3MJSS/3MJS/3MJ

本科１期７月度

解答

Ｚ会東大進学教室

中３選抜東大・医学部数学

中３数学

中３東大数学

１１章　集合と論理（１）ー集合ー

問題

【1】(1) $\boldsymbol{7 \notin A}$　(2) $\boldsymbol{17 \in A}$　(3) $\boldsymbol{24 \in A}$

(4) $\boldsymbol{27 \notin A}$　(5) $\boldsymbol{3 \in A}$　(6) $\boldsymbol{52 \notin A}$

【2】(1) $\boldsymbol{P = \{2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots\}}$

$\boldsymbol{P = \{3x + 2 \mid x}$ **は整数,** $\boldsymbol{x \geqq 0\}}$

(2) $\boldsymbol{Q}$ **は書けない**

$\boldsymbol{Q = \{x \mid 3 \leqq x \leqq 5\}}$

(3) $\boldsymbol{R = \{-1,\ 3\}}$

$\boldsymbol{R = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}}$

【3】(1) $\boldsymbol{\{4,\ 7,\ 10\}}$

(2) $\boldsymbol{\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}}$

(3) $\boldsymbol{\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)\}}$

【4】$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$, $C = \{2,\ 6,\ 10\}$,
$D = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16\}$ より

(1) $\boldsymbol{A}$ **と** $\boldsymbol{B}$ **に包含関係はない**　(2) $\boldsymbol{C \subset B}$

(3) $\boldsymbol{C \subset D}$　(4) $\boldsymbol{B = D}$

【5】(1)

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18\}$$
$$B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$

よって, $\boldsymbol{A \subset B}$

(2)

$$A = \{1,\ 2\}$$
$$B = \{1,\ 2,\ 4\}$$

よって, $\boldsymbol{A \subset B}$

(3)

$$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15\}$$
$$B = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$$

よって, $\boldsymbol{B \subset A}$

【6】(1) $A\cap B=\mathbf{\{2,\ 4,\ 8,\ 12\}}$

(2) $A\cup B=\mathbf{\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}}$

(3) $A\cap B\cap C=\mathbf{\{4,\ 8,\ 12\}}$

(4) $A\cup B\cup C$

$=\mathbf{\{1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 16\}}$

(5) $B\cup C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 16\}$ なので,

$$A\cap(B\cup C)=\mathbf{\{2,\ 4,\ 8,\ 12\}}$$

(6) $B\cap C=\{4, 8, 12\}$ なので,

$$A\cup(B\cap C)=\mathbf{\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 12\}}$$

【7】(1) $A\cap B=\boldsymbol{\{x\mid 6<x<8\}}$

(2) $A\cup B=\boldsymbol{\{x\mid x>3\}}$

(3) $A\cap B\cap C=\boldsymbol{\{x\mid 6<x<7\}}$

(4) $A\cup B\cup C=\boldsymbol{\{x\mid x>1\}}$

(5) $B\cup C=\{x\mid x>1\}$ なので,

$$A\cap(B\cup C)=\boldsymbol{\{x\mid 3<x<8\}}$$

(6) $B\cap C=\{x\mid 6<x<7\}$ なので,

$$A\cup(B\cap C)=\boldsymbol{\{x\mid 3<x<8\}}$$

【8】(1) $\overline{A}=\mathbf{\{2,\ 4,\ 6\}}$

(2) $\overline{B}=\mathbf{\{1,\ 6\}}$

(3) $A\cap\overline{B}=\mathbf{\{1\}}$

(4) $\overline{A}\cup B=\mathbf{\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}}$

【9】(1) $A\cap B=$ **{ 男子生徒でバス通学者 }**

(2) $A\cup B=$ **{ 男子生徒かバス通学者 }**

(3) $\overline{A}=$ **{ 女子生徒 }**

(4) $\overline{B}=$ **{ 徒歩の通学者 }**

(5) $A\cap\overline{B}$

$=$ **{ 男子生徒で徒歩通学の生徒 }**

(6) $\overline{A}\cap B=$ **{ 女子生徒でバス通学者 }**

(7) $\overline{A}\cup B=$ **{ 女子生徒かバス通学者 }**

(8) $A\cup\overline{B}$

$=$ **{ 男子生徒か徒歩通学の生徒 }**

【10】

$$x^2-x-6<0 \qquad\qquad x^2-3x-4 \geqq 0$$
$$(x+2)(x-3)<0 \qquad\qquad (x+1)(x-4) \geqq 0$$
$$\therefore\ -2<x<3 \qquad\qquad \therefore\ x \leqq -1,\ 4 \leqq x$$

よって，

$$A=\{x \mid x^2-x-6<0\} = \{x \mid -2<x<3\} \qquad B=\{x \mid x^2-3x-4 \geqq 0\} = \{x \mid x \leqq -1,\ 4 \leqq x\}$$

より，

$$\overline{A}=\{x \mid x \leqq -2,\ 3 \leqq x\} \qquad \overline{B}=\{x \mid -1<x<4\}$$
$$A \cap B=\{x \mid -2<x \leqq -1\} \qquad A \cup B=\{x \mid x<3,\ x \geqq 4\}$$

なので，

$$\overline{A \cap B}=\{x \mid x \leqq -2,\ x>-1\} \qquad \overline{A \cup B}=\{x \mid 3 \leqq x<4\}$$
$$\overline{A} \cap \overline{B}=\{x \mid 3 \leqq x<4\} \qquad \overline{A} \cup \overline{B}=\{x \mid x \leqq -2,\ x>-1\}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}}$$
$$\boldsymbol{\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}}$$

【11】(1) $\boldsymbol{A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9\}}$ (2) $\boldsymbol{A \cap B=\{1,\ 6\}}$

(3) $\overline{A}=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\}$,
$\overline{B}=\{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$ より，
$$\boldsymbol{\overline{A} \cap \overline{B}=\{5,\ 7\}}$$

(4) $\boldsymbol{\overline{A} \cup \overline{B}=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}}$

【12】(1)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{B}\right) &= n(U) - n(B) \\ &= 200 - 22 \\ &= \mathbf{178} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 33 + 22 - 44 \\ &= \mathbf{11} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) &= n\left(\overline{A \cap B}\right) \\ &= n(U) - n(A \cap B) \\ &= 200 - 11 \\ &= \mathbf{189} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) &= n\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 200 - 44 \\ &= \mathbf{156} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A \cup \overline{B}}\right) &= n\left(\overline{A} \cap \overline{\overline{B}}\right) \\ &= n\left(\overline{A} \cap B\right) \\ &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 22 - 11 \\ &= \mathbf{11} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{\overline{A} \cap B}\right) &= n\left(\overline{\overline{A}} \cup \overline{B}\right) \\ &= n\left(A \cup \overline{B}\right) \\ &= n(U) - n(\overline{A} \cap B) \\ &= 200 - 11 \\ &= \mathbf{189} \end{aligned}$$

【13】(1) 問題 I が解けた人を A, 問題 II が解けた人を B, クラス全体を U とすると,

$$n(U)=50,\ n(A)=38,\ n(B)=25,\ n(A\cap B)=20$$

より,

$$\begin{aligned} n(A\cup B) &= n(A)+n(B)-n(A\cap B) \\ &= 38+25-20 \\ &= \mathbf{43\ (人)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A\cup B}\right) &= n(U)-n(A\cup B) \\ &= 50-43 \\ &= \mathbf{7\ (人)} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} n\left(\overline{A}\cap B\right)+n(A\cap\overline{B}) &= n(B)-n(A\cap B)+n(A)-n(A\cap B) \\ &= 25-20+38-20 \\ &= \mathbf{23\ (人)} \end{aligned}$$

【14】(1) $50 \div 2 = 25$ より，$n(A) = \mathbf{25}$

$50 \div 3 = 16 \cdots 2$ より，$n(B) = \mathbf{16}$

$50 \div 5 = 10$ より，$n(C) = \mathbf{10}$

(2) $50 \div 6 = 8 \cdots 2$ より，$n(A \cap B) = \mathbf{8}$

$50 \div 15 = 3 \cdots 5$ より，$n(B \cap C) = \mathbf{3}$

$50 \div 10 = 5$ より，$n(C \cap A) = \mathbf{5}$

(3) $50 \div 30 = 1 \cdots 20$ より，$n(A \cap B \cap C) = \mathbf{1}$

(4)
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\qquad - n(B \cap C) - n(C \cap A) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

より，

$$n(A \cup B \cup C) = 25 + 16 + 10 - 3 - 5 - 8 + 1 = \mathbf{36}$$

【15】
$$\begin{aligned} &n(A) = 84,\ n(B) = 60,\ n(C) = 45,\ n(U) = 120 \\ &n(A \cap B) = 46,\ n(B \cap C) = 28,\ n(C \cap A) = 36 \\ &n(A \cap B \cap C) = 20 \end{aligned}$$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
より，

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= 84 + 60 + 45 - 46 - 28 - 36 + 20 \\ &= 209 - 110 \\ &= 99 \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} n(U) - n(A \cup B \cup C) &= 120 - 99 \\ &= \mathbf{21\ (人)} \end{aligned}$$

【16】(1) $\boldsymbol{\phi}$, $\{\mathbf{2}\}$, $\{\mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{6}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{6}\}$, $\{\mathbf{4},\ \mathbf{6}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{6}\}$

(2) $\boldsymbol{\phi}$, $\{\boldsymbol{a}\}$, $\{\boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$, $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$, $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$

(3) $\boldsymbol{\phi}$, $\{\mathbf{1}\}$, $\{\mathbf{2}\}$, $\{\mathbf{3}\}$, $\{\mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{3}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{3},\ \mathbf{4}\}$
$\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}\}$

(4) $A=\{x \mid x$ は 10 の約数 $\}=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$ なので,
$\boldsymbol{\phi}$, $\{\mathbf{1}\}$, $\{\mathbf{2}\}$, $\{\mathbf{5}\}$, $\{\mathbf{10}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{5}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{10}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{5}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{10}\}$
$\{\mathbf{5},\ \mathbf{10}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{10}\}$, $\{\mathbf{2},\ \mathbf{5},\ \mathbf{10}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{5},\ \mathbf{10}\}$, $\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5},\ \mathbf{10}\}$

【17】(1) $n \in B$ とすると

$$n=14x=7\cdot 2x$$

x は整数だから，$2x$ も整数である.
よって

$$n \in A$$

したがって

$$B \subset A$$

（証明終）

(2) $n \in A$ とすると

$$n=4x-2=2(x-1)$$

x は整数だから，$x-1$ も整数である.
よって

$$n \in B$$

したがって

$$A \subset B$$

（証明終）

(3) $n \in A$ とすると

$$n=6x=6(x-1)+6$$

x は整数だから $x-1$ も整数である.
よって

$$n \in B$$

したがって，$A \subset B$ である.
逆に，$n \in B$ とすると

$$n=6x+6=6(x+1)$$

x は整数だから，$x+1$ も整数である.
よって

$$n \in A$$

したがって，$B \subset A$ である.
ゆえに，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が
成り立つので

$$A=B$$

（証明終）

(4) $n \in A$ とすると

$$n=5x+1=5(x+1)-4$$

x は整数だから，$x+1$ も整数である.
よって

$$n \in B$$

したがって，$A \subset B$.
逆に，$n \in B$ とすると

$$n=5x-4=5(x-1)+1$$

x は整数だから，$x-1$ も整数である.
よって

$$n \in A$$

したがって，$B \subset A$.
ゆえに，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が
成り立つので

$$A=B$$

（証明終）

【18】

$$A=\{2,\ 3,\ a^2+a+3\}$$
$$B=\{2,\ 2a+3,\ a^2-3\}$$

$A\cap B=\{2,\ 5\}$ になるためには,
$3\notin B$ の上で,

$$a^2+a+3=5\ \cdots①$$

かつ

$$2a+3=5\quad もしくは\quad a^2-3=5\quad\cdots②$$

①より

$$\begin{aligned}a^2+a+3&=5\\a^2+a-2&=0\\(a+2)(a-1)&=0\\a&=-2,\ 1\end{aligned}$$

②より

$$\begin{aligned}2a+3&=5\\2a&=2\\a&=1\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}a^2-3&=5\\a^2&=8\\a&=\pm2\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって①, ②をみたすのは

$$a=1$$

$a=1$ を代入して

$$A=\{2,\ 3,\ 5\}$$
$$B=\{2,\ 5,\ -2\}$$

なので

$$A\cup B=\boldsymbol{\{-2,\ 2,\ 3,\ 5\}}$$

【19】
$$A=\left\{2,\ 4,\ 2a^2-3a+1\right\}$$
$$B=\left\{-4,\ a,\ 2a-1,\ a^2+2a\right\}$$

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ になるためには

$$2a^2-3a+1=3\ \cdots①$$

かつ

$a,\ 2a-1,\ a^2+2a$ のどれかが $2,\ 3$ $\cdots$②

①より

$$\begin{aligned}2a^2-3a+1&=3\\2a^2-3a-2&=0\\(2a+1)(a-2)&=0\\a&=-\frac{1}{2},\ 2\end{aligned}$$

$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$B=\left\{-4,\ -\frac{1}{2},\ -2,\ -\frac{3}{4}\right\}$$

これは，②に適していない．$a=2$ のとき

$$B=\{-4,\ 2,\ 3,\ 8\}$$

これは，②に適している．
よって，$a=2$．このとき

$$A=\{2,\ 4,\ 3\}$$
$$B=\{-4,\ 2,\ 3,\ 8\}$$

より

$$A\cup B=\mathbf{\{-4,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8\}}$$

添削課題

【1】$-1 \leqq x \leqq 2$ より，$-2 \leqq 2x \leqq 4$

よって，$-3 \leqq 2x-1 \leqq 3$ より，$B=\{x|-3 \leqq x \leqq 3\}$ と書き換えられるから，

(1) $A \cup B = \boldsymbol{\{x|-3 \leqq x \leqq 5\}}$

(2) $A \cap B = \boldsymbol{\{x|0 \leqq x \leqq 3\}}$

(3) $\overline{A} = \boldsymbol{\{x|x<0,\ 5<x\}}$

(4) $\overline{B} = \{x|x<-3,\ 3<x\}$ より，$A \cap \overline{B} = \boldsymbol{\{x|3<x \leqq 5\}}$

【2】(1) 99 以下の自然数のうち，2 の倍数であるものは 49 個

9 以下の自然数のうち，2 の倍数であるものは 4 個

よって，$n(A)=49-4=\mathbf{45}$

同様にして

$n(B)=33-3=\mathbf{30}$

$n(C)=19-1=\mathbf{18}$

(2) $A \cap B$ は 2 の倍数であり，3 の倍数である数，つまり，6 の倍数の集合を表すから，

$n(A \cap B)=16-1=\mathbf{15}$

(3) $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)=45+30-15=60$

ド・モルガンの法則より，$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ だから，

$$\begin{aligned} n(\overline{A} \cap \overline{B}) &= n(\overline{A \cup B}) = n(U)-n(A \cup B) \\ &= 90-60 \\ &= \mathbf{30} \end{aligned}$$

(4) (2) と同様にして

$n(B \cap C)=6-0=6$

$n(C \cap A)=9-0=9$

$n(A \cap B \cap C)=3-0=3$

だから

$$\begin{aligned} & n(A \cup B \cup C) \\ =& n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C) \\ =& 45+30+18-15-6-9+3 \\ =& \mathbf{66} \end{aligned}$$

【3】(1) $m=1$, $n=-1$ のとき

$$2=6\times 1+4\times(-1)$$

と表せるので, $2\in A$ である. （証明終）

(2) $2t\in B$ に対して, $m=t$, $n=-t$ のとき

$$2t=6\times t+4(-t)$$

と表せるので, $2t\in A$. よって $B\subset A$ （証明終）

(3) $6m{+}4n\in A$ に対して, $6m{+}4n=2(3m{+}2n)$ と表せる (つまり, $t=3m{+}2n\in Z$) ので, $6m+4n\in B$ である. よって, $A\subset B$

また, (2) より $B\subset A$ でもあるから, $A=B$

ここで, B は明らかに偶数全体の集合を表すから, A は偶数全体の集合を表す.

（証明終）

(4) Z を整数全体とするとき, $\overline{A}$ は奇数全体の集合を表すから,

$$\overline{A}=\{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \text{ は奇数}\,\}$$

または,

$$\overline{A}=\{\, \boldsymbol{2x+1} \mid \boldsymbol{x} \text{ は整数}\,\}$$

などと表せばよい.

１２章　集合と論理（２）ー命題と論証ー

問題

【1】(1) 命題ではない　(2) 命題である　(3) 命題である

(4) 命題ではない　(5) 命題ではない

【2】(1) 偽

反例：$x=-2$

(2) 偽

反例：$x=-3$

(3) 偽

反例：$a=1,\ b=0$

(4) 偽

反例：$n=1$

(5) 偽

反例：9

(6) 偽

反例：$x=-4,\ y=3$

【3】(1) （ア）

【参考】

$x \leqq 1 \Rightarrow x<1$ 偽，反例：$x=1$

$x<1 \Rightarrow x \leqq 1$ 真

(2) （イ）

【参考】

$x>2 \Rightarrow x^2>2x$ 真

$x^2>2x \Rightarrow x>2$ 偽，反例：$x=-1$

(3) （ア）

【参考】

$a \geqq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=0$ 偽，反例：$a=1$

$\sqrt{a^2}=0 \Rightarrow a \geqq 0$ 真

(4) （エ）

【参考】

$x>0 \Rightarrow x \fallingdotseq 5$ 偽，反例：$x=5$

$x \fallingdotseq 5 \Rightarrow x>0$ 偽，反例：$x=0$

(5) （ア）

【参考】

$ab=0 \Rightarrow a=0$ 偽，反例:$a=2,\ b=0$

$a=0 \Rightarrow ab=0$ 真

(6) （エ）

【参考】

$x^2=2x \Rightarrow x^2-4=0$ 偽，反例：$x=0$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=2x$ 偽，反例：$x=-2$

(7) （イ）

【参考】

$x>1,\ y>1 \Rightarrow x+y>2,\ xy>1$ 真

$x+y>2,\ xy>1 \Rightarrow x>1, y>1$ 偽，

反例：$x=1.5,\ y=1$

(8) （ウ）

【参考】

$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \Rightarrow x^2<3$ 真

$x^2<3 \Rightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 真

【4】(1) $\boldsymbol{x \fallingdotseq -3}$　(2) $\boldsymbol{a=8}$　(3) $\boldsymbol{n \leqq 3}$

(4) $\boldsymbol{k \geqq -4}$　(5) $\boldsymbol{x<9}$　(6) $\boldsymbol{y>-2}$

(7) $\boldsymbol{p<x-3}$　(8) $\boldsymbol{n}$ は偶数

【5】(1) $xy \neq 0$ または $x+y \neq 0$　(2) $x \geqq 0$ または $y < 0$

(3) $x \neq 1$ かつ $x \neq -2$　(4) $x \geqq 1$ かつ $7 > x$

(5) $x \leqq 1$ または $x \geqq 6$　(6) $x < -4$ または $x > 2$

(7) x, y の少なくとも一方が無理数　(8) 整数 x, y について, x, y はともに奇数

【6】(1) ある x について $x^2 < 0$ である

(2) すべての x について $x \geqq -1$ である

(3) ある x に対して $-x^2 + 4x - 6 \geqq 0$ である

(4) すべての x について $x^2 + x + 1 > 0$ である

(5) すべての x について $x - 1 \leqq 0$ を満たす

(6) $x > 1$ を満たすある x に対して $x^2 \leqq 1$ である

【7】(1)
（逆）素数は奇数である.
（裏）偶数は素数ではない.
（対偶）素数ではない数は偶数である.

(2)
（逆）$a = 0$ または $b = 0$ ならば, $a^2 + b^2 = 0$
（裏）$a^2 + b^2 \neq 0$ ならば, $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$
（対偶）$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ ならば, $a^2 + b^2 \neq 0$

(3)
（逆）$x > 0$ かつ $y > 0$ ならば, $x + y > 0$
（裏）$x + y \leqq 0$ ならば, $x \leqq 0$ または $y \leqq 0$
（対偶）$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ ならば, $x + y \leqq 0$

(4)
（逆）$x^2 + x - 6 = 0$ ならば, $x = -3$ または $x = 2$
（裏）$x \neq -3$ かつ $x \neq 2$ ならば, $x^2 + x - 6 \neq 0$
（対偶）$x^2 + x - 6 \neq 0$ ならば, $x \neq -3$ かつ $x \neq 2$

(5)
（逆）x, y の少なくとも一方は無理数ならば, $x + y$ は無理数.
（裏）$x + y$ が有理数ならば, x, y はともに有理数.
（対偶）x, y がともに有理数ならば, $x + y$ は有理数.

(6)
（逆）m, n が正の整数のとき, $m \neq 5$ または $n \neq 2$ ならば, $mn \neq 0$
（裏）m, n が正の整数のとき, $mn = 0$ ならば, $m = 5$ かつ $n = 2$
（対偶）m, n が正の整数のとき, $m = 5$ かつ $n = 2$ ならば, $mn = 0$

【8】(1)　(逆)　$\boldsymbol{x^2 \neq 1}$ ならば，$\boldsymbol{x \neq 1}$　真
(裏)　$\boldsymbol{x = 1}$ ならば，$\boldsymbol{x^2 = 1}$　真
(対偶)　$\boldsymbol{x^2 = 1}$ ならば，$\boldsymbol{x = 1}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1}$

(2)　(逆)　$\boldsymbol{x + y < 2}$ ならば，$\boldsymbol{x < 1}$ または $\boldsymbol{y < 1}$　真
(裏)　$\boldsymbol{x \geqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \geqq 1}$ ならば，$\boldsymbol{x + y \geqq 2}$　真
(対偶)　$\boldsymbol{x + y \geqq 2}$ ならば，$\boldsymbol{x \geqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \geqq 1}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = 4,\ y = -1}$

(3)　(逆)　$\boldsymbol{x + y \geqq 3}$ ならば，$\boldsymbol{x \geqq 1}$ かつ $\boldsymbol{y \geqq 2}$　偽，反例 $\boldsymbol{x = 4,\ y = -1}$
(裏)　$\boldsymbol{x < 1}$ または $\boldsymbol{y < 2}$ ならば，$\boldsymbol{x + y < 3}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1,\ y = 3}$
(対偶)　$\boldsymbol{x + y < 3}$ ならば，$\boldsymbol{x < 1}$ または $\boldsymbol{y < 2}$　真

(4)　(逆)　$\boldsymbol{x^2 + x - 2 < 0}$ ならば，$\boldsymbol{0 < x < 1}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1}$
(裏)　$\boldsymbol{x \leqq 0}$ または $\boldsymbol{1 \leqq x}$ ならば，$\boldsymbol{x^2 + x - 2 \geqq 0}$　偽，反例：$\boldsymbol{x = -1}$
(対偶)　$\boldsymbol{x^2 + x - 2 \geqq 0}$ ならば，$\boldsymbol{x \leqq 0}$ または $\boldsymbol{1 \leqq x}$　真

(5)　(逆) $ab > 0$ ならば，$a,\ b$ がともに正　偽，反例：$a < 0,\ b < 0$
(裏) $a,\ b$ の少なくとも一方が 0 以下であるとき，$ab \leqq 0$　偽，
反例：$a = -1,\ b = -2$
(対偶) $ab \leqq 0$ ならば，$a,\ b$ の少なくとも一方が 0 以下　真

(6)　(逆) ある数が 6 の倍数ならば，2 の倍数かつ 3 の倍数　真
(裏) ある数が 2 の倍数でない，もしくは 3 の倍数ではないならば，
6 の倍数ではない　真
(対偶) ある数が 6 の倍数ではないならば，2 の倍数ではない，
もしくは 3 の倍数ではない　真

添削課題

【1】(1) 「正三角形である」ならば「2 つの内角が等しい」が真で，
「2 つの内角が等しい」ならば「正三角形である」が偽
（反例は，二等辺三角形のとき）である．
よって，**(イ)**

(2) 「関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と 2 点で交わる」ならば「$b^2 - 4ac > 0$」が真で，
「$b^2 - 4ac > 0$」ならば「関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と 2 点で交わる」は偽
（反例は，$a = 0$, $b = c = 1$）である．
よって，**(イ)**

(3) 「$a < 0$」ならば「$a^2 \neq 0$」が真で，
「$a^2 \neq 0$」ならば「$a < 0$」が偽
（反例は，$a = 1$ のとき）である．
よって，**(イ)**

(4) 「$a + b = 0$ かつ $a - b = 0$」ならば「$a = b = 0$」が真で，
「$a = b = 0$」ならば「$a + b = 0$ かつ $a - b = 0$」が真である．
よって，**(ウ)**

(5) 「$(a - b)(b - c) = 0$」ならば「$a = b = c$」が偽
（反例は，$a = 1$, $b = 1$, $c = 3$ のとき）で，
「$a = b = c$」ならば「$(a - b)(b - c) = 0$」が真である．
よって，**(ア)**

(6) 「$ab > bc$」ならば「$a > c$」が偽
（反例は，$a = -2$, $b = -1$, $c = 1$ のとき）で，
「$a > c$」ならば「$ab > bc$」が偽
（反例は，$a = 2$, $b = -1$, $c = 1$ のとき）である．
よって，**(エ)**

(7) 「x は素数」ならば「x は奇数」は偽 (反例は $x = 2$ のとき)
「x は奇数」ならば「x は素数」は偽 (反例は $x = 9$ のとき)
よって，**(エ)**

(8) 「$x^2 + y^2 = 0$」ならば「$x = y = 0$」は真
「$x = y = 0$」ならば「$x^2 + y^2 = 0$」は真
よって，**(ウ)**

(9) 「$\triangle$ABC は直角三角形」ならば「$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$」は偽 (反例は $\angle \mathrm{A} = 90^\circ$ のとき)
$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$ なら，$\angle \mathrm{B} = 90^\circ$ で $\triangle$ABC は直角三角形だから「$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$」ならば「$\triangle$ABC は直角三角形」は真
よって，**(ア)**

【2】　逆　**3** の倍数かつ **4** の倍数である数は，**12** の倍数である．　［真］

裏　**12** の倍数でない数は，**3** の倍数でないかまたは **4** の倍数でない．　［真］

対偶　**3** の倍数でないかまたは **4** の倍数でない数は，**12** の倍数でない．　［真］

問題

【1】(1) $k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n = 3k$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= 9k^2 \\ &= 3(3k^2) \end{aligned}$$

となる．$3k^2$ は整数だから，$3(3k^2)$ は 3 で割ると余りは 0 である．

$n = 3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+1)^2 \\ &= 9k^2 + 6k + 1 \\ &= 3(3k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

となる．$3k^2 + 2k$ は整数だから，$3(3k^2 + 2k) + 1$ は 3 で割ると余りは 1 である．

$n = 3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} n^2 &= (3k+2)^2 \\ &= 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \end{aligned}$$

となる．$3k^2 + 4k + 1$ は整数だから，$3(3k^2 + 4k + 1) + 1$ は 3 で割ると余りは 1 である．

よって，n を整数とするとき，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 または 1 である．

（証明終）

(2) $k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n = 3k$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 5n &= n(n^2 + 5) \\ &= 3k\{(3k)^2 + 5\} \\ &= 3k(9k^2 + 5) \end{aligned}$$

となる．$9k^2 + 5$ は整数だから，$3k(9k^2 + 5)$ は 3 の倍数である．

$n = 3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 5n &= n(n^2 + 5) \\ &= (3k+1)\{(3k+1)^2 + 5\} \\ &= (3k+1)(9k^2 + 6k + 6) \\ &= (3k+1) \cdot 3(3k^2 + 2k + 2) \\ &= 3(3k+1)(3k^2 + 2k + 2) \end{aligned}$$

となる．$3k+1$，$3k^2 + 2k + 2$ は整数だから，$3(3k+1)(3k^2 + 2k + 2)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} n^3+5n &= n(n^2+5) \\ &= (3k+2)\{(3k+2)^2+5\} \\ &= (3k+2)(9k^2+12k+9) \\ &= (3k+2)\cdot 3(3k^2+4k+3) \\ &= 3(3k+2)(3k^2+4k+3) \end{aligned}$$

となる．$3k+2,\ 3k^2+4k+3$ は整数だから，$3(3k+2)(3k^2+4k+3)$ は 3 の倍数である．

よって，n を整数とするとき，n^3+5n は 3 の倍数である．　（証明終）

＜別解＞

$$\begin{aligned} n^3+5n &= n(n+1)(n+2)-3n^2+3n \\ &= n(n+1)(n+2)-3n(n-1) \end{aligned}$$

$n(n+1)(n+2)$ は連続する 3 つの整数 $n,\ n+1,\ n+2$ の積だから 6 の倍数である．

これを $6m$ (m は整数) とおくと，

$$\begin{aligned} n^3+5n &= 6m-3n(n-1) \\ &= 3(2m-n^2+n) \end{aligned}$$

となる．$2m-n^2+n$ は整数なので，$3(2m-n^2+n)$ は 3 の倍数である．

すなわち，n^3+5n は 3 の倍数である．　（証明終）

(3)　(i) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n=2k$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n^2-3n+2) \\ &= n(n-1)(n-2) \\ &= 2k(2k-1)(2k-2) \end{aligned}$$

となる．$k(2k-1)(2k-2)$ は整数だから，$2k(2k-1)(2k-2)$ は 2 の倍数である．

$n=2k+1$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2) \\ &= (2k+1)(2k+1-1)(2k+1-2) \\ &= (2k+1)\cdot 2k\cdot(2k-1) \\ &= 2k(2k+1)(2k-1) \end{aligned}$$

となる．$k(2k+1)(2k-1)$ は整数だから，$2k(2k+1)(2k-1)$ は 2 の倍数である．

よって，n を整数とすると n^3-3n^2+2n は 2 の倍数である．

(ii) $l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ とすれば

$n=3l$ のとき

$$\begin{aligned} n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2) \\ &= 3l(3l-1)(3l-2) \end{aligned}$$

となる．$l(3l-1)(3l-2)$ は整数だから，$3l(3l-1)(3l-2)$ は 3 の倍数である．

$n=3l+1$ のとき

$$\begin{aligned}n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2)\\ &= (3l+1)(3l+1-1)(3l+1-2)\\ &= (3l+1)\cdot 3l\cdot(3l-1)\\ &= 3l(3l+1)(3l-1)\end{aligned}$$

となる．$l(3l+1)(3l-1)$ は整数だから，$3l(3l+1)(3l-1)$ は 3 の倍数である．

$n=3l+2$ のとき

$$\begin{aligned}n^3-3n^2+2n &= n(n-1)(n-2)\\ &= (3l+2)(3l+2-1)(3l+2-2)\\ &= (3l+2)(3l+1)\cdot 3l\\ &= 3l(3l+1)(3l+2)\end{aligned}$$

となる．$l(3l+1)(3l+2)$ は整数だから，$3l(3l+1)(3l+2)$ は 3 の倍数である．

よって，n を整数とすると n^3-3n^2+2n は 3 の倍数である．

(i)(ii) より，n^3-3n^2-2n は 2 の倍数かつ 3 の倍数なので，6 の倍数である．

（証明終）

＜別解＞

$$n^3-3n^2+2n=n(n-1)(n-2)$$

$n(n-1)(n-2)$ は連続する 3 つの整数 $n-2,\ n-1,\ n$ の積だから 6 の倍数である．

すなわち，n^3-3n^2+2n は 6 の倍数である．（証明終）

(4)
$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n &= n(2n^2-3n+1)\\ &= n(2n-1)(n-1)\end{aligned}$$

(i) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n=3k$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n &= n(2n^2-3n+1)\\ &= n(n-1)(2n-1)\\ &= 3k(3k-1)\{2\cdot(3k)-1\}\\ &= 3k(3k-1)(6k-1)\end{aligned}$$

となる．$k(6k-1)(3k-1)$ は整数だから，$3k(6k-1)(3k-1)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}2n^3-3n^2+n &= n(n-1)(2n-1)\\ &= (3k+1)(3k+1-1)\{2(3k+1)-1\}\\ &= (3k+1)\cdot 3k\cdot(6k+1)\\ &= 3k(3k+1)(6k+1)\end{aligned}$$

となる．$k(3k+1)(6k+1)$ は整数だから，$3k(3k+1)(6k+1)$ は 3 の倍数である．

$n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} 2n^3-3n^2+n &= n(n-1)(2n-1) \\ &= (3k+2)(3k+2-1)\{2(3k+2)-1\} \\ &= (3k+2)(3k+1)(6k+3) \\ &= (3k+2)(3k+1)\cdot 3(2k+1) \\ &= 3(2k+1)(3k+2)(3k+1) \end{aligned}$$

となる．$(2k+1)(3k+2)(3k+1)$ は整数だから，$3(2k+1)(3k+2)(3k+1)$ は 3 の倍数である．

よって，n を整数とすると，$2n^3-3n^2+n$ は 3 の倍数である．

(ii) $l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば

$n=2l$ のとき

$$\begin{aligned} 2n^3-3n^2+n &= n(n-1)(2n-1) \\ &= 2l(2l-1)(2\cdot 2l-1) \\ &= 2l(4l-1)(2l-1) \end{aligned}$$

となる．$l(4l-1)(2l-1)$ は整数だから，$2l(4l-1)(2l-1)$ は 2 の倍数である．

$n=2l+1$ のとき

$$\begin{aligned} 2n^3-3n^2+n &= n(n-1)(2n-1) \\ &= (2l+1)(2l+1-1)\{2(2l+1)-1\} \\ &= (2l+1)\cdot 2l\cdot(4l+1) \\ &= 2l(2l+1)(4l+1) \end{aligned}$$

となる．$l(2l+1)(4l+1)$ は整数だから，$2l(2l+1)(4l+1)$ は 2 の倍数である．

よって，n を整数とすると，$2n^3-3n^2+n$ は 2 の倍数である．

(i)(ii) より，$2n^3-3n^2+n$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数なので，6 の倍数である．

（証明終）

＜別解＞

$$\begin{aligned} 2n^3-3n^2+n &= 2n(n+1)(n-1)-3n^2+3n \\ &= 2n(n+1)(n-1)-3n(n-1) \end{aligned}$$

$n(n-1)$ は連続する 2 つの整数 $n-1$, n の積だから 2 の倍数である．これを $2k$ (k は整数) とおく．また，$n(n+1)(n-1)$ は連続する 3 つの整数 $n-1$, n, $n+1$ の積なので 6 の倍数である．これを $6l$ (l は整数) とおくと

$$\begin{aligned} 2n^3-3n^2+n &= 2\cdot 6l-3\cdot 2k \\ &= 12l-6k \\ &= 6(2l-k) \end{aligned}$$

となる．$2l-k$ は整数だから，$6(2l-k)$ は 6 の倍数である．

すなわち，$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である． （証明終）

(5)
$$\begin{aligned}4n^3+6n^2+2n &= 2n(2n^2+3n+1)\\ &= 2n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

$n(n+1)(2n+1)$ は整数なので $2n(n+1)(2n+1)$ は 2 の倍数である．
$n(n+1)(2n+1)$ について考える．

(i) $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば
$n=2k$ のとき

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= (2k)\cdot(2k+1)\cdot\{2\cdot(2k)+1\}\\ &= 2k(2k+1)(4k+1)\end{aligned}$$

となる．これは 2 の倍数である．
$n=2k+1$ のとき

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= (2k+1)(2k+1+1)\{2(2k+1)+1\}\\ &= (2k+1)(2k+2)(4k+3)\\ &= 2(k+1)(2k+1)(4k+3)\end{aligned}$$

となる．これは 2 の倍数である．
よって，n を整数とすると，$n(n+1)(2n+1)$ は 2 の倍数である．

(ii) $l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ とすれば
$n=3l$ のとき

$$n(n+1)(2n+1)=3l(3l+1)(6l+1)$$

となる．これは 3 の倍数である．
$n=3l+1$ のとき

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= (3l+1)(3l+1+1)(6l+2+1)\\ &= (3l+1)(3l+2)(6l+3)\\ &= 3(2l+1)(3l+1)(3l+2)\end{aligned}$$

となる．これは 3 の倍数である．
$n=3l+2$ のとき

$$\begin{aligned}n(n+1)(2n+1) &= (3l+2)(3l+2+1)(6l+4+1)\\ &= (3l+2)(3l+3)(6l+5)\\ &= 3(l+1)(3l+2)(6l+5)\end{aligned}$$

となる．これは 3 の倍数である．
よって，n を整数とすると，$n(n+1)(2n+1)$ は 3 の倍数である．

(i)(ii) より，$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数である．
したがって，$4n^3+6n^2+2n$ は (6 の倍数) $\times$ (2 の倍数) なので，12 の倍数である．（証明終）

＜別解＞

$$\begin{aligned}4n^3+6n^2+2n &= 4n(n+1)(n+2)-6n^2-6n\\ &= 4n(n+1)(n+2)-6n(n+1)\end{aligned}$$

$n(n+1)$ は連続する 2 つの整数 n, $n+1$ の積だから，2 の倍数である．これを $2k$ (k は整数) とおく．また，$n(n+1)(n+2)$ は連続する 3 つの整数 n, $n+1$, $n+2$ の積なので 6 の倍数である．これを $6l$ (l は整数) とおくと

$$\begin{aligned} 4n^3+6n^2+2n &= 4\cdot 6l-6\cdot 2k \\ &= 24l-12k \\ &= 12(2l-k) \end{aligned}$$

となる．$2l-k$ は整数だから $12(2l-k)$ は 12 の倍数である．
すなわち，$4n^3+6n^2+2n$ は 12 の倍数である．（証明終）

【2】(1) 正の整数を，$6x+3$ とおくと，

$$6x+3=3(2x+1)$$

よって，$2x+1$ は整数だから，$3(2x+1)$ は 3 の倍数である．
つまり，この $6x+3$ を 3 で割ると，**商は $\mathbf{2x+1}$**

(2) この自然数を，$6x+5$ とおくと，

$$6x+5=2(3x+2)+1$$

$3x+2$ は整数だから，$2(3x+2)$ は 2 の倍数である．
つまり，この $6x+5$ を 2 で割ると，**商は $\mathbf{3x+2}$** で，**余りは 1**

(3) 正の整数 A を，

$$A=5x+3 \quad \cdots ①$$

とおく．また，

$$x=4y+3 \quad \cdots ②$$

とおける．② を ① に代入して

$$\begin{aligned} A &= 5x+3 \\ &= 5(4y+3)+3 \\ &= 20y+18 \\ &= 10(2y+1)+8 \end{aligned}$$

$2y+1$ は整数だから，$10(2y+1)$ は 10 の倍数である．
よって，この A を 10 で割ると余りは **8**

(4) ある自然数 A を 7 で割ったときの商を x とする.
すると，除法の原理より，x は 0 以上の整数で

$$A = 7x + 3$$

とおける.

$$\begin{aligned} A^2 &= (7x+3)^2 \\ &= 49x^2 + 42x + 9 \\ &= 7(7x^2 + 6x + 1) + 2 \end{aligned}$$

$7x^2 + 6x + 1$ は整数だから，$7(7x^2 + 6x + 1)$ は 7 の倍数である.
よって，A^2 を 7 で割ると余りは **2**

(5) 正の整数 A を 12 で割ったときの商を x とする.
すると，除法の原理より，x は 0 以上の整数で

$$A = 12x + 3 \quad \cdots ①$$

とおける.
また，$A - B$ を 12 で割ったときの商を y とすると，

$$A - B = 12y \quad \cdots ②$$

② に ① を代入して

$$\begin{aligned} A - B &= 12y \\ (12x+3) - B &= 12y \\ B &= 12x - 12y + 3 \\ &= 12(x-y) + 3 \end{aligned}$$

$x - y$ は整数だから，$12(x - y)$ は 12 の倍数である.
よって，B を 12 で割ると余りは **3**

(6) 正の整数 A を 13 で割ったときの商を x とする．
すると，除法の原理より，x は 0 以上の整数で

$$A = 13x + 4 \quad \cdots ①$$

とおける．
また，$A + B$ を 13 で割ったときの商を y とすると，

$$A + B = 13y \quad \cdots ②$$

② に ① を代入して

$$\begin{aligned} A + B &= 13y \\ (13x + 4) + B &= 13y \\ B &= 13y - 13x - 4 \\ &= 13(y - x - 1) + 9 \end{aligned}$$

$y - x - 1$ は整数だから，$13(y - x - 1)$ は 13 の倍数である．
よって，B を 13 で割ると余りは **9**

【3】(1) 命題の対偶「整数 n が偶数ならば，n の平方は偶数」を証明する．
a を整数とすると

$$n = 2a$$

とおける．よって

$$\begin{aligned} n^2 &= (2a)^2 \\ &= 4a^2 \\ &= 2 \cdot 2a^2 \end{aligned}$$

となる． $2a^2$ は整数だから，$2 \cdot 2a^2$ は偶数である．
よって n の平方は偶数である．
ゆえに題意は示された． （証明終）

(2) 命題の対偶「a, b が整数のとき，a, b の少なくとも一方が偶数ならば，積 ab は偶数」を証明する．

n, m を整数とすると

$$a = 2n \text{ もしくは } b = 2m$$

とおける．よって

$a = 2n$ のとき

$$\begin{aligned} ab &= (2n) \cdot b \\ &= 2nb \end{aligned}$$

となるので，$2nb$ は 2 の倍数（偶数）である．

$b = 2m$ のとき

$$\begin{aligned} ab &= a \cdot (2m) \\ &= 2ma \end{aligned}$$

となるので，$2ma$ は 2 の倍数（偶数）である．

よって ab は偶数である．

ゆえに題意は示された． （証明終）

(3) 命題の対偶「a, b が整数のとき，a, b がともに 3 の倍数でないならば，積 ab は 3 の倍数でない」を証明する．

n, m を整数とすると

$$a = 3n \pm 1,\ b = 3m \pm 1$$

とおける．よって

$$\begin{aligned} ab &= (3n \pm 1)(3m \pm 1) \\ &= 9mn \pm 3n \pm 3m + 1,\ 9mn \mp 3n \pm 3m - 1 \quad \text{（複号同順）} \end{aligned}$$

$$9mn \pm 3n \pm 3m + 1 = 3(3mn \pm n \pm m) + 1$$

となるので，$9mn \pm 3n \pm 3m + 1$ は 3 の倍数ではない．

$$\begin{aligned} 9mn \mp 3n \pm 3m - 1 &= 3(3mn \mp n \pm m) - 1 \\ &= 3(3mn \mp n \pm m - 1) + 3 - 1 \\ &= 3(3mn \mp n \pm m - 1) + 2 \end{aligned}$$

となるので，$9mn \mp 3n \pm 3m - 1$ は 3 の倍数ではない．

よって，ab は 3 の倍数ではない．

ゆえに題意は示された． （証明終）

(4) 命題の対偶「a, b が実数のとき，$a \leqq 2$ かつ $b \leqq 2$ ならば $a+b \leqq 4$」を証明する．
$a \leqq 2$ かつ $b \leqq 2$ ならば

$$\begin{aligned} & a+b \leqq 2+2=4 \\ \therefore\ & a+b \leqq 4 \end{aligned}$$

よって，$a \leqq 2$ かつ $b \leqq 2$ ならば $a+b \leqq 4$
ゆえに題意は示された．（証明終）

(5) 命題の対偶「x, y が正の数のとき，$x<1$ かつ $y<1$ ならば $x^2+y^2<2$」を証明する．
$0<x<1$ より

$$\begin{aligned} 0^2 < x^2 < 1^2 \\ 0 < x^2 < 1 \end{aligned}$$

$0<y<1$ より

$$\begin{aligned} 0^2 < y^2 < 1^2 \\ 0 < y^2 < 1 \end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned} 0+0 < x^2+y^2 < 1+1 \\ 0 < x^2+y^2 < 2 \end{aligned}$$

となる．
よって，$x<1$ かつ $y<1$ ならば $x^2+y^2<2$ となる．
ゆえに題意は示された．（証明終）

【4】(1) $\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b} \quad (a,\ b \text{ は互いに素な正の整数})$$

とおくことができる．この両辺を平方して分母をはらうと

$$a^2=3b^2 \ \cdots ①$$

となり，a^2 は 3 の倍数である．したがって a も 3 の倍数でなければならない．
そこで $a=3m$ （m は正の整数）とおいて，① に代入すると

$$\begin{aligned} 9m^2 &= 3b^2 \\ b^2 &= 3m^2 \end{aligned}$$

となり，b^2 は 3 の倍数である．したがって b も 3 の倍数である．
a, b はともに 3 の倍数であるから，公約数 3 をもつことになる．これは最初に a, b は互いに素とした仮定に反する．
この矛盾は $\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $\sqrt{3}$ は無理数である．（証明終）

(2) $4\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$4\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$4\sqrt{3} = a \qquad (a \text{ は有理数})$$

とおくことができる．これより，

$$\sqrt{3} = \frac{a}{4}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので矛盾する．
この矛盾は $4\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $4\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $4\sqrt{3}$ は無理数である．　　（証明終）

(3) $4+\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$4+\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$4+\sqrt{3} = k \qquad (k \text{ は有理数})$$

とおくことができる．これより，

$$\sqrt{3} = k - 4$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので矛盾する．
この矛盾は $4+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $4+\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $4+\sqrt{3}$ は無理数である．
（証明終）

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が無理数でないと仮定すると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は有理数であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \qquad (a,\ b \text{ は互いに素な正の整数})$$

とおくことができる．これより，

$$b^2 = 2a^2 \cdots\cdots ①$$

となり，b^2 は 2 の倍数である．したがって b も 2 の倍数でなければならない．
そこで $b = 2m$ （m は正の整数）とおいて，① に代入すると

$$4m^2 = 2a^2$$
$$a^2 = 2m^2$$

となり，a^2 は 2 の倍数である．したがって a も 2 の倍数である．
a，b はともに 2 の倍数であるから，公約数 2 をもつことになる．これは最初に a，b は互いに素とした仮定に反する．
この矛盾は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は有理数ではない．つまり $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ は無理数である．　　（証明終）

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=p \qquad (p \text{ は有理数})$$

とおくことができる．これより，両辺を平方して

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 &= p^2\\ 5+2\sqrt{6} &= p^2\\ 2\sqrt{6} &= p^2-5\\ \sqrt{6} &= \frac{p^2-5}{2}\end{aligned}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので矛盾する．
この矛盾は $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が有理数であると仮定したために生じた．
したがって $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数ではない．つまり $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．

（証明終）

【5】(1) 結論の否定は $x \leqq 0$ または $y \leqq 0$ である．
$x+y>0$ かつ $xy>0$ のとき，$x \leqq 0$ と仮定すると，$x+y>0$ になるためには $y>0$.
$y>0$ ならば $xy \leqq 0$ より，$x+y>0$ かつ $xy>0$ に矛盾する．
この矛盾は $x \leqq 0$ と仮定したために生じた．
よって $x>0$ である．
このとき，$xy>0$ より

$$y>0$$

したがって，x, y が実数のとき，

$$x+y>0 \text{ かつ } xy>0$$

ならば

$$x>0 \text{ かつ } y>0$$

（証明終）

(2) 結論の否定は，a, b がともに 0 以上の数である．
$ab \fallingdotseq 0$ かつ $a+b=0$ のとき，a, b がともに 0 以上の数と仮定すると，$ab \geqq 0$ かつ $a+b \geqq 0$ となる．
これは $ab \fallingdotseq 0$ かつ $a+b=0$ に矛盾する．
この矛盾は a, b がともに 0 以上の数であると仮定したために生じた．
よって a, b のうち少なくとも 1 つは負の数である．（証明終）

(3) 結論の否定は，a，b，c すべてが奇数である．

$a^2+b^2=c^2$ のとき，a，b，c すべてが奇数であると仮定する．

m，n を整数とすると，

$$a=2m+1,\ b=2n+1$$

とおける．

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (2m+1)^2+(2n+1)^2 \\ &= 4m^2+4m+1+4n^2+4n+1 \\ &= 4m^2+4m+4n^2+4n+2 \\ &= 2(2m^2+2m+2n^2+2n+1) \end{aligned}$$

$2m^2+2m+2n^2+2n+1$ は整数なので，a^2+b^2 は偶数である．

c も奇数なので，l を整数とすると

$$c=2l+1$$

とおける．

$$\begin{aligned} c^2 &= (2l+1)^2 \\ &= 4l^2+4l+1 \\ &= 2(2l^2+2l)+1 \end{aligned}$$

よって c^2 は奇数である．

これは $a^2+b^2=c^2$ に矛盾する．

この矛盾は，a，b，c すべてが奇数であると仮定したために生じた．

よって a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である．（証明終）

(4) 結論の否定は，$p \fallingdotseq 0$ または $q \fallingdotseq 0$ である．

$p+q\sqrt{3}=0$ のとき，$q \fallingdotseq 0$ と仮定する．

$$\begin{aligned} p+q\sqrt{3} &= 0 \\ q\sqrt{3} &= -p \\ \sqrt{3} &= -\frac{p}{q} \end{aligned}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので，矛盾する．この矛盾は $q \fallingdotseq 0$ と仮定したために生じた．したがって，$q=0$ である．

このとき，

$$\begin{aligned} p+0\cdot\sqrt{3} &= 0 \\ p &= 0 \end{aligned}$$

よって，p，q が有理数で，$\sqrt{3}$ が無理数のとき，

$$p+q\sqrt{3}=0 \text{ ならば}, p=q=0$$

である．（証明終）

(5) 結論の否定は，$a \fallingdotseq c$ または $b \fallingdotseq d$ である．

そこで，$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ のとき，$b \fallingdotseq d$ と仮定する．

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{3}&=c+d\sqrt{3} \\ b\sqrt{3}-d\sqrt{3}&=c-a \\ (b-d)\sqrt{3}&=c-a \\ \sqrt{3}&=\frac{c-a}{b-d} \end{aligned}$$

となる．これは左辺が無理数，右辺が有理数となるので，矛盾する．この矛盾は $b \fallingdotseq d$ と仮定したために生じた．したがって，$b=d$ である．このとき

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{3}&=c+b\sqrt{3} \\ a&=c \end{aligned}$$

よって，a, b, c, d が有理数で，$\sqrt{3}$ が無理数のとき，

$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ならば $a=c$ かつ $b=d$

である． （証明終）

添削課題

【1】≪証明≫

1 から 12 までの整数の中で 7 を素因数にもつのは 7 だけである．a, b をそれぞれ素因数の積の形で表したとき，題意より，a, b のいずれか一方のみが素因数 7 をもつ．
したがって，a, b の一方は 7 の倍数であり，他方は 7 の倍数ではない．
すなわち，$a \neq b$ である．（証明終）

【2】≪証明≫

$a = b$ であると仮定すると，
$a^2 > bc$ より，
$a^2 > ac$ $\cdots$①
$ac > b^2$ より，
$ac > a^2$ $\cdots$②
①，②は矛盾するので，$a \neq b$ である．（証明終）

【3】≪証明≫

$x^2+ax+b=0$ が有理数の解 $\dfrac{m}{n}$ をもつと仮定する（ただし，m，n は互いに素な整数で，$n>0$ とする）と，

$\left(\dfrac{m}{n}\right)^2+a\times\dfrac{m}{n}+b=0$ より，$m^2+amn+bn^2=0\ \cdots$①

ここで，m，n は互いに素だから，少なくとも一方が奇数である．

(i) m，n がともに奇数のとき

m^2，amn，bn^2 はすべての奇数だから，①に矛盾する．

(ii) m が奇数，n が偶数のとき

$$m^2+amn+bn^2=m^2+n(am+bn)$$

m^2 は奇数，$n(am+bn)$ は偶数だから，①に矛盾する．

(iii) m が偶数，n が奇数のとき

$$m^2+amn+bn^2=m(m+an)+bn^2$$

$m(m+an)$ は偶数，bn^2 は奇数だから①に矛盾する．

以上より，いずれの場合も矛盾する．したがって，$x^2+ax+b=0$ は，有理数の解をもたない．（証明終）

【4】(1) 偽

反例：$a=1$，$b=2$

(2) 真

≪証明≫

対偶「a または b が 7 で割り切れないならば，a^2+b^2 は 7 で割り切れない.」をとり，これが真であることを証明する．

ある整数 m を 7 で割ったときの余りと，m^2 を 7 で割ったときの余りの関係は，ある自然数 k を用いて

$m=7k$ のとき, m の余り 0，m^2の余り 0
$m=7k+1$ のとき, m の余り 1，m^2の余り 1
$m=7k+2$ のとき, m の余り 2，m^2の余り 4
$m=7k+3$ のとき, m の余り 3，m^2の余り 2
$m=7k+4$ のとき, m の余り 4，m^2の余り 2
$m=7k+5$ のとき, m の余り 5，m^2の余り 4
$m=7k+6$ のとき, m の余り 6，m^2の余り 1

ゆえに，a が 7 で割り切れないとき，a^2 を 7 で割ったときの余りは，1，2，4 のいずれかであるから，b^2 を 7 で割ったときの余りが 1，2，4 のいずれの値をとっても，a^2+b^2 を 7 で割ったときの余りは 0 にはなりえない．

したがって，a または b が 7 で割り切れないならば，a^2+b^2 は 7 で割り切れない．

よって，この対偶は真であり，もとの命題も真である．（証明終）

3MJSS/3MJS/3MJ
中３選抜東大・医学部数学
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製