $g=\pm G$ を得るが，最大公約数を正の数に限定して考えれば $G=g$ が言える．〔証明終〕

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$221x-101y=1 \quad \cdots\cdots①$$

とする．

$$221=101\cdot2+19$$
$$101=19\cdot5+6$$
$$19=6\cdot3+1$$

より

$$\begin{aligned}1&=19-3\cdot6\\&=19-3\cdot(101-5\cdot19)\\&=16\cdot19-3\cdot101\\&=16\cdot(221-2\cdot101)-3\cdot101\\&=16\cdot221-35\cdot101 \quad \cdots\cdots②\end{aligned}$$

① − ② より

$$221(x-16)=101(y-35)$$

ここで，221 と 101 は互いに素であるから，m を整数として

$$(x-16,\ y-35)=(101m,\ 221m)$$

$\therefore\quad (x,\ y)=(101m+16,\ 221m+35)$

これが ① の整数の組 $(x,\ y)$ の解である．

ここで，① の格子点と原点の距離の 2 乗を $L(m)$ とすると

$$L(m)=x^2+y^2=(101m+16)^2+(221m+35)^2$$

いま

$$L(0)=16^2+35^2$$

$$\begin{aligned}L(\pm1)&=(16\pm101)^2+(35\pm221)^2\\&=16^2+101^2\pm2\cdot16\cdot101+35^2+221^2\pm2\cdot35\cdot221\\&=16^2+35^2+101\cdot(101\pm2\cdot16)+221\cdot(221\pm2\cdot35)\end{aligned}$$

$> 16^2 + 35^2 = L(0)$

したがって，$L(m)$ は 2 次関数であるから

$\cdots\cdots > L(-3) > L(-2) > L(-1) > L(0) < L(1) < L(2) < L(3) < \cdots\cdots$

となるから，$L(0)$ が最小となる．

よって，求める格子点の座標は

(16，35)　(答)

である．

【3】 $\boxed{1}$

$2n^3 - 3n^2 + n = n(n-1)(2n-1)$ $\cdots\cdots\cdots(*)$

より

n, $n-1$ のいずれか一方は偶数である $\cdots\cdots\cdots$①

(i) $n = 3m$ (ただし，m は整数) のとき

$(*)$ は 3 の倍数である．

(ii) $n = 3m+1$ (ただし，m は整数) のとき

$n - 1 = 3m$

より

$(*)$ は 3 の倍数である．

(iii) $n = 3m+2$ (ただし，m は整数) のとき

$2n - 1 = 3(2m+1)$

より

$(*)$ は 3 の倍数である．

(i), (ii), (iii) と ① より，$(*)$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから

$2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数である．　〔証明終〕

＜別解＞

$$\begin{aligned} 2n^3 - 3n^2 + n &= n(n-1)(2n-1) \\ &= n(n-1)\{(n+1)+(n-2)\} \\ &= (n-1)n(n+1) + (n-2)(n-1)n \end{aligned}$$

より，連続する 3 つの整数の積は 6 の倍数であることから

$2n^3 - 3n^2 + n$ は 6 の倍数である．　〔証明終〕

$\boxed{2}$

$p = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

より，p が素数であることから

$a - b = 1$ $\cdots\cdots\cdots$①　または　$a^2 + ab + b^2 = 1$ $\cdots\cdots\cdots$②

ところが，a, b はともに自然数であるから，② とはなりえず，① をみたす．

このとき

$p = 1 \cdot \{(b+1)^2 + (b+1)b + b^2\} = 3b^2 + 3b + 1$

$\therefore\ \ p - 1 = 3b(b+1)$

b, $b+1$ のいずれか一方は偶数であるから

$p - 1$ は 6 の倍数　〔証明終〕

【4】以下，2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\dbinom{n}{r}$ で表す．

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

これにより，2 項定理は次のように書かれる．

$$\begin{aligned}&(a+b)^n\\&=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

また，2 つの整数 a, b について，$a \mid b$ で，「a が b を割り切る」，「b は a で割り切られる」ことを表す．

(1) まず，$k=1, 2, \cdots, p-1$ について，2 項係数 $\dbinom{p}{k}$ は正整数であり

$$\binom{p}{k}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}=p\cdot\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}$$

である．ここで $1, 2, \cdots, k<p$ であり，p が素数であることから，2 つの整数 p と $k!$ は互いに素である．従って，この式の最右辺で p と $k!$ が約されることはありえず，第 2 因子が整数にならなければならない．m を正の整数として，それを

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}=m$$

とおけば

$$\binom{p}{k}=mp \Longleftrightarrow p \mid \binom{p}{k}$$

がいえる．k は 素数 p 未満の任意の正整数であるから，題意が示された．

（証明終）

(2) 左辺の $(a+b)^p$ と右辺の a^p+b^p の差が p の倍数であること，つまり

$$p \mid (a+b)^p-(a^p+b^p)$$

を示す．

2 項定理より

$$\begin{aligned}&(a+b)^n-(a^p+b^p)\\&=a^p+\binom{p}{1}a^{p-1}b+\binom{p}{2}a^{p-2}b^2+\cdots+\binom{p}{k}a^{p-k}b^k\\&\qquad+\cdots+\binom{p}{p-1}ab^{p-1}+b^p-(a^p+b^p)\\&=\binom{p}{1}a^{p-1}b+\binom{p}{2}a^{p-2}b^2+\cdots+\binom{p}{k}a^{p-k}b^k+\cdots+\binom{p}{p-1}ab^{p-1}\end{aligned}$$

を得る．ここで，(1) で示した結果より，係数

$$\binom{p}{1},\ \binom{p}{2},\ \cdots,\ \binom{p}{p-1}$$

はすべて p の倍数であるから，$(a+b)^p-(a^p+b^p)$ は p の倍数となる．つまり

$(a+b)^p \equiv a^p+b^p \pmod{p}$　（証明終）

(3) n に関する帰納法による．

(I) $n=2$ のとき，(2) より成立する．

(II) $n=N$ のときの成立を仮定する：

$$\text{(IH)} \quad (a_1+a_2+\cdots+a_N)^p \equiv a_1^p+a_2^p+\cdots+a_N^p \pmod p$$

以下，$\pmod p$ を固定する．$n=N+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\cdots+a_N+a_{N+1})^p \\
&=\{(a_1+a_2+\cdots+a_N)+a_{N+1}\}^p \\
&\equiv (a_1+a_2+\cdots+a_N)^p+a_{N+1}^p \quad (\because (2)) \\
&\equiv a_1^p+a_2^p+\cdots+a_N^p+a_{N+1}^p \qquad (\because \text{(IH)})
\end{aligned}$$

となり，このときも成立する．

以上より，2 以上の任意の正整数 n について

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p \equiv a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p \pmod p \qquad \text{（証明終）}$$

(4) (3) で得た式で，$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ を代入すると

$$\underbrace{(1+1+\cdots+1)^p}_{n\text{ 個}} \equiv \underbrace{1^p+1^p+\cdots+1^p}_{n\text{ 個}}, \qquad \therefore \quad n^p \equiv n \pmod p \qquad \text{（証明終）}$$

cf. 階差数列を用いた，次のような証明も重要である；

いま，$f(k)=k^p-k$ と定めると

$$\begin{aligned}
f(k+1)-f(k) &= \{(k+1)^p-(k+1)\}-(k^p-k) \\
&=(k+1)^p-(k^p+1) \\
&=k^p+\binom{p}{1}k^{p-1}+\cdots+\binom{p}{p-1}k+1-(k^p+1) \\
&=\binom{p}{1}k^{p-1}+\binom{p}{2}k^{p-2}+\cdots+\binom{p}{p-1}k
\end{aligned}$$

(1) で示したように，ここに現れる 2 項係数はすべて p の倍数であるから

$$p \mid f(k+1)-f(k) \iff f(k+1)-f(k) \equiv 0 \iff f(k+1) \equiv f(k) \pmod p$$

従って，任意の正整数 n について

$$f(n) \equiv f(n-1) \equiv f(n-2) \equiv \cdots \equiv f(2) \equiv f(1) = 0 \pmod p$$

が成り立つから

$$n^p-n \equiv 0, \qquad \therefore \quad n^p \equiv n \pmod p \qquad \text{（証明終）}$$

【5】(1) 2^n 以下の自然数のうち 2^k の倍数であるものの集合を A_k とすると (ただし $k=1, 2, \cdots, n$)，A_k の要素の個数 $\#A_k$ は

$$\#A_k = \frac{2^n}{2^k}$$

2^n 以下の自然数のうち 2^{k+1} の倍数であるものの集合を A_{k+1} とすると (ただし $k+1=1, 2, \cdots, n$)，A_{k+1} の要素の個数 $\#A_{k+1}$ は

$$\#A_{k+1} = \frac{2^n}{2^{k+1}}$$

任意の正整数 n について，$2^{k+1} \mid n$ ならば $2^k \mid n$ であるから，集合の包含関係として

$$A_{k+1} \subset A_k$$

よって求める個数は，$k=1, 2, \cdots, n-1$ のときは

$$\#A_k - \#A_{k+1} = \frac{2^n}{2^k} - \frac{2^n}{2^{k+1}} = 2^{n-k-1}$$

ただし，$k=n$ のときは，$A_{k+1}=\emptyset$ となり，求める個数は $\#A_k=\#A_n=1$.

以上より

$$\begin{cases} k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \text{ のとき，} & \dfrac{2^n}{2^k}-\dfrac{2^n}{2^{k+1}}=\boldsymbol{2^{n-k-1}}\textbf{(個)} \\ k=n \text{ のとき，} & \textbf{1 個} \end{cases}$$

(答)

(2) $N=(2^n)!$ を素因数分解したとき現れる因数 2 の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\cdot 2^{n-k-1}+n=\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{2^n}{2^k}-\frac{2^n}{2^{k+1}}\right)+n$$

$$=1\cdot\left(\frac{2^n}{2^1}-\frac{2^n}{2^2}\right)+2\left(\frac{2^n}{2^2}-\frac{2^n}{2^3}\right)+3\left(\frac{2^n}{2^3}-\frac{2^n}{2^4}\right)+\cdots+(n-1)\left(\frac{2^n}{2^{n-1}}-\frac{2^n}{2^n}\right)+n$$

$$=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^1-(n-1)+n$$

$$=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

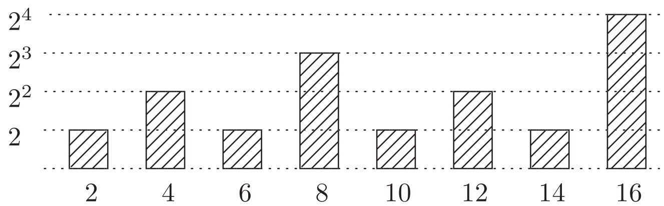
$$=2^n-1$$

従って，$N=(2^n)!$ は 2^{2^n-1} の倍数であるが，2^{2^n} の倍数ではない．　〔**証明終**〕

cf.　一般に, n を正整数として, $n!$ の素因数分解は重要である．いま例として, $N=\left(2^4\right)!$ の素因数分解における 2 のべき (累乗の指数) を考えてみよう．

本問の誘導に乗れば，上のような解法になるが，値を求めるだけならば，次のように考えるべきである．図 1 を見られたい．

図 1　$N=\left(2^4\right)!$ の分解



16 以下の，2 の倍数を並べて，それぞれを素因数分解したときに，2 で割れる回数を考える．

素因数分解したときに 2^k が現れるならば，2 でちょうど k 回割ることができ，またその逆もなりたつことを考えると，$N=16!$ の素因数分解に現れる 2 のべきは，図 1 の斜線を引かれた正方形の個数に一致することを意味する．

本問の (1) から (2) へという流れは，この個数を

いくつの正方形からなる長方形が，いくつあるか

と考えてその和を求めることであった．そのせいで,「2^k の倍数ではあるが，2^{k+1} の倍数ではないもの」の個数，つまり『高さが k の長方形の個数』を求めることになったわけである．

考え方を変えて，

少なくても j 回，2 で割り切れるものは N 以下に何個あるか

に着目すると，図 1 で

▼ 下から 1 段目には何個の正方形があるか?

▼ 下から 2 段目には何個の正方形があるか?

▼ $\cdots$

として数えることにすれば

$$\left\lfloor \frac{16}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{16}{2^4} \right\rfloor = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

となる．ここで実数 a について $\lfloor a \rfloor$ は，a を超えない最大の整数を表す.

この線で本問を解きなおしてみよ.

問題

【1】l が y 軸と平行でないとき

$$l : y = m(x-a)$$

とおけて，楕円の方程式と連立すると

$$x^2 + 4m^2(x-a)^2 = 4$$

$$\therefore\quad (4m^2+1)x^2 - 8m^2ax + 4m^2a^2 - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$，$\mathrm{M}(X, Y)$ とおくと，①の 2 解が x_1, x_2 だから

$$X = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4m^2a}{4m^2+1} \cdots\cdots\cdots ②$$

また, $Y = m(X-a) \cdots\cdots ③$

ここで，軌跡の方程式は，②かつ③をみたす実数 m が存在するための条件として得られる．

(i) $X = a$ のとき，②は $1 = \dfrac{4m^2}{4m^2+1}$ で，これをみたす実数 m は存在しない．

(ii) $X \fallingdotseq a$ のとき，③により，$m = \dfrac{Y}{X-a}$ これを②，すなわち $4(X-a)m^2 + X = 0$ に代入したものが m の存在条件で

$$\frac{4Y^2}{X-a} + X = 0 \qquad\qquad \therefore\quad 4Y^2 + X(X-a) = 0$$

よって

$$\left(X - \frac{a}{2}\right)^2 + (2Y)^2 = \frac{a^2}{4}(\text{ただし，点 } (a, 0) \text{ を除く})$$

また，l が y 軸と平行なとき，$l : x = a$ であり，題意の楕円は x 軸対称だから，$\mathrm{M}(a, 0)$ となる．

ゆえに，求める軌跡は

楕円： $\boldsymbol{\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + (2y)^2 = \dfrac{a^2}{4}}$　　(答)

【2】(1) 点 P における接線 l_1 の方程式は

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

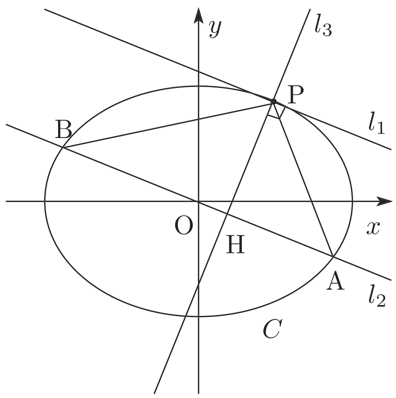
なので, l_2 の方程式は

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 0 \iff y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x$$

これを C の方程式に代入すると

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x\right)^2 = 1$$

$$\iff \frac{\dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2}}{\dfrac{a^2}{b^2}{y_0}^2}x^2 = 1$$



となるが, P は C 上の点であるから

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1 \qquad \therefore \quad x^2=\frac{a^2}{b^2}{y_0}^2$$

よって, $x=\pm\frac{a}{b}y_0$ となるので, A の x 座標が正であることから

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\frac{a}{b}y_0,\ -\frac{b}{a}x_0}\right),\quad \mathbf{B}\left(\boldsymbol{-\frac{a}{b}y_0,\ \frac{b}{a}x_0}\right) \qquad (答)$$

(2) $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \perp l_3$ より

$l_2 \perp l_3$

なので, PH の長さは点 P と直線 l_2 の距離に他ならない. よって

$$\mathrm{PH}=\frac{\left|\frac{x_0}{a^2}x_0+\frac{y_0}{b^2}y_0\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{\frac{x_0}{a^2}}\right)^{\mathbf{2}}+\left(\boldsymbol{\frac{y_0}{b^2}}\right)^{\mathbf{2}}}} \qquad (答)$$

(3)

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(\frac{2a}{b}y_0\right)^2+\left(\frac{2b}{a}x_0\right)^2}=\sqrt{(2ab)^2\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right\}}$$

$$=2ab\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$$

であるから

$$\triangle\,\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PH}=\boldsymbol{ab} \qquad (答)$$

【3】 $C: y^2=2x$ 上の 2 接点

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$

における接線の方程式は

$y_1y=x+x_1$, $y_2y=x+x_2$

と表せる.

そして, これらがともに $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るから

$y_1q=p+x_1$, $y_2q=p+x_2$

が成り立つが, これは点 A, B がともに直線 $qy=x+p$ 上にあることを表す.

よって, 直線 AB の方程式は

$qy=x+p$

である.

そして, 題意よりこの直線と原点との距離が 1 だから

$$\frac{|p|}{\sqrt{q^2+1}}=1 \qquad \therefore \quad p^2-q^2=1$$

これより P は双曲線

$x^2-y^2=1$ ………①

上にある.

ここで, P から C に 2 本の接線を引くことができる条件を考える.

C 上の接点の y 座標を t とすると, 点 $\left(\frac{t^2}{2},\ t\right)$ における C の接線の方程式は

$$x-\frac{t^2}{2}=t(y-t)$$

と表せ，これが $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るから

$$p-\frac{t^2}{2}=t(q-t) \qquad \therefore \quad t^2-2qt+2p=0 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

これが，異なる 2 実数解をもてば，P から C に 2 本の接線を引くことができるから，② の判別式 D を考えて

$$\frac{D}{4}=q^2-2p>0 \qquad \therefore \quad q^2>2p$$

これと ① をあわせて P は

双曲線 $x^2-y^2=1$ の $y^2>2x$ をみたす部分　(答)

にある．

【4】 (i) $X=\pm 2$ のとき, P で直交する 2 本の接線の方程式は

$$x=\pm 2, \quad y=\pm 1 \quad (\text{複号任意})$$

であるから

$$\mathrm{P}(\pm 2,\ \pm 1) \quad (\text{複号任意})$$

(ii) $X \fallingdotseq \pm 2$ のとき, P を通る接線の方程式は

$$y=m(x-X)+Y \ \cdots\cdots\cdots ①$$

とおくことができる. ①と楕円の方程式

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

より y を消去すると

$$x^2+4\{mx-(mX-Y)\}^2=4$$

よって

$$(1+4m^2)x^2-8m(mX-Y)x+4\{(mX-Y)^2-1\}=0$$

①と ②が接するための条件は, 判別式を D とおくと

$$\frac{D}{4}=16m^2(mX-Y)^2-4(1+4m^2)\{(mX-Y)^2-1\}$$

$$=4(1+4m^2)-4(mX-Y)^2 \ = \ 0$$

m で整理して

$$(4-X^2)m^2+2XYm+1-Y^2=0$$

この m の 2 次方程式の 2 解 m_1, m_2 が, P を通る 2 本の接線の傾きを与えるから, 両者が直交することより

$$m_1m_2=\frac{1-Y^2}{4-X^2}=-1 \qquad \therefore \quad X^2+Y^2=5$$

(i), (ii) より, 求める軌跡は

円 $x^2+y^2=5$　(答)

添削課題

【1】(1) 円 C に外接し，直線 l に接する円を P とし，中心 P を $(x,\ y)$，半径を r とする．

円 P は円 C に外接するから

$$r+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{x^2+y^2}\cdots①$$

円 P は l にも接するから，中心 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は直線 l より上方にあり，$x+y+3>0$ を満たし

$$r=\frac{x+y+3}{\sqrt{2}}\cdots②$$

①，②から r を消去して　　$x+y+4=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$

両辺を平方して整理すると，求める軌跡の方程式は

$\boldsymbol{x^2+y^2-2xy-8x-8y-16=0}$　　(答)

(2) P から l に引いた垂線の延長上で $\mathrm{PH}=r+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる点 H をとる．

点 H を通り直線 l に平行な直線を $m: x+y+4=0$ とすると，$\mathrm{PH}=\mathrm{PO}$ より，(1) の軌跡は，O を焦点とし，m を準線とする放物線である．

よって，準線の方程式は $\boldsymbol{x+y+4=0}$, 焦点の座標は $\boldsymbol{(0,\ 0)}$　　(答)

１３章－１　整数（２）

問題

【1】(1) 与式を x の 2 次方程式

$$x^2+6yx+17y^2-12=0$$

とみると，その判別式が正であるから

$$12-8y^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad y=0,\ \pm 1$$

(i) $y=0$ のとき

$x^2=12$ をみたす整数 x は存在しない.

(ii) $y=1$ のとき

$$x^2+6x+5=0 \qquad \therefore \quad (x+1)(x+5)=0 \qquad \therefore \quad x=-1,\ -5$$

(iii) $y=-1$ のとき

$$x^2-6x+5=0 \qquad \therefore \quad (x-1)(x-5)=0 \qquad \therefore \quad x=1,\ 5$$

したがって

$(x,\ y)=\mathbf{(-1,\ 1),\ (-5,\ 1),\ (1,\ -1),\ (5,\ -1)}$　　(答)

(2) 2 次方程式 $x^2+(m+1)x+2m-1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(m+1) \cdots\cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=2m-1 \end{cases}$$

これより，m を消去すると

$$\alpha\beta=2\{-(1+\alpha+\beta)\}-1 \iff \alpha\beta+2\alpha+2\beta+3=0$$
$$\iff (\alpha+2)(\beta+2)=1$$

ここで，①より $\alpha,\ \beta$ はともに整数であるから

$$(\alpha+2,\ \beta+2)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

$\therefore \quad (\alpha,\ \beta)=(-1,\ -1),\ (-3,\ -3)$

したがって

$m=-(1+\alpha+\beta)=\mathbf{1,\ 5}$　　(答)

＜別解＞

この 2 次方程式が整数解をもつので，判別式より

$$(m+1)^2-4(2m-1)=m^2-6m+5=(m-3)^2-4 \geqq 0$$

このもとで，解の公式より

$$x=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{(m-3)^2-4}}{2}$$

ここで，x が整数となるためには

$(m-3)^2-4=l^2$　(l は整数)

となることが必要条件であり

$$(m-3)^2-l^2=4 \iff (m-3+l)(m-3-l)=4$$

したがって

$$(m-3+l,\ m-3-l)=(\pm 1,\ \pm 4),\ (\pm 2,\ \pm 2),\ (\pm 4,\ \pm 1)$$

$m,\ l$ がともに整数となるのは

$$(m,\ l)=(5,\ 0),\ (1,\ 0)$$

のときであり，それぞれ

$$x=\frac{-6\pm 0}{2}=-3, \quad x=\frac{-2\pm 0}{2}=-1$$

と確かに整数解をもつ．

よって

$m = \mathbf{1,\ 5}$　　(答)

である．

【2】(1) 有理数を $\alpha = \dfrac{q}{p}$ (ただし，p と q は互いに素である整数で，かつ，$p > 0$) とすると，

$f(\alpha) = 0$ をみたすことから

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3 + a\left(\frac{q}{p}\right)^2 + b\cdot\frac{q}{p} + c = 0$$

$$\iff \quad q^3 + apq^2 + bp^2q + cp^3 = 0$$

$$\iff \quad q^3 = -(aq^2 + bpq + cp^2)p$$

ここで，p と q は互いに素であることから

$p = 1$

である．

よって，α は整数である．　〔証明終〕

(2) $f(x) = 0$ が有理数解 α をもつとすると，(1) より，α は整数である．

よって

$\alpha \equiv r \pmod{k}$

となる整数 r (ただし，$1 \leqq r \leqq k$) が存在する．

ゆえに，(1) より

$f(r) \equiv f(\alpha) = 0 \pmod{k}$

となり仮定に反する．

したがって，題意は示された．　〔証明終〕

＜別解＞

示すべき命題の対偶をとって

$k \geqq 2$ のとき, 方程式 $f(x) = 0$ が有理数解をもつならば, $f(1),\ f(2),\ \cdots\cdots,\ f(k)$ のうち少なくとも 1 つは k で割り切れる

ことを示す．

(1) より，$f(x) = 0$ が有理数解 $x = \alpha$ をもつならば，α は必ず整数解となる．

このとき

$f(\alpha) = \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \quad \iff \quad c = -\alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha$

より

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - \alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha$

となる．

ここで，$1 \leqq m \leqq k$ である整数 m に対して，$f(m)$ は

$$\begin{aligned} f(m) &= m^3 + am^2 + bm - \alpha^3 - a\alpha^2 - b\alpha \\ &= (m^3 - \alpha^3) + a(m^2 - \alpha^2) + b(m - \alpha) \\ &= (m - \alpha)\{(m^2 + m\alpha + \alpha^2) + a(m + \alpha) + b\} \end{aligned}$$

と整数の積の形で表される．

いま，$m-\alpha$ に $m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ k$ を代入すると

$1-\alpha,\ 2-\alpha,\ 3-\alpha,\ \cdots\cdots,\ k-\alpha$

と k 個の連続する整数であり，この k 個の連続する整数の中には，必ず 1 つ k の倍数が含まれる．

したがって

$f(1),\ f(2),\ \cdots\cdots,\ f(k)$ の中に少なくとも 1 つ k の倍数が含まれる．

対偶が成立することが示されたので，題意は示された．〔証明終〕

【3】(1) b_{n+2} は $b_{n+1}+b_n$ を 3 で割った余りに等しいから

$\boldsymbol{b_0=1,\ b_1=2,\ b_2=0,\ b_3=2,\ b_4=2,\ b_5=1,\ b_6=0,\ b_7=1,}$
$\boldsymbol{b_8=1,\ b_9=2}$

(2) (1) より，数列 b_n は

$1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1$

を繰り返す周期 8 の数列である．よって

$b_{n+8}=b_n$

となるから

$$\begin{aligned}c_{n+8}&=(b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+b_7)+(b_8+b_9+\cdots+b_{n+8})\\&=c_7+(b_0+b_1+\cdots+b_n)\\&=c_n+c_7\end{aligned}$$

〔証明終〕

(3) まず，$r=0,\ 1,\ \cdots,\ 7$ に対して

$r+1\leqq c_r\leqq\dfrac{3}{2}(r+1)\ \cdots\cdots\cdots$ ①

の成立を示す．

$1\leqq c_0=1\leqq\dfrac{3}{2},\ 2\leqq c_1=3\leqq 3,\ 3\leqq c_2=3\leqq\dfrac{9}{2},\ 4\leqq c_3=5\leqq 6,$

$5\leqq c_4=7\leqq\dfrac{15}{2},\ 6\leqq c_5=8\leqq 9,\ 7\leqq c_6=8\leqq\dfrac{21}{2},\ 8\leqq c_7=9\leqq 12$

より，① は成立する．

次に n を 8 で割った商を k とし，余りを r，すなわち

$n=8k+r$

とおく．すると，(2) より

$c_{n+8}-c_n=c_7=9$

だから

$c_{8k+r}=c_{8(k-1)+r}+9=c_{8(k-2)+r}+2\cdot 9=\cdots=c_r+9k$

よって，① を用いると

$c_{8k+r}\geqq 9k+r+1\geqq(8k+r)+1\ (k\geqq 0)\qquad\therefore\quad c_n\geqq n+1$

また，① を用いると

$$\begin{aligned}c_{8k+r}&\leqq 9k+\frac{3}{2}(r+1)\leqq 12k+\frac{3}{2}(r+1)\ (k\geqq 0)\\&=\frac{3}{2}\{(8k+r)+1\}\qquad\therefore\quad c_n\leqq\frac{3}{2}(n+1)\end{aligned}$$

よって，題意は示された．〔証明終〕

【4】(1) $C(nx)=C(ny)$ より整数 nx，ny の下 2 桁が等しいので

$$nx-ny=n(x-y)=100k$$

をみたす整数 k がある．

条件より，n は $100\ (=2^2\cdot 5^2)$ と互いに素より，$x-y$ が 100 の倍数である．

すなわち x と y の下 2 桁は等しい．よって

$$C(x)=C(y)$$

〔証明終〕

(2) (1) より

「$C(nx)=C(ny)$ ならば $C(x)=C(y)$」

この対偶は

「$C(x)\fallingdotseq C(y)$ ならば $C(nx)\fallingdotseq C(ny)$」

$0\leqq i<j\leqq 99$ の任意の整数 i，j に対し

「$C(i)\fallingdotseq C(j)$ ならば $C(ni)\fallingdotseq C(nj)$」

したがって，$C(nx)$ の値は 0 から 99 の 100 個の異なる値をとる．

よって，$C(nx)=1$ をみたす x が存在する．〔証明終〕

問題

【1】焦点の座標は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$ である．

$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると，l は

$$x_0x - y_0y = 1$$

と表せる．

これより l と x 軸の交点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{x_0},\ 0\right)$$

と表せる．

ここで，$|x_0| \geqq 1$ より，$-1 \leqq \dfrac{1}{x_0} \leqq 1$ だから，Q は線分 FF' 上にある．

$\triangle\, \mathrm{FF'P}$ において

$$\angle\mathrm{FPQ} = \angle\mathrm{F'PQ} \Longleftrightarrow \mathrm{QF} : \mathrm{QF}' = \mathrm{PF} : \mathrm{PF}'$$

だから

$$\mathrm{QF} : \mathrm{QF}' = \mathrm{PF} : \mathrm{PF}' \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

であることを示せばよい．

ここで

$$\mathrm{QF} = \left|\sqrt{2} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}x_0 - 1}{x_0}\right|$$

$$\mathrm{QF}' = \left|\sqrt{2} + \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}x_0 + 1}{x_0}\right|$$

であり

$$\mathrm{PF} = \sqrt{(x_0 - \sqrt{2})^2 + (x_0^2 - 1)} = \sqrt{2x_0^2 - 2\sqrt{2}x_0 + 1} = \left|\sqrt{2}x_0 - 1\right|$$

同様にして

$$\mathrm{PF}' = \left|\sqrt{2}x_0 + 1\right|$$

よって，① が成り立つから，題意は示された．　〔証明終〕

【2】点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における双曲線の接線の方程式は

$$\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1$$

である．いま, この接線と 2 つの漸近線

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

との交点の座標は

$$(aq,\ bq),\quad (ar,\ -br)$$

とおけるから, これを接線の方程式に代入すると

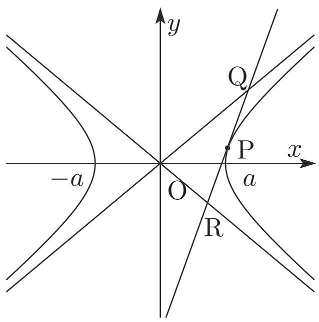
$$\frac{x_0}{a}q - \frac{y_0}{b}q = 1,\quad \frac{x_0}{a}r + \frac{y_0}{b}r = 1$$

となる．辺々かけると

$$\left(\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2}\right)qr = 1$$

であり

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$$



より

$qr=1$

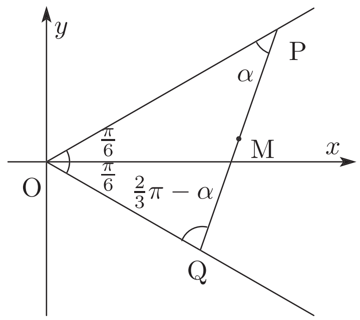
よって

$S=\dfrac{1}{2}\left|-aqbr-bqar\right|=\left|abqr\right|=ab$

したがって, S は P の位置に関係なく a, b の値によって定まる. 〔証明終〕

【3】(1) $\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ となるので

$\angle\mathrm{PQO}=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\alpha=\dfrac{2}{3}\pi-\alpha$



よって, $0<\alpha<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき $\triangle$ OPQ に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OP}}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)}=\frac{\mathrm{OQ}}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$$

となるので

$$\mathrm{OP}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)},\quad \mathrm{OQ}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha} \qquad \text{(答)}$$

また

$\alpha=0$ のとき, $\mathrm{OP}=1,\ \mathrm{OQ}=0$

$\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき, $\mathrm{OP}=0,\ \mathrm{OQ}=1$

となるので, 上式は $\alpha=0,\ \dfrac{2}{3}\pi$ のときを含めて成り立つ.

(2) (1) の結果より, $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とおくと

$$x_1=\mathrm{OP}\cos\frac{\pi}{6}=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right),\quad y_1=\mathrm{OP}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)$$

$$x_2=\mathrm{OQ}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha,\quad y_2=\mathrm{OQ}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha$$

よって, PQ の中点 M の座標を $(X,\ Y)$ とおけば

$$X=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\sin\alpha\right\}$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

$$Y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)-\sin\alpha\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

となるので

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}X\right)^2+(2\sqrt{3}Y)^2=1$$

ただし, $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $-\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{\pi}{3} - \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3}$ なので, M は楕円

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = 1}$$

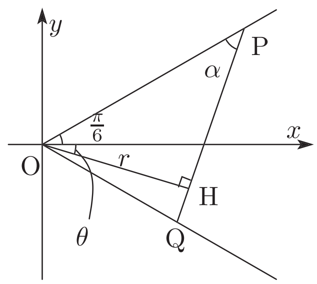
の　(答)

$$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{4} \leqq y \leqq \frac{1}{4}}$$

の範囲を動く.

(3) $\triangle$ OPQ の面積に注目すると

$$\frac{1}{2}\mathrm{PQ} \cdot \mathrm{OH} = \frac{1}{2}\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} \sin \angle\mathrm{POQ}$$



が成り立つので

$$1 \cdot r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} r &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) \sin\alpha \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{\cos\frac{2}{3}\pi - \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2\alpha\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{2}{3}\pi - 2\alpha\right)\right\} \end{aligned}$$

そして, $\angle\mathrm{POH} = \dfrac{\pi}{6} - \theta$ であるから

$$\frac{\pi}{6} - \theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad \alpha = \theta + \frac{\pi}{3}$$

したがって, 求める極方程式は

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} + \cos\left\{\frac{2}{3}\pi - 2\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right\}\right] \iff \boldsymbol{r = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)}$$ (答)

【4】

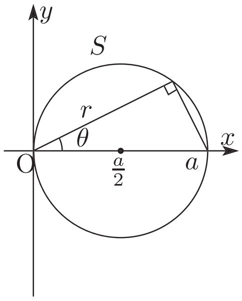


図 1

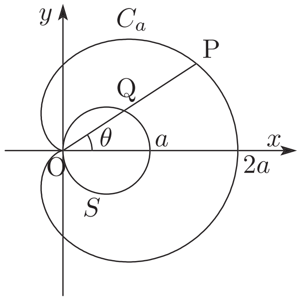


図 2

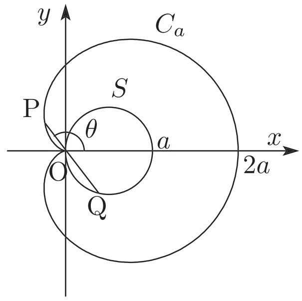


図 3

(1) 図 1 より

$$\boldsymbol{r = a\cos\theta} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ とおく．ただし，$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ より

$$-\pi < \theta < \pi$$

で考える．

(i) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\mathrm{OP} = r = a(1+\cos\theta), \quad \mathrm{OQ} = a\cos\theta$$

なので

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \mathrm{OP} - \mathrm{OQ}\\ &= a(1+\cos\theta) - a\cos\theta \ = \ a\end{aligned}$$

(ii) $-\pi < \theta < -\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$$\mathrm{OP} = r = a(1+\cos\theta), \quad \mathrm{OQ} = a\cos(\theta+\pi) = -a\cos\theta$$

なので

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} &= \mathrm{OP} + \mathrm{OQ}\\ &= a(1+\cos\theta) - a\cos\theta \ = \ a\end{aligned}$$

となり，いずれの場合も

$\mathrm{PQ} = a$ （一定）　〔証明終〕

(3) $\mathrm{P}(r,\ \theta)\ (-\pi < \theta \leqq \pi)$, $\mathrm{A}(2a,\ 0)$ とおく．$\theta \neq 0,\ \pi$ のとき，$\triangle\,\mathrm{OAP}$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OP}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cos|\theta|\\ &= 4a^2 + r^2 - 2\cdot 2a\cdot r\cos\theta\\ &= 4a^2 + a^2(1+\cos\theta)^2 - 4a^2(1+\cos\theta)\cos\theta\\ &= a^2(-3\cos^2\theta - 2\cos\theta + 5)\\ &= a^2\left\{-3\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}\right\}\end{aligned}$$

そして

$$\theta = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{AP}^2 = 0, \quad \theta = \pi \ \Rightarrow\ \mathrm{AP}^2 = 4a^2$$

なので，上式は $\theta = 0,\ \pi$ のときを含めて成り立つ．したがって，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，AP の最大値は

$$\sqrt{\frac{16}{3}}a = \boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{3}}a} \qquad \text{(答)}$$

【5】図のように角度 θ をとると

$$\mathrm{OQ}=2a\cos\theta+a$$

と表せる．よって，求める面積は

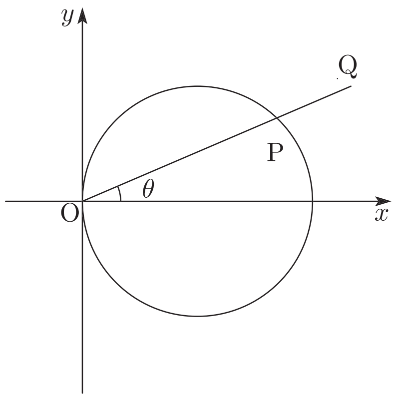
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\mathrm{OQ}^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta+1)^2d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2\theta+4\cos\theta+1)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{2(\cos 2\theta+1)+4\cos\theta+1\}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\Big[\sin 2\theta+4\sin\theta+3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\boldsymbol{\left(2+\frac{3}{4}\pi\right)a^2}\qquad(答)$$



M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学ⅠＡⅡＢ

東大理系数学Ⅲ

東大理系数学

難関大理系数学Ｔ

Z-KAI

会員番号		氏　名	