

高2 難関大数学

～数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 総合演習～



1 章 確率, 数列 (1)

問題

【1】 持ち点が +1 となるのは $\frac{1}{3}$, -1 となるのは $\frac{2}{3}$ である.

(1) 持ち点と回数の変化をグラフに表すと, 該当するのは, 点 P に到達するときであり, その確率は

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{243} \quad (\text{答})$$

(2) 同様にして, D または E に到達するときを求めればよい. いずれの場合も, $A \rightarrow B \rightarrow C$ と通過して D または E に向かう.

$A \rightarrow B$ となる確率 $P_{A \rightarrow B}$ は

$$P_{A \rightarrow B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

であり, $B \rightarrow C$ となる確率 $P_{B \rightarrow C}$ も同様に $\frac{4}{9}$ である.

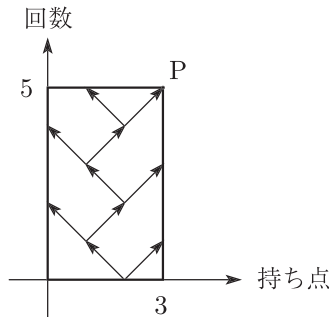
次に, $C \rightarrow D$, $C \rightarrow E$ となる確率は, それぞれ

$$P_{C \rightarrow D} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \quad P_{C \rightarrow E} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

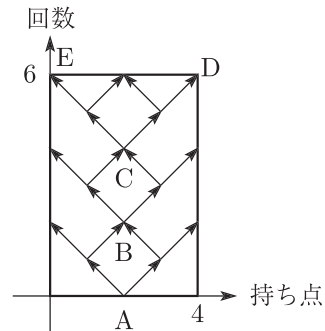
である. したがって, 求める確率は

$$P_{A \rightarrow B} \cdot P_{B \rightarrow C} \cdot (P_{C \rightarrow D} + P_{C \rightarrow E}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} \right) = \frac{80}{729} \quad (\text{答})$$

(1)



(2)



- 【2】(1) k 枚取り出す組み合わせは全部で ${}_{40}C_k$ 通りである. このうち題意をみたすような取り出し方は, まず, どの数を 3 枚取り出すかで 10 通り, その数のカード 4 枚のうちどの 3 枚を取り出すかで ${}_4C_3$ 通り, 残り $(k-3)$ 枚を取り出すが, 残る 9 種類のカードのうちどの $(k-3)$ 種類を取り出すかで ${}_9C_{k-3}$ 通り, 各数のカード 4 枚のうちどれを取るかで 4^{k-3} 通りある. したがって,

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{10 \cdot {}_4C_3 \cdot {}_9C_{k-3} \cdot 4^{k-3}}{{}_{40}C_k} \\ &= \frac{10 \cdot {}_9C_{k-3} \cdot 4^{k-2}}{{}_{40}C_k} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad p(k) &= \frac{10 \cdot \frac{9!}{(k-3)! \cdot (12-k)!} \cdot 4^{k-2}}{\frac{40!}{k! \cdot (40-k)!}} \\ &= \frac{10 \cdot 9!}{40!} \cdot \frac{k! \cdot (40-k)! \cdot 4^{k-2}}{(k-3)! \cdot (12-k)!} \\ f(k) &= \frac{\frac{(k-1)!(41-k)! \cdot 4^{k-3}}{(k-4)!(13-k)!}}{\frac{k!(40-k)! \cdot 4^{k-2}}{(k-3)!(12-k)!}} \\ &= \frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{p(k-1)}{p(k)} - 1 &= \frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)} - 1 \\ &= \frac{(41-k)(k-3) - 4k(13-k)}{4k(13-k)} \\ &= \frac{3k^2 - 8k - 123}{4k(13-k)} \\ &= \frac{(3k-8)k - 123}{4k(13-k)} \end{aligned}$$

この分母は正であるので, 分子の正負を考える.

$(3k-8)k - 123$ に $k = 4, 5, 6, 7, 8, \dots$ と代入していくと, 4~7 では負, 8 以後では正とわかるから,

$$4 \leq k \leq 7 \text{ のとき, } p(k-1) < p(k)$$

$$8 \leq k \leq 12 \text{ のとき, } p(k-1) > p(k)$$

$$p(3) < p(4) < \dots < p(6) < p(7)$$

$$p(7) > p(8) > p(9) > \dots$$

したがって, $p(k)$ を最大にする k は, **7** である. (答)

【3】 (1) $1, a, b$ が等差数列をなすので,

$$2a = b + 1 \quad \dots\dots ① \quad (\text{等差中項})$$

$1, b^2, a^2$ が等比数列をなすので,

$$b^4 = a^2 \quad \dots\dots ② \quad (\text{等比中項})$$

② より,

$$(b^2 - a)(b^2 + a) = 0$$

(i) $a = b^2$ のとき, ① より,

$$\begin{aligned} 2b^2 - b - 1 &= 0 \\ \iff (b - 1)(2b + 1) &= 0 \\ \therefore b &= 1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって,

$$(a, b) = (1, 1), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

(ii) $a = -b^2$ のとき, ① より,

$$2b^2 + b + 1 = 0$$

しかし, これを満たす実数 b は存在しない.

以上より,

$$(a, b) = (1, 1), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right) \quad (\text{答})$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a , 公差を d とすると,

$$a_n = a + (n-1)d$$

等比数列 $\{b_n\}$ の初項を b , 公比を r とすると,

$$b_n = br^{n-1} \quad (b \text{ と } r \text{ は } 1 \text{ より大きい整数})$$

$c_1 = a_1 + b_1 = 2$, $c_2 = a_2 + b_2 = 5$, $c_3 = a_3 + b_3 = 17$ であるので,

$$\begin{cases} a + b = 2 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a + d + br = 5 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ a + 2d + br^2 = 17 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

① から,

$$a = 2 - b$$

これを ② に代入して,

$$\begin{aligned} 2 - b + d + br &= 5 \\ \therefore d &= 3 + b - br \end{aligned}$$

これらを ③ に代入して, a , d を消去すると,

$$\begin{aligned} 2 - b + 2(3 + b - br) + br^2 &= 17 \\ \therefore b(1 - r)^2 &= 9 \end{aligned}$$

ここで, $b (> 1)$ と $1 - r$ はともに整数であるので, 9 の約数を考えると,

$$\begin{aligned} b &= 9, \quad (1 - r)^2 = 1 \\ \therefore b &= 9, \quad r = 2 \quad (\because r > 1) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} a &= -7, \quad d = -6 \\ \therefore a_n &= -1 - 6n, \quad b_n = 9 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和は $\frac{n(-8-6n)}{2}$,

数列 $\{b_n\}$ の第 n 項までの和は $9(2^n - 1)$ であるので,

数列 $\{c_n\}$ の第 n 項までの和は

$$\frac{n(-8-6n)}{2} + 9(2^n - 1) = \mathbf{9 \cdot 2^n - 3n^2 - 4n - 9} \quad (\text{答})$$

【4】 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とし, 数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする.

$$\begin{array}{ccccccc} a_n : & 6 & & 24 & & 60 & & 120 & & 210 & & 336 & & 504 \\ & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & \\ b_n : & & 18 & & 36 & & 60 & & 90 & & 126 & & 168 \\ & & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & \\ c_n : & & & 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & 42 \end{array}$$

これより, 数列 $\{c_n\}$ は, 初項 18, 公差 6 の等差数列で,

$$c_n = 18 + 6(n-1) = 12 + 6n$$

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 18 + \sum_{k=1}^{n-1} (12 + 6k) \\ &= 18 + 12(n-1) + 3n(n-1) \\ &= 3n^2 + 9n + 6 \\ &= 3(n^2 + 3n + 2) \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

この式に $n = 1$ を代入してみると,

$$b_1 = 3(1^2 + 3 \cdot 1 + 2) = 18$$

となり, $n = 1$ でも成立するので,

$$b_n = 3(n^2 + 3n + 2) \quad (n \geq 1)$$

よって, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 6 + \sum_{k=1}^{n-1} 3(k^2 + 3k + 2) \\ &= 6 + \frac{1}{2}(n-1)n(2n-1) + \frac{9}{2}(n-1)n + 6(n-1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

この式に $n = 1$ を代入してみると,

$$a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 6$$

となり, $n = 1$ でも成立するので,

$$\begin{aligned} a_n &= n^3 + 3n^2 + 2n \quad (n \geq 1) \\ &= n(n+1)(n+2) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \sum_{k=1}^n a_n &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2 + 5n + 6) \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

■別解

$$4k(k+1)(k+2) = k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)$$

であることに着目すると,

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\
&= \frac{1}{4}[(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3) + (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + \cdots \cdots \\
&\quad \cdots \cdots + \{n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)\}] \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

と求められる.

【5】与えられた数列を,

$$1, \quad | \quad 2, 1 \quad | \quad 3, 2, 1 \quad | \quad 4, 3, 2, 1 \quad | \quad \cdots \cdots$$

と群に分け, それを第1群, 第2群 $\cdots \cdots$ と呼ぶことにする.

(1) $a_{n+1} - a_n > 24$, つまり, 連続する2項の差が初めて24より大きくなるのは,

$$\cdots \cdots, 2, 1 \quad | \quad 26, 25, \cdots \cdots$$

となるときであり, a_n は第25群の末項の1である.

これが初めから数えて何項目にあるかというと,

$$1 + 2 + \cdots \cdots + 25 = \frac{(1+25) \cdot 25}{2} \\ = 325$$

したがって,

$$n = \mathbf{325} \quad (\text{答})$$

(2) (1) を参照して, a_{337} は第26群の $337 - 325 = 12$ 項目であることが分かる. よって,

$$26 - 12 + 1 = \mathbf{15} \quad (\text{答})$$

<注意>

本来は, a_{337} が n 群にあるとすると,

$$\frac{n(n-1)}{2} < 337 \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

となるので, これより n を求める.

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{k=1}^{337} a_k &= \sum_{k=1}^{25} \frac{k(k+1)}{2} + 26 + 25 + \cdots \cdots + 15 \\ &= \sum_{k=1}^{26} \frac{k(k+1)}{2} - \frac{14(14+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{26} k^2 + \sum_{k=1}^{26} k \right) - 7 \cdot 15 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot 26 \cdot 27 \cdot 53 + \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 27 \right) - 105 \\ &= \frac{14}{3} \cdot 26 \cdot 27 - 105 \\ &= \mathbf{3171} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{【6】 (1)} \quad \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^l k &= \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^m \frac{l(l+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^m (l^2 + l) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) + \frac{1}{2} m(m+1) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \sum_{m=1}^n m(m+1)(2m+1+3) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^n m(m+1)(m+2) \\
&= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^n (m^3 + 3m^2 + 2m) \\
&= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + \frac{3}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{2}{2} n(n+1) \right\} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \} \\
&= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad \sum_{k=0}^n 3^{k-1} \left(1 + \frac{1}{2^k} \right) &= \sum_{k=0}^n 3^{k-1} + \sum_{k=0}^n \frac{3^{k-1}}{2^k} \\
&= \frac{3^n - 3^{-1}}{2} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \left(\frac{3}{2} \right)^k \\
&= \frac{3^n}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} - 1 \right\} \\
&= \frac{3^n}{2} + \left(\frac{3}{2} \right)^n - \frac{5}{6} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+1}{k!(k+1)(k+2)} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

よって、与式 = S とすると、

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \right\} \\
&= \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

2章 数列 (2), 数列と確率

問題

【1】(1) a_{n+1} と a_n を x におきかえた方程式

$$x + 2x + 1 = 0$$

を解くと, $x = -\frac{1}{3}$ である. よって, 与えられた漸化式を変形して,

$$a_{n+1} + \frac{1}{3} = -2\left(a_n + \frac{1}{3}\right)$$

となる. したがって, 数列 $\left\{a_n + \frac{1}{3}\right\}$ は, 初項 $a_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, 公比 -2 の等比数列であるので,

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{3} &= \frac{4}{3} \cdot (-2)^{n-1} \\ \therefore a_n &= \frac{4}{3} \cdot (-2)^{n-1} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 与えられた漸化式において, $b_n = na_n$ とおくと,

$$b_{n+1} + 2b_n + 1 = 0$$

また, $b_1 = 1 \cdot a_1 = 1$ であるので, (1) より,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{3n}\{(-2)^{n+1} - 1\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) 与えられた漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} + 2 \cdot \frac{a_n}{n} + 1 = 0$$

ここで, $c_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと,

$$c_{n+1} + 2c_n + 1 = 0$$

また, $c_1 = \frac{a_1}{1} = 1$ であるので, (1) より,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\} \\ \therefore a_n &= \frac{n}{3}\{(-2)^{n+1} - 1\} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $a_1 = 1 \neq 0$, また, $a_k \neq 0$ であるならば, 漸化式から $a_{k+1} \neq 0$

よって, 常に $a_n \neq 0$

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると,

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 - \frac{5}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{ とおくと,}$$

$$b_{n+1} = 2 - 5b_n$$

よって,

$$\begin{aligned} \left(b_{n+1} - \frac{1}{3}\right) &= -5\left(b_n - \frac{1}{3}\right) \\ b_n - \frac{1}{3} &= \left(b_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot (-5)^{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-5)^{n-1} \\ &= \frac{1 + 2(-5)^{n-1}}{3} \\ \therefore a_n &= \frac{3}{1 + 2(-5)^{n-1}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【2】 (1) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ であるので、与えられた漸化式をずらしてみる.

$$S_{n+1} - 2S_n = 2n \quad (n \geq 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_n - 2S_{n-1} = 2(n-1) \quad (n \geq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より、 $n \geq 2$ のとき、

$$(S_{n+1} - S_n) - 2(S_n - S_{n-1}) = 2$$

$$\therefore a_{n+1} - 2a_n = 2 \quad (n \geq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、① で $n = 1$ とおくと、

$$(a_1 + a_2) - 2a_1 = 2$$

$$\therefore a_2 = 2 \quad (\because a_1 = 0)$$

よって、③ は $n = 1$ のときも成り立つ. したがって、

$$a_{n+1} - 2a_n = 2 \quad (\text{答})$$

(2) $a_{n+1} - 2a_n = 2$ を変形すると、

$$a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

であるから、

$$\begin{aligned} a_n + 2 &= (a_1 + 2) \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

したがって、

$$a_n = 2^n - 2 \quad (\text{答})$$

【3】 (1) $a_n = 3^{2n} - 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3^{2(n+1)} - 1 \\ &= 3^{2n+2} - 1 \\ &= 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 \\ &= 9 \cdot 3^{2n} - 1 \\ &= 9(3^{2n} - 1) + 8 \\ &= 9a_n + 8 \end{aligned}$$

よって, 示された.

(証明終)

(2) 数学的帰納法によって示す

(i) $n = 1$ のとき,

$$a_1 = 3^2 - 1 = 8 \quad (8 \text{ の倍数})$$

よって, $n = 1$ のとき, 題意は成り立つ.

(ii) $n = k$ ($k \geq 1$) のとき, 題意が成り立つと仮定する.

すなわち,

$$a_k = (8 \text{ の倍数})$$

が成り立つと仮定する. このとき, (1) より,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 9a_k + 8 \\ &= 9 \cdot (8 \text{ の倍数}) + 8 \\ &= (8 \text{ の倍数}) \end{aligned}$$

よって, $n = k + 1$ のときも, 題意は成り立つ.

以上 (i), (ii) より, すべての自然数 n に対して, 題意が成り立つことが示された.

(証明終)

【4】 (1) $n+1$ 回手順を繰り返した後に碁石が A_0 にあるのは,

(i) n 回手順を繰り返した後に碁石が A_1 にあり, 奇数の目が出る.

(ii) n 回手順を繰り返した後に碁石が A_2 にあり, 偶数の目が出る.

のいずれかである.

最初に碁石は A_0 にあるため, n 回手順を繰り返した後に A_1 にいる確率と A_2 にいる確率は帰納的に等しくなり,

$$\frac{1}{2}(1 - P_n)$$

であるので,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{2}(1 - P_n) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - P_n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P_n \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) (1) より,

$$P_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(P_n - \frac{1}{3}\right)$$

であるので, 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{3}\right\}$ は, 初項が $P_1 - \frac{1}{3}$ で公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列である.
よって,

$$P_n - \frac{1}{3} = \left(P_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$P_1 = 0$ であるので,

$$P_n = \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (\text{答})$$

【5】(1) 点 n に到達するのは,

「点 $n-2$ にいたときに裏が出る」 または 「点 $n-1$ にいたときに表が出る」
場合のどちらかである. したがって,

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} \quad (n \geq 3) \quad (\text{答})$$

(2) (1) の漸化式を 2 通りに変形すると,

$$\begin{cases} p_n - p_{n-1} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - p_{n-2}) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①より,

$$p_n - p_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (p_2 - p_1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

②より,

$$p_n + \frac{1}{2}p_{n-1} = p_2 + \frac{1}{2}p_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

$\{\textcircled{1}' + \textcircled{2}' \times 2\} \div 3$ より,

$$p_n = \frac{1}{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} (p_2 - p_1) + 2 \left(p_2 + \frac{1}{2}p_1\right) \right\} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, 点 1 に到達するのは, 1 回目に表が出たときのみで, 点 2 に到達するのは,
1 回目に裏が出るか, 2 回続けて表が出るかなので,

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

したがって, これらを③に代入して,

$$p_n = \frac{1}{3} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2 \right\} \quad (n \geq 3) \quad (\text{答})$$

【6】 初めに平面と接していた面 (A とする) が n 回目の操作後, また平面と接する確率を p_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) とする.

ここで, 面 A が $n + 1$ 回目の操作後, また平面と接する確率 p_{n+1} を考える.

これが起こるのは, n 回目の操作後, 面 A 以外の面が平面と接しており, 次の操作後に平面と接していない 3 面のうち面 A が平面に接する場合である.

まず, n 回目の操作後, 面 A 以外の面が平面と接している確率は, p_n の余事象を考えればよいから

$$1 - p_n$$

面 A 以外の面が平面と接している場合, 次の操作後に面 A が平面と接する確率は

$$\frac{1}{3}$$

よって,

$$p_{n+1} = (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

これは

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{4} \right)$$

と変形でき, これより

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3} \right)^n \left(p_0 - \frac{1}{4} \right)$$

したがって, $p_0 = 1$ に注意すると

$$p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad (\text{答})$$

3章 論証, 関数と方程式

問題

【1】 $a > 0, b > 0$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} & (\because \text{相加・相乗平均の関係}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \\ &= 2\sqrt{c} & (\because abc = 1)\end{aligned}$$

等号成立は

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \iff a = b$$

のときである.

同様に

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{2}{\sqrt{bc}} = 2\sqrt{a} \quad (\text{等号成立は, } b = c \text{ のとき})$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \geq \frac{2}{\sqrt{ca}} = 2\sqrt{b} \quad (\text{等号成立は, } c = a \text{ のとき})$$

辺々加えると

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \quad (\text{等号成立は, } a = b = c = 1 \text{ のとき})$$

(証明終)

【2】 (1) c が偶数であると仮定する.

すると, a, b, c は 1 以外の共通の約数をもたないことより, a, b はともに奇数である.

ここで, p, q, r を正の整数として

$$a = 2p - 1, \quad b = 2q - 1, \quad c = 2r$$

と表すことができる. これらを条件式に代入して

$$(2p - 1)^2 + (2q - 1)^2 = (2r)^2 \iff 2(p^2 + q^2 - p - q) + 1 = 2r^2$$

この式は左辺が奇数, 右辺が偶数となり, 矛盾する.

よって, c は奇数である.

(証明終)

(2) a, b がともに 3 の倍数でないと仮定する.

正の整数は, k を整数として 3 の倍数で区別すると

$$3k, \quad 3k+1, \quad 3k+2$$

の 3 種類ですべて表され, それらを 2 乗した数を考えると, それぞれ

$$3 \cdot 3k^2, \quad (3k+1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1, \quad (3k+2)^2 = 3(k^2 + 4k + 1) + 1$$

より, 3 で割ったときのあまりは

$$3 \text{ の倍数であるときは } 0, \quad 3 \text{ の倍数でないときは } 1$$

である. したがって, a と b がともに 3 の倍数でないので, $a^2 + b^2$ を 3 で割ったあまりは 2 である.

ところが, c^2 を 3 で割ったあまりは 0 または 1 としかなりえないので, 条件式に矛盾する.

よって, a, b の 1 つは 3 の倍数である.

(証明終)

(3) (1) と条件式より, a, b の一方が偶数, 一方が奇数である.

いま, a を偶数, b を奇数としても一般性は失われない.

a, b がともに 4 の倍数でないと仮定する.

すると, l, m, n を正の整数として

$$a = 4l - 2, \quad b = 2m - 1, \quad c = 2n - 1$$

と表すことができる. これらを条件式に代入して

$$(4l - 2)^2 + (2m - 1)^2 = (2n - 1)^2 \iff (4l - 2)^2 = (2n - 1)^2 - (2m - 1)^2$$

ここで

$$(\text{左辺}) = 16l^2 - 16l + 4 = 4(4l^2 - 4l + 1) = 4(2l - 1)^2$$

$$(\text{右辺}) = \{(2n - 1) + (2m - 1)\}\{(2n - 1) - (2m - 1)\} = 4(n + m - 1)(n - m)$$

であるから

$$(2l - 1)^2 = (n + m - 1)(n - m) \quad \dots\dots(*)$$

いま

$$(n + m - 1) + (n - m) = 2n - 1 : \text{奇数}$$

であるから, $n + m - 1, n - m$ の一方は偶数, 一方は奇数である.

これにより, (*) の右辺は偶数となるが, (*) の左辺は奇数の 2 乗であるから奇数となり, 矛盾する.

よって, a, b の 1 つは 4 の倍数である.

(証明終)

【3】 任意の x, y, z について成立するので

$$x = y = z = 1$$

を代入してみる.

$$1 + 1 + 1 \leq a \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}$$

$$\therefore a \geq \sqrt{3}$$

導かれた条件は, 必要条件であるから, 十分性について確かめる.

$$3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

$$\therefore (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\therefore x + y + z \leq |x + y + z| \leq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

となるから, すべての x, y, z において条件式をみたすので, 十分性が確かめられた.

よって, a の最小値は

$$\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

【4】 (1) $2^x > 0$, $2^{-x} > 0$ より, 相加・相乗平均の関係を用いて

$$t = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$$

等号成立条件は

$$2^x = 2^{-x} \iff x = 0$$

である. よって, t の最小値は

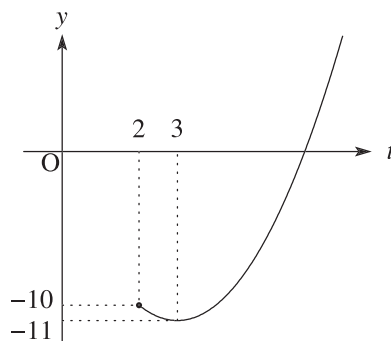
$$2 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= (4^x + 4^{-x}) - 6(2^x + 2^{-x}) \\ &= \{(2^x + 2^{-x})^2 - 2\} - 6(2^x + 2^{-x}) \\ &= (t^2 - 2) - 6t \\ &= t^2 - 6t - 2 \quad (t \geq 2) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad y &= (t-3)^2 - 11 \quad (t \geq 2) \\ \text{より, } t &= 3 \text{ のときに最小となり, その値は} \\ &= -11 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $t = 2^x + 2^{-x}$ ($t \geq 2$) を 2^x の 2 次方程式として解くと

$$\begin{aligned} (2^x)^2 - t \cdot 2^x + 1 &= 0 \\ \therefore 2^x &= \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} \\ t - \sqrt{t^2 - 4} &> t - \sqrt{t^2} = 0 \text{ より} \\ x &= \log_2 \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} \end{aligned}$$



したがって, $t > 2$ のもとで, t が 1 つ定まる

と x はそれに対応して 2 個存在し, $t = 2$ のときは $x = 0$ がただ 1 個存在する.

$y = (t-3)^2 - 11$ (ただし, $t \geq 2$) と $y = a$ のグラフの交点の個数を考えると

$$\begin{cases} a < -11 \text{ のとき} & 0 \\ a = -11, a > -10 \text{ のとき} & 1 \\ a = -10 \text{ のとき} & 2 \quad (\text{一方は, } t = 2) \\ -11 < a < -10 \text{ のとき} & 2 \end{cases}$$

であり, この 1 つの t に対して, x の値は 2 個存在するので

$$\begin{cases} a < -11 \text{ のとき} & 0 \\ a = -11, a > -10 \text{ のとき} & 2 \\ a = -10 \text{ のとき} & 3 \\ -11 < a < -10 \text{ のとき} & 4 \end{cases} \quad (\text{答})$$

【5】 (1) $x + y + z = 1 \iff z = 1 - (x + y)$ より

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= xy + (x + y)z \\ &= xy + (x + y)\{1 - (x + y)\} \\ &= xy + (x + y) - (x + y)^2 \\ &= -x^2 - (y - 1)x - y^2 + y \\ &= -\left(x + \frac{y - 1}{2}\right)^2 + \frac{(y - 1)^2}{4} - y^2 + y \\ &= -\left(x + \frac{y - 1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(3y^2 - 2y - 1) \\ &= -\left(x + \frac{y - 1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

等号は

$$x + \frac{y - 1}{2} = 0 \text{ かつ } y - \frac{1}{3} = 0 \iff x = y = z = \frac{1}{3}$$

のとき成り立つので、求める最大値は $\frac{1}{3}$ (答)

(2)

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$$

であるから、(1)の結果を用いて

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(xy + yz + zx) \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

等号は $x = y = z = \frac{1}{3}$ のとき成り立つので、求める最小値は $\frac{1}{3}$ (答)

【6】 $\cos \theta = t$ とおくと、 $-1 \leq t \leq 1$ であり、

$$\begin{aligned} x^2 - 4x \cos \theta - (2 \sin^2 \theta + \cos \theta + 1) &= x^2 - 4x \cos \theta + 2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 3 \\ &= x^2 - 4xt + 2t^2 - t - 3 \end{aligned}$$

より、 t の 2 次方程式 $2t^2 - (4x+1)t + x^2 - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$ が $-1 \leq t \leq 1$ において少なくとも 1 つの解をもつような x の範囲を求めればよい。

いま、 $\textcircled{1}$ の判別式 $D = 8x^2 + 8x + 25$ は常に正である。

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 - (4x+1)t + x^2 - 3 \\ &= 2 \left\{ t - \left(x + \frac{1}{4} \right) \right\}^2 - \frac{1}{8}(8x^2 + 8x + 25) \end{aligned}$$

とおき、軸 $t = x + \frac{1}{4}$ の位置によって場合分けして考える。

(i) $x + \frac{1}{4} < -1 \iff x < -\frac{5}{4}$ のとき

$f(-1) \leq 0 \leq f(1)$ であればよいので、 $f(-1) = x^2 + 4x$, $f(1) = x^2 - 4x - 2$ より、

$$-4 \leq x \leq 2 - \sqrt{6}$$

$x < -\frac{5}{4}$ と合わせて、 $-4 \leq x < -\frac{5}{4}$

(ii) $-1 \leq x + \frac{1}{4} \leq 1 \iff -\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ のとき

$f(-1) \geq 0$ または $f(1) \geq 0$ であればよいので、

$$x \leq 2 - \sqrt{6}, 0 \leq x$$

$-\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ と合わせて、 $-\frac{5}{4} \leq x \leq 2 - \sqrt{6}$, $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$

(iii) $x + \frac{1}{4} > 1 \iff x > \frac{3}{4}$ のとき

$f(1) \leq 0 \leq f(-1)$ であればよいので、

$$0 \leq x \leq 2 + \sqrt{6}$$

$x > \frac{3}{4}$ と合わせて、 $\frac{3}{4} < x \leq 2 + \sqrt{6}$

以上、(i)～(iii) より、求める x のとる値の範囲は、

$$-4 \leq x \leq 2 - \sqrt{6}, 0 \leq x \leq 2 + \sqrt{6} \quad (\text{答})$$

問題

【1】(1) $AR : RB = t : (1-t)$, $PR : RQ = s : (1-s)$

とおくと,

$$\overrightarrow{OR} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots\dots ①$$

また,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{3}{2}(1-s)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

① と ② は等しく, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ だから,

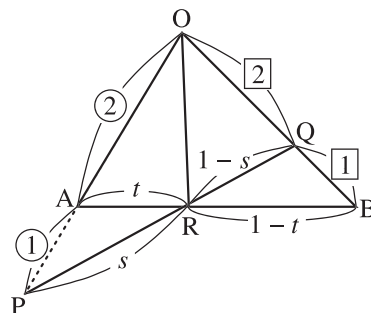
$$\begin{cases} 1-t = \frac{3}{2}(1-s) & \dots\dots ③ \\ t = \frac{2}{3}s & \dots\dots ④ \end{cases}$$

③, ④ を解いて,

$$t = \frac{2}{5}, \quad s = \frac{3}{5}$$

よって,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \quad (\text{答})$$



(2) $PR : RQ = \frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 3 : 2 \quad (\text{答})$

【2】

$$\left\{ \begin{array}{l} |\overrightarrow{OA}| = 1 \quad \dots\dots ① \\ |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{3} \quad \dots\dots ② \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \dots\dots ③ \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} \quad \dots\dots ④ \\ A, B, C \text{ は同一直線上} \quad \dots\dots ⑤ \end{array} \right.$$

①, ③ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - |\overrightarrow{OA}|^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 1 = 0 \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 1 \quad \dots\dots ⑥ \end{aligned}$$

①, ②, ⑥ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 1 - 2 + |\overrightarrow{OB}|^2 = \frac{1}{9} \\ \therefore |\overrightarrow{OB}|^2 &= \frac{10}{9} \\ \therefore |\overrightarrow{OB}| &= \frac{\sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

④, ⑥ より

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OC}| \quad \dots\dots ⑦$$

⑤ より

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (t \text{ は実数})$$

と表され,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= (1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 = 1-t + \frac{10}{9}t = \frac{1}{9}t + 1 \\ |\overrightarrow{OC}|^2 &= (1-t)^2|\overrightarrow{OA}|^2 + 2t(1-t)\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t^2|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= (1-t)^2 \cdot 1^2 + 2t(1-t) \cdot 1 + \frac{10}{9}t^2 \\ &= \frac{1}{9}t^2 + 1 \end{aligned}$$

したがって, ⑦ より

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{9}t + 1\right)^2 &= \frac{1}{9}t^2 + 1 \\ \therefore t(4t-9) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{9}{4} \quad (\because t=0 \text{ のとき } A=C \text{ となり不適}) \end{aligned}$$

より

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{9}{4}\overrightarrow{OB}$$

よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16} \\ \therefore |\overrightarrow{OC}| &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

以上より、 $\triangle OBC$ の面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|)^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OC}| \sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \sqrt{\frac{10}{9} - 1} \\ &= \frac{5}{24} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【3】 (1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \\ &= \frac{t}{2} \vec{a} + \frac{t}{3} \vec{b} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\overrightarrow{OI} = \frac{t}{2} \vec{a} + \frac{t}{3} \vec{b} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

I は $\angle OAB$ の二等分線上にもあるから, s を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= s \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AO}|} \right) \\ &= s \left(\frac{\vec{b} - \vec{a}}{4} + \frac{-\vec{a}}{2} \right) \\ &= -\frac{3}{4} s \vec{a} + \frac{s}{4} \vec{b} \\ \therefore \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} \\ &= \left(1 - \frac{3}{4} s \right) \vec{a} + \frac{s}{4} \vec{b} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるから, ①, ② より

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t}{2} = 1 - \frac{3}{4} s \\ \frac{t}{3} = \frac{s}{4} \end{array} \right. \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{8}{9} \\ t = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

よって

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{9} \vec{b} \quad (\text{答})$$

(3) k を実数として, $\overrightarrow{OH} = k\vec{a}$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OI} \\ &= k\vec{a} - \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{9} \vec{b} \right) \\ &= \left(k - \frac{1}{3} \right) \vec{a} - \frac{2}{9} \vec{b}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \therefore 4^2 &= 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{OA}$ より, $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{OA} &= \left\{ \left(k - \frac{1}{3} \right) \vec{a} - \frac{2}{9} \vec{b} \right\} \cdot \vec{a} \\ &= \left(k - \frac{1}{3} \right) |\vec{a}|^2 - \frac{2}{9} \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \left(k - \frac{1}{3} \right) \cdot 2^2 - \frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \\ &= 4k - 1 \\ &= 0 \\ \therefore k &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4} \vec{a} \quad (\text{答})$$

また

$$\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{12} \vec{a} - \frac{2}{9} \vec{b} = -\frac{1}{36} (3\vec{a} + 8\vec{b})$$

より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{IH}|^2 &= \frac{1}{36^2} |3\vec{a} + 8\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{36^2} \left\{ 9|\vec{a}|^2 + 48\vec{a} \cdot \vec{b} + 64|\vec{b}|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{36^2} \left\{ 9 \cdot 2^2 + 48 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) + 64 \cdot 3^2 \right\} \\ &= \frac{15}{36} \\ \therefore |\overrightarrow{IH}| &= \frac{\sqrt{15}}{6} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{【4】} \quad \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EH} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EG} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ①
\end{aligned}$$

$\triangle ABC$ に含まれる点 M は、 $\overrightarrow{OH}$ 上にあるので、

①より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \alpha \overrightarrow{OH} \\
&= \alpha(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}) \quad \dots\dots ②
\end{aligned}$$

また、 $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ をみたす実数 p, q がある.

したがって

$$\overrightarrow{OM} = (1-p-q)\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + q\overrightarrow{OC} \quad \dots\dots ③$$

②, ③ は等しく、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立なので

$$\begin{cases} 1-p-q = \alpha \\ p = \alpha \\ q = 3\alpha \end{cases} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} \quad (\text{答})$$

平面 DEF 内の任意の点 P は、 $l+m+n=1 \quad \dots\dots ④$ として、次のように表せる.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= l\overrightarrow{OD} + m\overrightarrow{OE} + n\overrightarrow{OF} \\
&= l(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + n(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\
&= (l+m)\overrightarrow{OA} + (m+n)\overrightarrow{OB} + (n+l)\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{ON}$ は、 $\overrightarrow{OH}$ 上にあるので、①より、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の係数比は $1:1:3$ となるから、

$$\frac{l+m}{1} = \frac{m+n}{1} = \frac{n+l}{3} = k$$

とおける. したがって

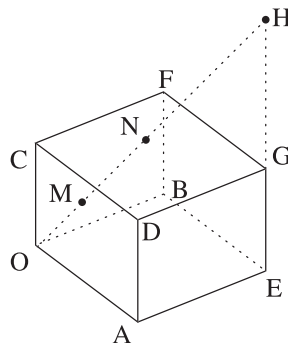
$$\begin{cases} l+m = k \\ m+n = k \\ n+l = 3k \end{cases} \quad \therefore 2(l+m+n) = 5k$$

④を代入して

$$k = \frac{2}{5}$$

P と N が一致するので

$$\overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{OC} \quad (\text{答})$$



次に,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OH}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OH} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OH}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ であるから,

$$\begin{aligned}5^2|\overrightarrow{MN}|^2 &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + 9|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= 4^2 + 3^2 + 9 \cdot 2^2 \\ &= 61\end{aligned}$$

よって,

$$|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{61}}{5} \quad (\text{答})$$

【5】(1) $\angle BAC = \theta$ とおくと, $\angle BDC$ を $\triangle ABD$ の外角として

$$\angle BDC = 2\theta$$

また, $BD = BC$ より, $\angle BCD = 2\theta$

$AB = AC$ より, $\angle ABC = 2\theta$

したがって, $\angle DBC = \theta$

$\triangle ABC$ の内角の和より

$$5\theta = 180^\circ \quad \therefore \theta = 36^\circ \quad (\text{答})$$

(2) $\triangle BDC$ において, B から CD におろした垂線の足を H とすると

$$\angle CBH = \frac{\theta}{2} = 18^\circ$$

$BC = 1$ より, $\sin 18^\circ$ は CH の長さとして現れる. ここで,

$CH = x$ とおくと, $CD = 2x$ である.

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$ より

$$AC : BC = BD : CD \iff (1 + 2x) : 1 = 1 : 2x$$

$$\iff 2x(1 + 2x) = 1$$

$$\iff 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$CH = x > 0$ より, $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ であるから

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad [\text{証明終}]$$

$$(3) \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} &= \sin \frac{108^\circ}{2} \quad (\because \alpha + \beta = 180^\circ - 72^\circ) \\ &= \sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 2 \cdot 18^\circ) = \cos(2 \cdot 18^\circ) \\ &= 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \end{aligned}$$

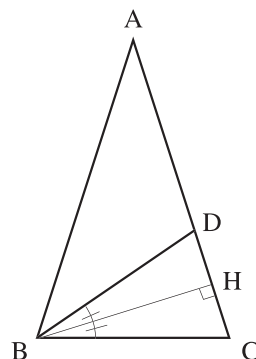
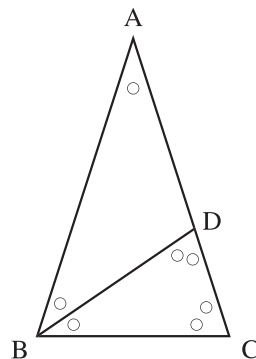
より

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

いま, $0^\circ < \alpha < 108^\circ$, $0^\circ < \beta < 108^\circ$ であるから, $-108^\circ < \alpha - \beta < 108^\circ$ より

$$\begin{cases} \frac{\alpha - \beta}{2} = 0^\circ \\ \alpha + \beta = 108^\circ \end{cases} \iff \alpha = \beta = 54^\circ$$

のとき最大となり, その値は, $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. (答)



【6】 (1) $AM = 6 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ (答)

$\triangle ABE$ において、余弦定理を用いて

$$AE^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cos 60^\circ = 28$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{7} \quad (\text{答})$$

$\triangle ECM$ において、余弦定理を用いて

$$EM^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 60^\circ = 13$$

$$\therefore EM = \sqrt{13} \quad (\text{答})$$

(2) $\triangle AEM$ において、余弦定理を用いて

$$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{7})^2 + (3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6} \quad (\text{答})$$

(3) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

であるから

$$\triangle AEM = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{3\sqrt{35}}{2} \quad (\text{答})$$

5章 微分法, 積分法

問題

【1】 $y = f(x)$ 上の点 (s, s^3) における接線は, $f'(x) = 3x^2$ より

$$y = 3s^2(x - s) + s^3$$

$$\therefore y = 3s^2x - 2s^3 \quad \dots\dots ①$$

$y = g(x)$ 上の点 $(t, t^3 + 4)$ における接線は, $g'(x) = 3x^2$ より

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 + 4$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 + 4 \quad \dots\dots ②$$

①, ② が一致するとして,

$$\begin{cases} 3s^2 = 3t^2 \\ -2s^3 = -2t^3 + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s = \pm t \\ s^3 = t^3 - 2 \end{cases}$$

$s = t$ のとき, $t^3 = t^3 - 2$ となり, 解なし.

$s = -t$ のとき,

$$-t^3 = t^3 - 2$$

$$\therefore t^3 = 1$$

$$\therefore t = 1$$

$$\therefore (s, t) = (-1, 1)$$

よって, ① より, $y = 3x + 2$ (答)

【2】 (1) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ) = t$ とおくと, $-1 < t \leq \sqrt{2}$ であり

$$(\sin x + \cos x)^2 = t^2$$

$$1 + 2 \sin x \cos x = t^2$$

$$\therefore \sin 2x = t^2 - 1$$

よって, 与えられた関数に代入すると

$$y = 4(t^2 - 1) \cdot t + t$$

$$\therefore y = 4t^3 - 3t$$

ここで, 右辺を $f(t)$ ($-1 < t \leq \sqrt{2}$) とおくと

$$f'(t) = 12t^2 - 3$$

$$= 3(2t + 1)(2t - 1)$$

より, $f(t)$ の増減表は次のようになる.

t	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$5\sqrt{2}$

よって

$$t = \sqrt{2}$$

つまり

$$x + 45^\circ = 90^\circ \iff x = 45^\circ$$

のとき最大値 $5\sqrt{2}$ をとる. (答)

(2) (1) より最小値は -1 となり, $t = \frac{1}{2}$ のときだから

$$\sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin(\theta + 45^\circ) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また

$$0 \leq \theta < 180^\circ \iff 45 \leq \theta + 45^\circ < 225^\circ \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

であり, ①, ②より

$$135^\circ < \theta + 45^\circ < 225^\circ$$

よって

$$\cos(\theta + 45^\circ) < 0$$

すなわち

$$\cos(\theta + 45^\circ) = -\frac{\sqrt{14}}{4} \quad (\text{答})$$

【3】 (1) $f(x) = x^3 - ax$ とおくと, $f'(x) = 3x^2 - a$ より, T_P は

$$y = (3c^2 - a)(x - c) + c^3 - ac$$

$$\iff y = (3c^2 - a)x - 2c^3$$

これと $y = f(x)$ を連立すると,

$$x^3 - ax = (3c^2 - a)x - 2c^3$$

$$\therefore x^3 - 3c^2x + 2c^3 = 0$$

$$\therefore (x - c)^2(x + 2c) = 0$$

$$\therefore x = c, -2c$$

$f(-2c) = -8c^3 + 2ac$ であるから,

$$\mathbf{Q(-2c, -8c^3 + 2ac)} \quad (\text{答})$$

(2) 直交する条件より,

$$f'(c) \cdot f'(-2c) = -1$$

$$\therefore (3c^2 - a)(12c^2 - a) = -1$$

$$\therefore 36c^4 - 15ac^2 + a^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$c^2 = x$ とおくと,

$$36x^2 - 15ax + a^2 + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}'$$

さて, 条件は ① を満たす異なる実数 c が 4 個存在することで, それは ①' を満たす異なる正の x が 2 個存在することと同値である.

そこで, $g(x) = 36x^2 - 15ax + a^2 + 1$ とおき, この放物線を考えると, 条件は

$$\begin{aligned} & \begin{cases} D > 0 \\ \frac{15a}{72} > 0 \quad (\text{軸について}) \\ g(0) > 0 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} (15a)^2 - 4 \cdot 36 \cdot (a^2 + 1) > 0 \\ a > 0 \\ a^2 + 1 > 0 \end{cases} \\ \therefore & \begin{cases} 9a^2 > 16 \\ a > 0 \end{cases} \\ \therefore & \mathbf{a > \frac{4}{3}} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【4】 (1) (与式) $= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = 2 - 2 = 0$ (答)

(2) x^3, x は奇関数, $x^2, 1$ は偶関数であるから

$$(\text{与式}) = 2 \int_0^3 (x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = 2 \cdot 12 = 24 \quad (\text{答})$$

$$(3) (\text{与式}) = \int_{-4}^3 (x+4)(x-3) dx = -\frac{1}{6} \{3 - (-4)\}^3 = -\frac{343}{6} \quad (\text{答})$$

(4) 与式を変形すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= - \int_0^1 x(x-1) dx + \int_1^2 x(x-1) dx \\ &= - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【5】 $f(x) = x^3 - (6 + 3t)x^2 + 18tx$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2(6 + 3t)x + 18t \\ &= 3 \{x^2 - 2(2 + t)x + 6t\} \end{aligned}$$

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(2 + t) \\ \alpha\beta = 6t \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned} g(t) &= 3t^2 - 2(\alpha + \beta)t + \alpha^2 + \beta^2 \\ &= 3t^2 - 4(2 + t)t + (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 3t^2 - 8t - 4t^2 + 4(2 + t)^2 - 12t \\ &= 3t^2 - 4t + 16 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(t)dt &= \int_0^2 (3t^2 - 4t + 16)dt \\ &= [t^3 - 2t^2 + 16t]_0^2 \\ &= \mathbf{32} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【6】 (1) 以下のように場合分けをする.

(i) $x \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\int_1^x 3t(t-2)dt \\
 &= -\int_1^x (3t^2 - 6t)dt \\
 &= -\left[t^3 - 3t^2\right]_1^x \\
 &= -(x^3 - 3x^2) - 2 \\
 &= -x^3 + 3x^2 - 2 \\
 f'(x) &= -3x^2 + 6x = -3x(x-2)
 \end{aligned}$$

(ii) $2 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\int_1^2 3t(t-2)dt + \int_2^x 3t(t-2)dt \\
 &= -\left[t^3 - 3t^2\right]_1^2 + \left[t^3 - 3t^2\right]_2^x \\
 &= 2 + x^3 - 3x^2 + 4 \\
 &= x^3 - 3x^2 + 6 \\
 f'(x) &= 3x^2 - 6x = 3x(x-2)
 \end{aligned}$$

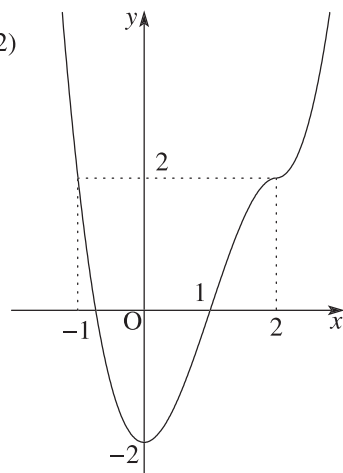
以上より, $y = f(x)$ のグラフは右のようになる.

《注》

$$f(x) = \int_1^x 3t|t-2|dt \text{ を微分して}$$

$$f'(x) = 3x|x-2|$$

としても, 増減がわかる.



(2) (1) のグラフより, $f(x)$ の最小値は,

$$f(0) = -2 \quad (\text{答})$$

添削課題

【1】 点 $P(k, k^2)$ ($0 < k < 1$) とおくと、面積 S は次のように表される.

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^k (k^2 - x^2)dx + \int_k^1 (x^2 - k^2)dx \\ &= \left[k^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^k + \left[\frac{x^3}{3} - k^2x \right]_k^1 \\ &= \left(k^3 - \frac{k^3}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - k^2 \right) - \left(\frac{k^3}{3} - k^3 \right) \\ &= \frac{4}{3}k^3 - k^2 + \frac{1}{3} \\ S'(k) &= 4k^2 - 2k = 2k(2k - 1) \end{aligned}$$

よって、 $0 < k < 1$ の範囲での増減表は次のようになる.

k	0		$\frac{1}{2}$		1
$S'(k)$	0	-	0	+	
$S(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって、 S は $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ のとき、最小値 $\frac{1}{4}$ をとる. (答)

M2T
高2 難関大数学
～数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 総合演習～



会員番号		氏 名	
------	--	-----	--