

高1 難関大数学



1 章 微分

問題

【1】 (1) $-1 \leq x \leq 3$ における平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} &= \frac{18 - (-2)}{4} \\ &= 5 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 3(1+h) - (1+3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 5h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 5) \\ &= 5 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(3) $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 3(a+h) - (a^2 + 3a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + 3h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a + 3 + h) \\ &= 2a + 3 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

【2】 (1) $y' = 4$ (答)

(2) $y' = -6x + 6$ (答)

(3) $y' = 3x^2 - 10x$ (答)

(4) $y = 3x(2x - 1) = 6x^2 - 3x$

より

$$y' = 12x - 3 \quad (\text{答})$$

<別解> 積の微分法を用いる.

$$\begin{aligned}y' &= (3x)'(2x - 1) + 3x(2x - 1)' \\ &= 3(2x - 1) + 3x(2) \\ &= 12x - 3 \quad (\text{答})\end{aligned}$$

【3】 (1) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ とおくと,

$$f'(x) = 2x - 3$$

$f'(1) = -1$ であるから, $y = f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$f(1) = 2$ より,

$$y = -1(x - 1) + 2$$

ゆえに

$$\mathbf{y = -x + 3} \quad (\text{答})$$

(2) $f(x) = -x^3 + 5x$ とおくと,

$$f'(x) = -3x^2 + 5$$

$f'(2) = -7$, $f(2) = 2$ であるから, $y = f(x)$ 上の点 $(2, f(2))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ &= -7(x - 2) + 2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{y = -7x + 16} \quad (\text{答})$$

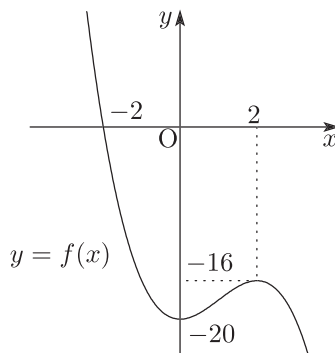
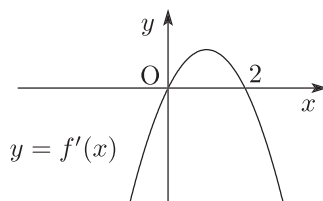
【4】 (1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 20$ とおくと,

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

よって $y = f'(x)$, $y = f(x)$ のグラフは
右のようになる. (答)

また増減表は以下のようになる.

x	...	0	...	2	...
y'	-	0	+	0	-
y		↘		↗	↘



$$(2) \quad \begin{aligned} f(-2) &= -(-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 20 = 0 \\ f(1) &= -1^3 + 3 \cdot 1^2 - 20 = -18 \end{aligned}$$

より $y = f(x)$ のグラフは右のようになる.

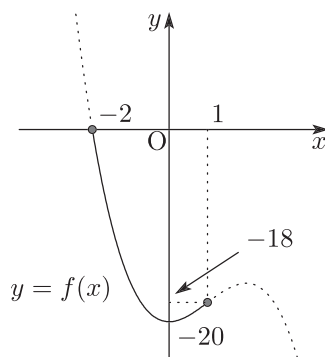
また増減表は下のようになる.

x	-2	...	0	...	1
y'		-	0	+	0
y	0	↘	-20	↗	-18

よって, 求める最大値, 最小値は

$$\begin{cases} \text{最大値 } 0 & (x = -2 \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -20 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(答)



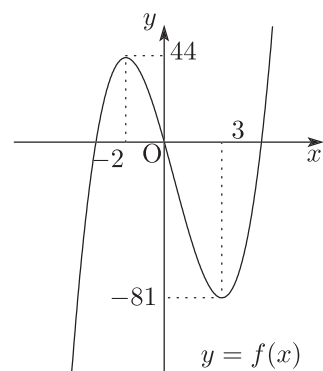
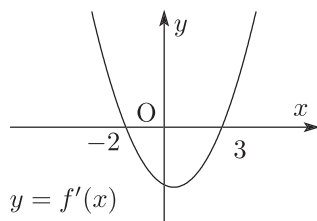
【5】 (1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ とおくと

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x-3)(x+2)$$

よって $y = f'(x)$, $y = f(x)$ のグラフは右
のようになる. (答)

また増減表は以下のようになる.

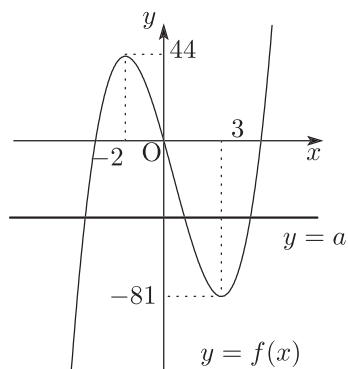
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	44	$\searrow$	-81	$\nearrow$



- (2) 「方程式 $f(x) = a$ が異なる正の解を 2 つと, 負の解を 1 つもつ」
 $\iff$ 「 $y = f(x)$ のグラフと $y = a$ のグラフが $x > 0$ で 2 つ,
 $x < 0$ で 1 つの異なる共有点をもつ」

$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ のグラフと $y = a$ のグ
ラフとが上記の共有点をもつような a の値の
範囲は, 右の図より

$$-81 < a < 0 \quad (\text{答})$$



【6】 $f(x)$ を n 次式とすると, $f'(x)$ は $(n-1)$ 次式である. よって, $f(x) \cdot f'(x)$ は

$$n + n - 1 = 2n - 1 \text{ (次式)}$$

であるから, (ii) より

$$2n - 1 = 5 \quad \therefore \quad n = 3$$

(i) より, $f(x)$ は

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおけるから

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(iii) より

$$f(1) = 1 + a + b + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(iv) より

$$f(x) - 1 = f'(x)(dx + e)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c - 1 &= (3x^2 + 2ax + b)(dx + e) \\ &= 3dx^3 + (2ad + 3e)x^2 + (bd + 2ae)x + be \end{aligned}$$

これは x についての恒等式であるから, 両辺の係数を比較して

$$3d = 1, \quad 2ad + 3e = a, \quad bd + 2ae = b, \quad be = c - 1$$

これらより

$$d = \frac{1}{3}, \quad e = \frac{1}{9}a, \quad b = \frac{1}{3}a^2, \quad c = \frac{1}{27}a^3 + 1$$

これらを①に代入すると

$$\begin{aligned} 1 + a + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{27}a^3 + 1 &= 0 \\ \iff a^3 + 9a^2 + 27a + 54 &= 0 \\ \iff (a + 6)(a^2 + 3a + 9) &= 0 \end{aligned}$$

a は実数なので

$$a = -6$$

よって

$$b = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12, \quad c = -\frac{6^3}{27} + 1 = -7$$

以上より, $f(x)$ は

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 \quad (\text{答})$$

【7】 (1) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

これより, $x > 1$ で $f(x)$ は単調増加である. また

$$f(2) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$$

より

$$x > 2 \text{ で } f(x) > 0$$

したがって, 与不等式が成立する.

〔証明終〕

(2) $y \geq 0, x + y = 2$ より

$$y = 2 - x \geq 0$$

$x \geq 0$ より

$$0 \leq x \leq 2$$

ここで $f(x) = x^3 - (y^2 - 5y + 4)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - \{(2-x)^2 - 5(2-x) + 4\} \\ &= x^3 - (x^2 - 4x + 4 - 10 + 5x + 4) \\ &= x^3 - x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

これより

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

そして

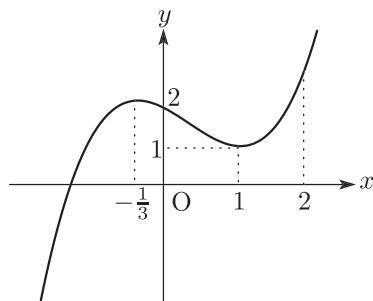
$$f(1) = 1 - 1 - 1 + 2 = 1 > 0$$

よって

$$0 \leq x \leq 2 \text{ で } f(x) > 0$$

したがって, 与不等式が成立する.

〔証明終〕



【8】

$$y' = 3x^2 - 1$$

であり, ここで $x = s$ での接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (3s^2 - 1)(x - s) + s^3 - s + 6 \\ &= (3s^2 - 1)x - 2s^3 + 6 \end{aligned}$$

これが, $(t, 0)$ を通るので

$$0 = (3s^2 - 1)t - 2s^3 + 6$$

これを s の方程式とみて異なる 3 つの実数解をもてばよい. ここで

$$f(s) = 2s^3 - 3ts^2 + t - 6$$

とおく.

$$f'(s) = 6s^2 - 6ts = 6s(s - t)$$

より, $t > 0$ のとき, $s = 0$, t で極値をもつ.

よって, 異なる 3 実解をもつためには

$$\begin{aligned} &f(0) \cdot f(t) < 0 \\ \iff &(t - 6)(-t^3 + t - 6) < 0 \\ \iff &(t - 6)(t^3 - t + 6) = (t - 6)(t + 2)(t^2 - 2t + 3) > 0 \end{aligned}$$

よって, $t^2 - 2t + 3 = (t - 1)^2 + 2 > 0$, $t > 0$ より

$$t > 6$$

2章 積分

問題

【1】 C を積分定数とする.

$$(1) \quad \int -5dx = -5x + C \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \int (3x + 4)dx = \frac{3}{2}x^2 + 4x + C \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \int 2(x-1)dx &= \int (2x-2)dx \\ &= x^2 - 2x + C \end{aligned} \quad (\text{答})$$

$$(4) \quad \int (-3x^2 + 2x + 1)dx = -x^3 + x^2 + x + C \quad (\text{答})$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \int (x+2)(x-1)dx &= \int (x^2 + x - 2)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C \end{aligned} \quad (\text{答})$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \int (x+1)^2dx &= \int (x^2 + 2x + 1)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \end{aligned} \quad (\text{答})$$

<別解>

$$\int (x+1)^2dx = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{【2】 (1)} \quad \int_1^2 (-3)dx &= \left[-3x \right]_1^2 \\ &= -3(2-1) \\ &= -\mathbf{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_0^3 (2x-1)dx &= \left[x^2 - x \right]_0^3 \\ &= (3^2 - 3) - (0^2 - 0) \\ &= (9 - 3) - 0 = \mathbf{6} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^3 + 2^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^3 + 0^2 \right) \\ &= (4 - 8 + 4) - 0 = \mathbf{0} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \int_{-2}^6 (x+2)^3 dx &= \int_{-2}^6 (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x \right]_{-2}^6 \\ &= \mathbf{1024} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

<別解>

$$\begin{aligned} \int_{-2}^6 (x+2)^3 dx &= \left[\frac{1}{4}(x+2)^4 \right]_{-2}^6 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 8^4 = \mathbf{1024} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \int_{-3}^0 x(x+3)dx &= \int_{-3}^0 (x^2 + 3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 \\ &= \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 \right) - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 \right\} \\ &= 0 - \left(-9 + \frac{27}{2} \right) \\ &= -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

<別解>

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 x(x+3)dx &= -\frac{\{0 - (-3)\}^3}{6} \\ &= -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^2 \\
 &= \left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \right) \\
 &\quad - \left\{ \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2 \cdot (-1) \right\} \\
 &= -\frac{10}{3} - \frac{7}{6} \\
 &= -\frac{9}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

<別解>

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx &= \int_{-1}^2 (x-2)(x+1) dx \\
 &= -\frac{\{2 - (-1)\}^3}{6} \\
 &= -\frac{9}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

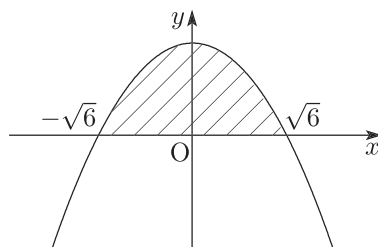
(7) $f(x) = x^3$ は奇関数より

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = 0 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \int_{-1}^1 (x^3 + 3x^2 - x + 1) dx &= 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx \\
 &= 2 \left[x^3 + x \right]_0^1 \\
 &= 4 \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

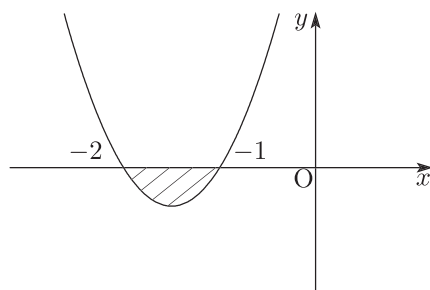
- 【3】 (1) $y = -x^2 + 6$ のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} y dx \\
 &= - \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (x^2 - 6) dx \\
 &= - \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} (x + \sqrt{6}) (x - \sqrt{6}) dx \\
 &= \frac{\{\sqrt{6} - (-\sqrt{6})\}^3}{6} \\
 &= 8\sqrt{6} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



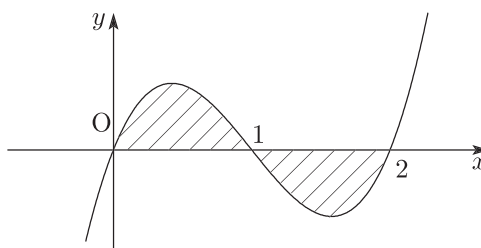
- (2) $y = x^2 + 3x + 2$ のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^{-1} (-y) dx \\
 &= - \int_{-2}^{-1} (x+2)(x+1) dx \\
 &= \frac{\{-1 - (-2)\}^3}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



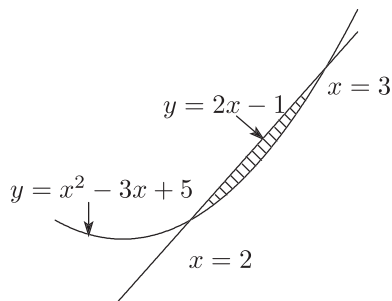
- (3) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 y dx + \int_1^2 (-y) dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\
 &\quad - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



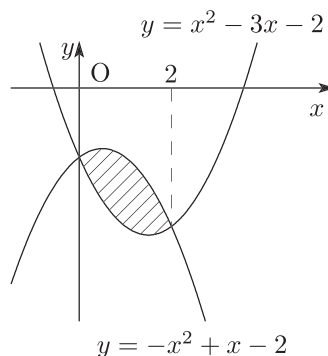
- 【4】 (1) 曲線と直線のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_2^3 \{ (2x-1) - (x^2-3x+5) \} dx \\
 &= - \int_2^3 (x^2-5x+6) dx \\
 &= - \int_2^3 (x-2)(x-3) dx \\
 &= \frac{(3-2)^2}{6} = \frac{1}{6} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



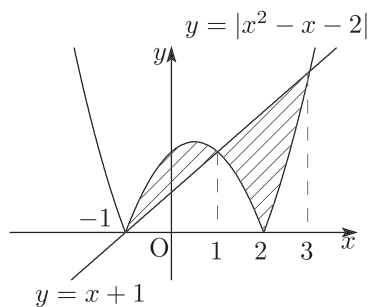
- (2) 2つの曲線のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 \{ (-x^2+x-2) - (x^2-3x-2) \} dx \\
 &= -2 \int_0^2 x(x-2) dx \\
 &= 2 \cdot \frac{(2-0)^3}{6} = \frac{8}{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



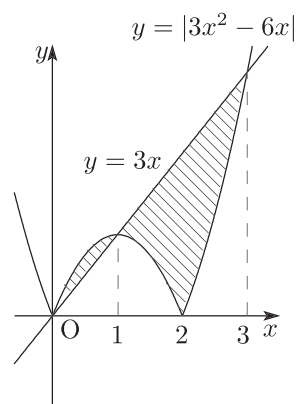
- (3) 曲線と直線のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_2^3 \{ (x+1) - (x^2-x-2) \} dx \\
 &+ \int_1^2 \{ (x+1) - \{ -(x^2-x-2) \} \} dx \\
 &+ \int_{-1}^1 \{ -(x^2-x-2) - (x+1) \} dx \\
 &= \int_2^3 (-x^2+2x+3) dx \\
 &+ \int_1^2 (x^2-1) dx - \int_{-1}^1 (x^2-1) dx \\
 &= \frac{5}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \\
 &= \frac{13}{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



- (4) 曲線と直線のグラフは右の図のようになるから、求める斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_2^3 \{3x - (3x^2 - 6x)\} dx \\
 &+ \int_1^2 [3x - \{-(3x^2 - 6x)\}] dx \\
 &+ \int_0^1 \{-(3x^2 - 6x) - 3x\} dx \\
 &= -3 \int_2^3 (x^2 - 3x) dx \\
 &\quad + 3 \int_1^2 (x^2 - x) dx - 3 \int_0^1 (x^2 - x) dx \\
 &= \frac{7}{2} + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{13}{2} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$



【5】
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-1}^x (t^2 + 2t - 3) dt \\ &= \int_{-1}^x (t-1)(t+3) dt \end{aligned}$$

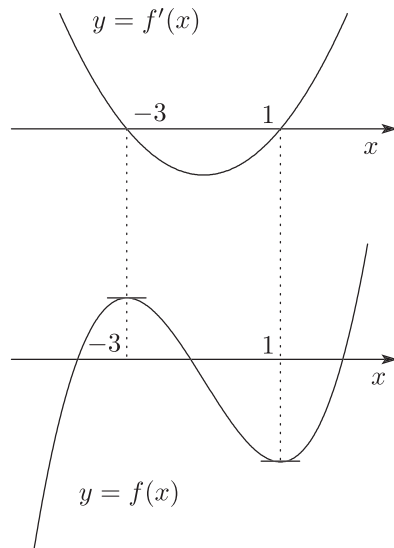
であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-1}^x (t-1)(t+3) dt \\ &= (x-1)(x+3) \end{aligned}$$

ゆえに $y = f'(x)$, $y = f(x)$ のグラフは右のようになり, $f(x)$ は $x = 1$ で極小となる.

求める極小値は

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_{-1}^1 (t^2 + 2t - 3) dt \\ &= 2 \int_0^1 (t^2 - 3) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 - 3t \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \\ &= -\frac{16}{3} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



【6】 (1) $a = \int_0^1 f(t)dt, \quad b = \int_0^2 f(t)dt$

とおくと

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

したがって

$$a = \int_0^1 (t^2 + at + b)dt = \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + b$$

$$b = \int_0^2 (t^2 + at + b)dt = \frac{8}{3} + \frac{4a}{2} + 2b$$

これを解いて

$$\therefore a = -\frac{14}{15}, \quad b = -\frac{4}{5}$$

よって求める関数は

$$f(x) = x^2 - \frac{14}{15}x - \frac{4}{5} \quad (\text{答})$$

(2) $f(x) = 1 + x \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 t f(t)dt$

ここで

$$a = \int_0^1 f(t)dt, \quad b = \int_0^1 t f(t)dt$$

とおくと

$$f(x) = 1 + ax - b = ax + (1 - b)$$

したがって

$$a = \int_0^1 \{at + (1 - b)\}dt = \frac{a}{2} + 1 - b$$

$$b = \int_0^1 \{at^2 + (1 - b)t\}dt = \frac{a}{3} + \frac{1 - b}{2}$$

これを解いて

$$a = \frac{12}{13}, \quad b = \frac{7}{13}$$

よって求める関数は

$$f(x) = \frac{12}{13}x + \frac{6}{13} \quad (\text{答})$$

【7】 両辺を x で微分すると

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

$x = 1$ のとき, 両辺 = 0 より

$$1 - 3 + a = 0 \quad \therefore \quad a = 2$$

【8】 $2x < 0$ のとき

$$F(x) = \int_0^1 (t - 2x) dt = \frac{1}{2} - 2x$$

$0 \leq 2x < 1$ のとき

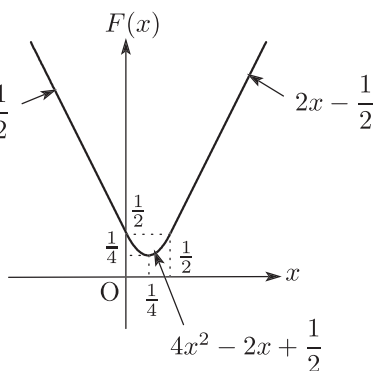
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2x} (-t + 2x) dt + \int_{2x}^1 (t - 2x) dt \\ &= \left[-\frac{t^2}{2} + 2xt \right]_0^{2x} + \left[\frac{t^2}{2} - 2xt \right]_{2x}^1 \\ &= 2 \left\{ -\frac{(2x)^2}{2} + (2x)^2 \right\} + \frac{1}{2} - 2x \\ &= 4x^2 - 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$1 \leq 2x$ のとき

$$\int_0^1 (-t + 2x) dt = -\frac{1}{2} + 2x$$

したがって

$$F(x) = \begin{cases} -2x + \frac{1}{2} & (x < 0) \\ 4x^2 - 2x + \frac{1}{2} & \left(0 \leq x < \frac{1}{2} \right) \\ 2x - \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2} \leq x \right) \end{cases}$$



$$4x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 4 \left(x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{4} \text{ より}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ のとき 最小値 } \frac{1}{4}$$

3章 ベクトル (1)

問題

【1】 (1) 与えられた条件より

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$$

両辺2乗して

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\sqrt{6})^2 \\ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 6 \end{aligned}$$

整理して

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(1 + 9 - 6) = 2 \quad (\text{答})$$

(2) (1) の結果より

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

(3) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 \cdot 9 - 2^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $|\vec{a} + t\vec{b}| \geq 0$ より

$$|\vec{a} + t\vec{b}| \text{ が最小} \iff |\vec{a} + t\vec{b}|^2 \text{ が最小}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + t^2 |\vec{b}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 9t^2 + 4t + 1 \\ &= 9\left(t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{5}{9} \end{aligned}$$

したがって $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$, すなわち $|\vec{a} + t\vec{b}|$ を最小にする t の値は,

$$t = -\frac{2}{9} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 \text{【2】 (1)} \quad \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{AB} \\
 &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

より, C の座標は **(5, 12)** (答)

$$(2) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 12 \cdot 5 + (-5) \cdot 12 = 0$$

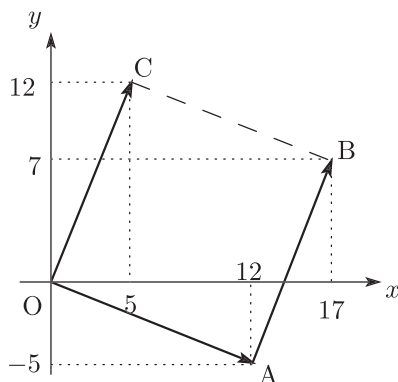
ゆえに

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}|} = 0 \quad (\text{答})$$

$$(3) \quad |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}| = 13 \quad \text{かつ} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

であるから, 平行四辺形 OABC は正方形である. その面積 S は

$$S = 13^2 = \mathbf{169} \quad (\text{答})$$



【3】 3点 A, B, H は共線であるから

$$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB} \quad (t \text{ は実数})$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} \\ &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \\ &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad \dots (*)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \iff \left\{ (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \right\} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \iff (1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - (1-t)|\overrightarrow{OA}|^2 + t|\overrightarrow{OB}|^2 - t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0\end{aligned}$$

ここで

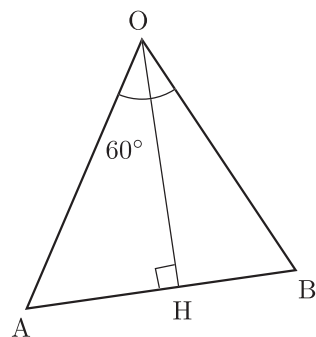
$$|\overrightarrow{OA}| = 5, \quad |\overrightarrow{OB}| = 4, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 10$$

であるから, これを代入して

$$\begin{aligned}(1-2t) \cdot 10 - (1-t) \cdot 5^2 + t \cdot 4^2 &= 0 \\ 21t &= 15 \\ t &= \frac{5}{7}\end{aligned}$$

よって, (*) とから

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{OB} \quad (\text{答})$$



【4】 (1) 始点を A にそろえる.

$$-\overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \overrightarrow{0}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{6} \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}\end{aligned}$$

ここで

$$\overrightarrow{AD}' = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}$$

とすると, $\overrightarrow{AD}' = \frac{6}{5}\overrightarrow{AP}$ より D' は直線 AP 上にあり, さらに線分 BC を $3:2$ に内分する点である. すなわち D' と D は一致する. よって

$$BD : DC = \mathbf{3 : 2} \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD}$$

より, P は線分 AD を $5:1$ に内分する点である. つまり, $\triangle ABC$ の内部にある.

〔証明終〕

- 【5】 求める直線上の点を $P(x, y)$ とし, 点 A, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{p}$ とする.
 またベクトルの成分を縦書きで表示する.

- (1) 求める直線のベクトル方程式は, t を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$$

となる. すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ 1 + 3t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 4 - 2t & \dots \textcircled{1} \\ y = 1 + 3t & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \times 2$ より t を消去すると

$$3x + 2y = 14 \quad (\text{答})$$

- (2) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

求める直線は点 A を通り, $\vec{AB}$ を方向ベクトルとする直線であるから, t を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{AB}$$

となる. すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5t \\ 4 - 6t \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = -3 + 5t & \dots \textcircled{3} \\ y = 4 - 6t & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$\textcircled{3} \times 6 + \textcircled{4} \times 5$ より t を消去すると

$$6x + 5y = 2 \quad (\text{答})$$

- (3) 求める直線は点 A を通り, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする直線であるから,

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x + 2 \\ y - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$3(x + 2) + 4(y - 4) = 0$$

よって求める直線は

$$3x + 4y = 10 \quad (\text{答})$$

【6】 求める円周上の点を $P(x, y)$, P の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする.

(1) 求める円の半径を r とすると,

$$r = |\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 6-3 \\ 6-2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25} = 5$$

ゆえに $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ として

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{a}| &= 5 \\ \left| \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| &= 5 \end{aligned}$$

よって求める円の方程式は

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25 \quad (\text{答})$$

(2) 【解 1】

求める円の中心を $C(\vec{c})$ とすると, C は AB の中点であるから

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また半径を r とすると

$$\begin{aligned} r &= |\overrightarrow{CA}| \\ &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{c}| &= \sqrt{5} \\ \left| \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

両辺 2 乗して, 求める円の方程式は

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad (\text{答})$$

【解 2】

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とすると、円周上の点 P に対し $AP \perp BP$ であるから、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

となる。これは点 P が点 A または点 B と一致するときにも成立する。よって

$$\begin{aligned} (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) &= 0 \\ \begin{pmatrix} x-1 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ (x-1)(x-3) + (y-4)y &= 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに求める円の方程式は

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad (\text{答})$$

【7】 原点を O とする.

$$(1) \quad \left| 2\vec{p} - \vec{a} \right| = 6 \text{ より}$$
$$\left| \vec{p} - \frac{\vec{a}}{2} \right| = 3$$

よって点 P の軌跡は

線分 OA の中点を中心とする半径 3 の円 (答)

である.

$$(2) \quad (2\vec{p} - \vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \text{ より,}$$
$$\left(\vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

ここで, 辺 AB の中点を M とすると, $\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

ゆえに

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$
$$\therefore \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \cdots (*)$$

点 M と点 P が一致するときは, 点 P は辺 AB の中点と一致する.

点 M と点 P が一致しないときは, (*) から

$$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AB}$$

である. よって, 点 P の軌跡は,

辺 AB の垂直二等分線 (答)

である.

(3) 与式の両辺を 2 乗して,

$$\left| \vec{p} - \vec{a} \right|^2 = 4 \left| \vec{p} - \vec{b} \right|^2$$
$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 4 (\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{b})$$
$$\left| \vec{p} \right|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{p} + \left| \vec{a} \right|^2 = 4 \left(\left| \vec{p} \right|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{p} + \left| \vec{b} \right|^2 \right)$$
$$3\left| \vec{p} \right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{p} - 8\vec{b} \cdot \vec{p} - \left| \vec{a} \right|^2 + 4\left| \vec{b} \right|^2 = 0$$
$$3\left| \vec{p} \right|^2 + 2(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot \vec{p} - (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$
$$\{3\vec{p} - (\vec{a} + 2\vec{b})\} \cdot \{\vec{p} + (\vec{a} - 2\vec{b})\} = 0$$
$$\left(\vec{p} - \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2+1} \right) \cdot \left(\vec{p} - \frac{-\vec{a} + 2\vec{b}}{2-1} \right) = 0$$

よって, 点 P の軌跡は,

線分 AB を 2 : 1 に内分, 外分する点をそれぞれ C, D とするとき,
線分 CD を直径とする円 (答)

【8】 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}, \quad s+t \leq 2, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$

$s \geq 0, \quad t \geq 0$ より $0 \leq s+t \leq 2$.

ここで $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$ とし, $s+t=k$ とおく.

(i) $0 < s+t \leq 2$ のとき

$$\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1, \quad \frac{s}{k} \geq 0, \quad \frac{t}{k} \geq 0 \quad \cdots (*)$$

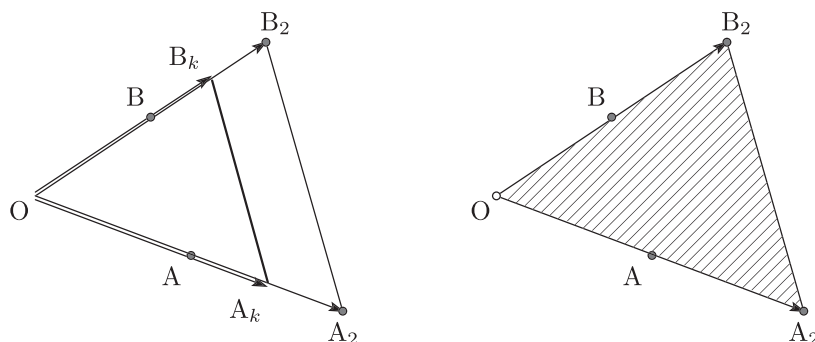
であり,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{s}{k} (k\overrightarrow{a}) + \frac{t}{k} (k\overrightarrow{b}) = \frac{s}{k} \overrightarrow{a_k} + \frac{t}{k} \overrightarrow{b_k}$$

(ただし $\overrightarrow{a_k} = k\overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{b_k} = k\overrightarrow{b}$ とおいた)

半直線 OA, OB 上の 2 点 A_k, B_k をそれぞれ $\overrightarrow{OA_k} = \overrightarrow{a_k}, \quad \overrightarrow{OB_k} = \overrightarrow{b_k}$ で定めると, (*) より点 P は左下図の線分 $A_k B_k$ 上を動く (両端含む).

ここで k を $0 < k \leq 2$ の範囲で動かすと, 線分 $A_k B_k$ は平行に移動するから, P は右下図の 3 角形 $OA_2 B_2$ の内部および周上を動く (ただし O をのぞく).



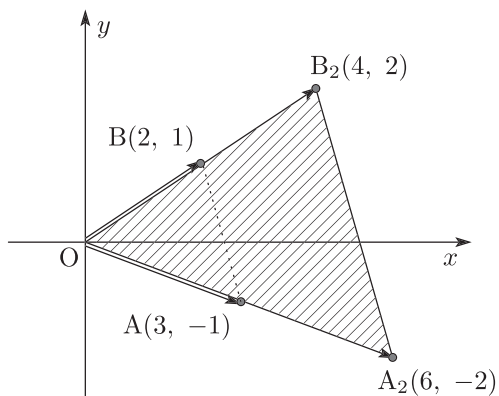
(ii) $k=0$ のとき

$$s+t=0, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0 \text{ より, } s=t=0$$

このとき $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{0}$ より P は原点 O と一致する.

以上より，求める領域は3角形 OA_2B_2 の内部および周上.

$A(3, -1)$, $B(2, 1)$ より，求める領域は下図のようになる. (答)



4章 ベクトル (2)

問題

$$\begin{aligned} \text{【1】} \quad \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} a \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり, 3点 A, B, C が共線 (同一直線上にある) のとき,

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \quad \cdots (*)$$

をみたす実数 k が存在する.

$$(*) \iff \begin{pmatrix} a-1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{cases} a-1 = 3k & \cdots \textcircled{1} \\ -5 = -3k & \cdots \textcircled{2} \\ 5 = k(a-3) & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

② より

$$k = \frac{5}{3}$$

① より

$$a = 3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = 6$$

これらは ③ をみたすから, 求める a の値は

$$a = 6 \quad (\text{答})$$

【2】 $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$ をみたす実数 α, β が存在すればよく,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\alpha + 2\beta \\ -\alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{cases} x+1 = 3\alpha + 2\beta \\ 2x = -\alpha + 3\beta \\ 3x = 2\alpha + 4\beta \end{cases}$$

これを解くと, $x = \frac{10}{7}, (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{7}, 1\right)$

よって, $x = \frac{10}{7}$ (答)

【3】

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AB}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{\text{AC}} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで $\theta = \angle \text{BAC}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 + 2 - 4 = -6 \\ |\overrightarrow{\text{AB}}| &= \sqrt{6}, \quad |\overrightarrow{\text{AC}}| = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

であるから

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}}{|\overrightarrow{\text{AB}}| \cdot |\overrightarrow{\text{AC}}|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \quad (\text{答})$$

また 3 角形 ABC の面積を S とすると,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{\text{AB}}| |\overrightarrow{\text{AC}}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

【4】 (1) l_1 は、O を通り $\overrightarrow{OA}$ に平行な直線であるから、 t を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

よって

$$l_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は実数}) \quad (\text{答})$$

同様に l_2 は、B を通り $\overrightarrow{BC}$ に平行な直線であるから、 s を実数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix}$$

よって

$$l_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (s \text{ は実数}) \quad (\text{答})$$

(2) l_1 と l_2 の交点を求める. 交点において

$$t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{cases} 0 = 1 + s & \dots\dots ① \\ 2t = s & \dots\dots ② \\ t = 2 - 2s & \dots\dots ③ \end{cases}$$

をみたす s, t を求める. ① より

$$s = -1$$

② に代入して

$$2t = -1 \quad \therefore \quad t = -\frac{1}{2}$$

ところが $t = -\frac{1}{2}$, $s = -1$ は ③ をみたさない.

ゆえに l_1 と l_2 の交点は存在しない. すなわち直線 l_1 と直線 l_2 は交わらない.

〔証明終〕

- (3) l_1 と l_2 のどちらにも直交する直線と l_1, l_2 の交点を T, S とおくと, 求める直線の方法ベクトルは $\overrightarrow{TS}$ である.

$$\overrightarrow{OT} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表せるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{TS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OT} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$l_1 \perp \overrightarrow{TS}$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ -5t+2 &= 0 \\ t &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

また $l_2 \perp \overrightarrow{TS}$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1+s \\ s-2t \\ 2-2s-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ 6s-3 &= 0 \\ s &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

以上より

$$\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad // \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

また, T の座標は

$$\left(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

であることから, 求める直線のベクトル方程式は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (u \text{ は実数}) \quad (\text{答})$$

- 【5】 (1) 各辺の長さが1であるから

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

また、各面が正三角形であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$\vec{PB}$ と $\vec{PC}$ は1次独立であるから、A から平面 PBC に下ろした垂線の足 H は、
s, t を実数として

$$\vec{PH} = s\vec{b} + t\vec{c}$$

とおくことができ、

$$\vec{AH} = \vec{PH} - \vec{PA} = s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}$$

ここで $\vec{AH} \perp \vec{PB}$, $\vec{AH} \perp \vec{PC}$ であるから、

$$\begin{aligned} \vec{PB} \cdot \vec{AH} &= \vec{b} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) \\ &= s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{PC} \cdot \vec{AH} &= \vec{c} \cdot (s\vec{b} + t\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}s + t - \frac{1}{2} = 0 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ② より

$$s = \frac{1}{3}, \quad t = \frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\vec{PH} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \quad (\text{答})$$

- (2) $\triangle PBC$ は1辺の長さ1の正三角形であるから、その面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

また

$$\vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \vec{a}$$

より

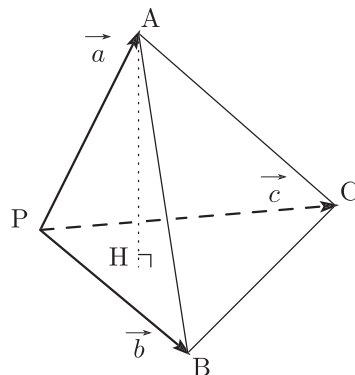
$$\begin{aligned} |\vec{AH}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + \frac{2}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ゆえに

$$|\vec{AH}| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

よって求める体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \quad (\text{答})$$



【6】 (1)

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}}{8} - \frac{4}{7}\overrightarrow{a} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{a} + \frac{3}{8}\overrightarrow{b} + \frac{5}{8}\overrightarrow{c}$$

(2)

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} - \overrightarrow{a} = -\frac{5}{7}\overrightarrow{a} + \frac{3}{16}\overrightarrow{b} + \frac{5}{16}\overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AR}$ とする.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \left(1 - \frac{5}{7}k\right)\overrightarrow{a} + \left(\frac{3}{16}k\right)\overrightarrow{b} + \left(\frac{5}{16}k\right)\overrightarrow{c}$$

S は△ OBC 上にあるので

$$1 - \frac{5}{7}k = 0 \quad \therefore k = \frac{7}{5}$$

よって

$$AR : AS = 1 : \frac{7}{5} = 5 : 7$$

(3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \angle AOQ$ より

$$\overrightarrow{a} \cdot \left(\frac{3}{8}\overrightarrow{b} + \frac{5}{8}\overrightarrow{c}\right) = |\overrightarrow{a}| \left|\frac{3\overrightarrow{b} + 5\overrightarrow{c}}{8}\right| \cos \angle AOQ \quad \dots (*)$$

正四面体の一辺の長さを l とおく.

$$|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = l, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = l^2 \cos 60^\circ = \frac{l^2}{2}$$

(*) より

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{5}{8} \cdot \frac{l^2}{2} = l \cdot \frac{\sqrt{9l^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{l^2}{2} + 25l^2}}{8} \cos \angle AOQ$$

よって

$$\cos \angle AOQ = \frac{4}{7}$$

【7】 ■ 確認

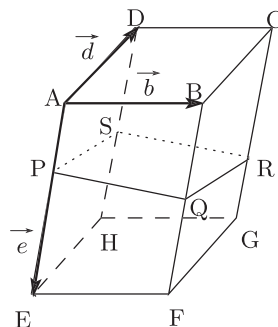
4点 P, Q, R, S は同一平面上にあるので,

$$\overrightarrow{PS} = m\overrightarrow{PQ} + n\overrightarrow{PR} \quad (m, n \text{ は実数})$$

と書ける. $\overrightarrow{PS}$ を 2 通りで表すことを目標とする.

■ 解答

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= -p\vec{e} + \vec{b} + q\vec{e} \\ &= \vec{b} + (q-p)\vec{e} \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR} \\ &= -p\vec{e} + \vec{b} + \vec{d} + r\vec{e} \\ &= \vec{b} + \vec{d} + (r-p)\vec{e} \end{aligned}$$



(2) 点 S は平面 PQR 上にあるから,

$$\overrightarrow{PS} = m\overrightarrow{PQ} + n\overrightarrow{PR} \quad (m, n \text{ は実数})$$

と表せる. (1) より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= m\{\vec{b} + (q-p)\vec{e}\} + n\{\vec{b} + \vec{d} + (r-p)\vec{e}\} \\ &= (m+n)\vec{b} + n\vec{d} + \{m(q-p) + n(r-p)\}\vec{e} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} = -p\vec{e} + \vec{d} + s\vec{e} \\ &= \vec{d} + (s-p)\vec{e} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①と②とを比較すると,

$$\begin{cases} m+n=0 \\ n=1 \\ m(q-p) + n(r-p) = s-p \end{cases}$$

よって,

$$s = p - q + r$$

(3) $p+r=1$ を $s = p - q + r$ に代入すると,

$$s = 1 - q$$

$0 < q < 1$ より,

$$0 < s < 1, \quad \overrightarrow{DS} = s\overrightarrow{DH}$$

が成り立つ. よって, 点 S は辺 DH 上の点であり, 平面 PQR は辺 DH と交わる.

【8】 ■ テーマ

- ・ 平面と直線の交点
- ・ 四面体の体積比

■ 解答

$$(1) \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{p} - \vec{a}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned} 2\vec{p} + 3(\vec{p} - \vec{a}) + 5(\vec{p} - \vec{b}) + 7(\vec{p} - \vec{c}) &= \vec{0} \\ 17\vec{p} &= 3\vec{a} + 5\vec{b} + 7\vec{c} \\ \therefore \vec{p} &= \frac{1}{17}(3\vec{a} + 5\vec{b} + 7\vec{c}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{OT} = k\vec{p} = \frac{3k}{17}\vec{a} + \frac{5k}{17}\vec{b} + \frac{7k}{17}\vec{c}$$

T は平面 ABC 上にあるので

$$\frac{3k}{17} + \frac{5k}{17} + \frac{7k}{17} = 1 \quad \therefore k = \frac{17}{15}$$

よって

$$\overrightarrow{OT} = \frac{17}{15}\vec{p}$$

(4) 四面体 OABC の体積を, OABC のように表す. このとき, (3) より

$$PABC = \frac{2}{17}OABC \quad \dots \textcircled{1}$$

一方, 図2を参照すると, 面積比と線分比の関係は

$$\frac{\triangle OBP}{\triangle OAP} = \frac{\triangle OBT}{\triangle OAT} = \frac{BT}{AT}$$

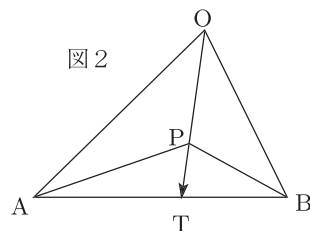
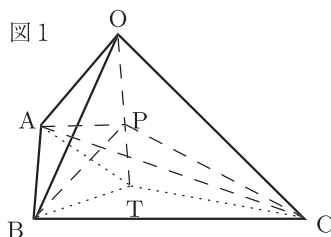
となり, これを3次元に応用すれば

$$PBCO : PCOA : POAB = \triangle TBC : \triangle TCA : \triangle TAB$$

また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{15}(3\vec{a} + 5\vec{b} + 7\vec{c}) - \vec{a} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{7}{15}(\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{15}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{12}{15} \cdot \frac{5\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{12} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle TAB : \triangle TAC = 7 : 5$$



そして

$$\begin{aligned}\triangle TBC &= \frac{3}{15} \triangle ABC = \frac{1}{5} \triangle ABC \\ \triangle TAB &= \frac{7}{12} \cdot \frac{12}{15} \triangle ABC = \frac{7}{15} \triangle ABC \\ \triangle TAC &= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5} \triangle ABC = \frac{1}{3} \triangle ABC\end{aligned}$$

これより

$$\triangle TBC : \triangle TCA : \triangle TAB = 3 : 5 : 7$$

①より

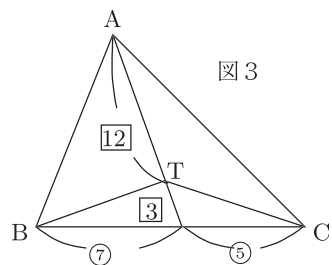
$$PBCO + PCOA + POAB = \frac{15}{17} OABC$$

であるから

$$\left. \begin{aligned}PBCO &= \frac{3}{15} \cdot \frac{15}{17} OABC = \frac{3}{17} OABC \\ PCOA &= \frac{5}{15} \cdot \frac{15}{17} OABC = \frac{5}{17} OABC \\ POAB &= \frac{7}{15} \cdot \frac{15}{17} OABC = \frac{7}{17} OABC\end{aligned} \right\} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より, 求める体積比は

$$2 : 3 : 5 : 7$$





会員番号

氏 名