

高 2 東大理系数学Ⅲ



1 章 2 次曲線の応用

問題

【1】(1) 点 (x, y) を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転した点を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} X + Yi &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) (x + yi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)i \end{aligned}$$

より

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad \cdots \textcircled{1}$$

一方, G の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}(x + y) + 2 &= 0 \\ \iff (x - y)^2 - 2\sqrt{2}(x + y) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

となるから, ① を代入して

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}X)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}Y + 2 &= 0 \\ \therefore X^2 - 2Y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

以上より, 求める放物線 F の方程式は

$$\begin{aligned} x^2 - 2y + 1 &= 0 \\ \therefore y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(2) ② と $y = \pm x$ を連立すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} &= \pm x \iff x^2 \mp 2x + 1 = 0 \\ &\iff (x \mp 1)^2 = 0 \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

となり, いずれも重解をもつ. よって, F は 2 直線

$$y = x, \quad y = -x$$

と接している.

〔証明終〕

【2】 (1) $y = x^2 \cdots \textcircled{1}$ より

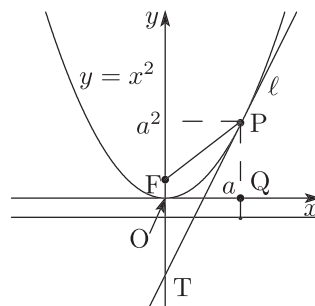
$$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4}y$$

よって、 $\textcircled{1}$ の焦点、および準線は

$$\text{焦点: } F \left(0, \frac{1}{4} \right), \quad \text{準線: } y = -\frac{1}{4}$$

一方、 $P(a, a^2)$ のとき、 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y + a^2) &= ax \\ \therefore y &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$



(2) T の座標は、 ℓ の方程式において $x = 0$ として

$$T(0, -a^2)$$

よって

$$FT = \frac{1}{4} - (-a^2) = \frac{1}{4} + a^2 \cdots \textcircled{2}$$

一方

$$FP^2 = a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4} \right)^2 = \left(a^2 + \frac{1}{4} \right)^2$$

であるから

$$FP = a^2 + \frac{1}{4} \cdots \textcircled{3}$$

したがって、 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より

$$FT = FP$$

すなわち、 $\triangle PFT$ は二等辺三角形である。

(3) $PQ \parallel FT$ より

$$\angle FTP = \angle QPT$$

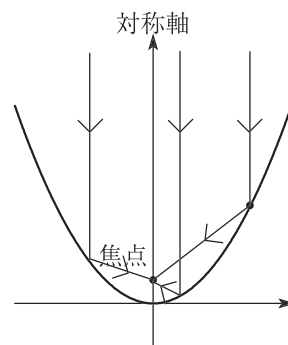
一方、(2) より

$$\angle FTP = \angle FPT$$

したがって、 $\angle FPT = \angle QPT$ が成り立つ。

《注》

本問の結果から、放物線の対称軸に平行に入射した光は、放物線で反射して、すべて焦点に集まることがわかる。



- 【3】(1) 与えられた双曲線の中心は原点であり，焦点は x 軸上に存在する．よって，
 $\sqrt{16+9}=5$ であることから，求める焦点の座標は

$$(\pm 5, 0) \quad (= F, F')$$

- (2) 双曲線上の点 $P(X, Y)$ における接線の方程式は

$$\frac{Xx}{16} - \frac{Yy}{9} = 1$$

ここで， $y=0$ とすると

$$x = \frac{16}{X} \quad (\because X \neq 0)$$

となるので点 Q の座標は

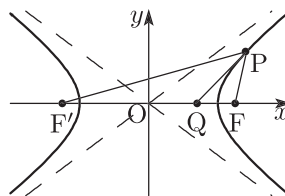
$$\left(\frac{16}{X}, 0 \right)$$

- (3) 与えられた双曲線を

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

とし，その焦点を

$$F(5, 0), \quad F'(-5, 0)$$



とする．このとき，右上図に注意して，示すべき命題を言い換えると

$$\begin{aligned} \angle FPQ = \angle F'PQ &\iff PQ \text{ は } \angle FPF' \text{ の二等分線} \\ &\iff PF : PF' = QF : QF' \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

そこで， $\textcircled{2}$ が成り立つことを示せばよい． $P(X, Y)$ は $\textcircled{1}$ 上の点であるから

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1 \quad \therefore Y^2 = 9 \left(\frac{X^2}{16} - 1 \right)$$

これを用いると

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{(X-5)^2 + Y^2} = \sqrt{(X-5)^2 + 9 \left(\frac{X^2}{16} - 1 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{25}{16}X^2 - 10X + 16} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}X - 4 \right)^2} \\ &= \left| \frac{5}{4}X - 4 \right| = \frac{1}{4}|5X - 16| \end{aligned}$$

同様にして

$$PF' = \frac{1}{4}|5X + 16|$$

が成り立つから

$$PF : PF' = |5X - 16| : |5X + 16| \quad \dots \textcircled{3}$$

一方, (1), (2) の結果より

$$QF = \left| 5 - \frac{16}{X} \right| = \frac{|5X - 16|}{|X|}, \quad QF' = \left| 5 + \frac{16}{X} \right| = \frac{|5X + 16|}{|X|}$$

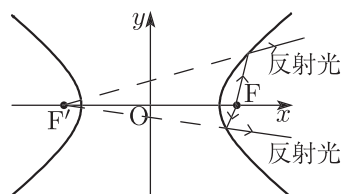
$$\therefore QF : QF' = |5X - 16| : |5X + 16| \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④ より, ② が成り立つ.

よって, $\angle FPQ = \angle F'PQ$ が示された.

〔証明終〕

《注》 本問の結果から, 右図のように 1 つの焦点 F から出た光は, 双曲線上で反射して, あたかももう 1 つの焦点 F' から出た光のように進むことがわかる.



- 【4】 辺 AB, AD の長さをそれぞれ $2a$, $2b$ とし, 図のように AB を x 軸, AB の垂直二等分線を y 軸とする座標を設定する. このとき, $A(-a, 0)$, $P_k \left(a, \frac{2b}{n}k \right)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) であるから, 直線 AP_k の方程式は

$$y = \frac{\frac{2b}{n}k}{2a}(x + a)$$

$$\therefore y = \frac{bk}{an}(x + a) \quad \dots \textcircled{1}$$

また, $B(a, 0)$, $Q_k \left(a - \frac{2a}{n}k, 2b \right)$
 $(k = 0, 1, \dots, n)$

であるから直線 BQ_k の方程式は

$$y = \frac{-2b}{\frac{2a}{n}k}(x - a) \quad \therefore y = \frac{-bn}{ak}(x - a) \quad \dots \textcircled{2}$$

よって, ①, ② を連立して, n , k を消去すると

$$\left(\frac{k}{n} = \right) \frac{ay}{b(x + a)} = \frac{-b(x - a)}{ay}$$

より

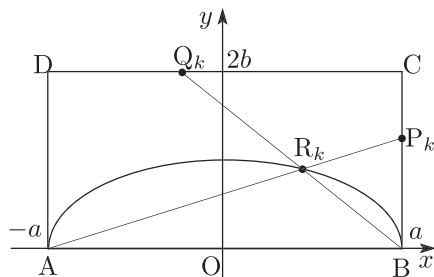
$$a^2y^2 = -b^2(x^2 - a^2)$$

$$\therefore b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

したがって, AP_k と BQ_k の交点 R_k はつねに 1 つの楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上にある ($k = 0$ のとき, $R_k = B$ だから, このときも成り立つ).

〔証明終〕



【5】(1) 題意より，直線 ℓ は，

「 $P(0, 0, k)$ を通り， $\overrightarrow{PQ}=(\alpha, \beta, -k)$ を方向ベクトルとする直線」とみることができる．よって， t をパラメータとして

$$\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -k \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\ell: x = \alpha t, \quad y = \beta t, \quad z = -kt + k$$

(2) (1) の結果を， $S: x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ に代入すると

$$\begin{aligned} & \alpha^2 t^2 + (\beta t - 1)^2 + (-kt + k - 1)^2 = 1 \\ \iff & (\alpha^2 + \beta^2 + k^2) t^2 - 2(\beta + k^2 - k) t + (k-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

$k > 0$ より，これは t の 2 次方程式となる．

ℓ が S と接する条件は，この 2 次方程式が重解をもつことであるから

$$\text{判別式: } (\beta + k^2 - k)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + k^2)(k-1)^2 = 0$$

$$\therefore (k-1)^2 \alpha^2 + k(k-2)\beta^2 - 2k(k-1)\beta = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって

$$A = (k-1)^2, \quad B = k(k-2)$$

(3) ① より， E の方程式は

$$\begin{cases} (k-1)^2 x^2 + k(k-2)y^2 - 2k(k-1)y = 0 & \dots \textcircled{2} \\ \text{かつ} \\ z = 0 \end{cases}$$

であるから，これが点 $(2\sqrt{2}, 2, 0)$ を通るとき

$$8(k-1)^2 + 4k(k-2) - 4k(k-1) = 0$$

$$\iff 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$\iff (2k-1)(k-2) = 0$$

が成り立つから

$$k = 2, \quad \frac{1}{2}$$

ここで， $k = 2$ のとき，② は

$$x^2 - 4y = 0 \iff y = \frac{1}{4}x^2$$

また， $k = \frac{1}{2}$ のとき，② は

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y = 0 \iff 3x^2 - 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = -1$$

以上より，求める k の値，および E が表す図形は，

$k = 2$ のとき「放物線」， $k = \frac{1}{2}$ のとき「双曲線」

(4) E が双曲線となるためには,

「② の x^2 , y^2 の係数が異符号」

となることが必要である. すなわち

$$\begin{aligned} k-1 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad k(k-2) < 0 \\ \iff 0 < k < 1 \quad \text{または} \quad 1 < k < 2 \end{aligned}$$

このとき, ② は

$$\frac{2-k}{k}x^2 - \left(\frac{k-2}{k-1}\right)^2 \left(y - \frac{k-1}{k-2}\right)^2 = -1$$

となり, E は双曲線となる. よって, 求める k の範囲は

$$0 < k < 1 \quad \text{または} \quad 1 < k < 2$$

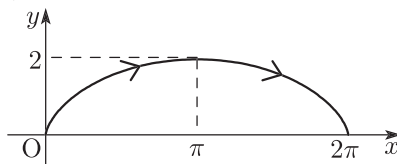
2章 媒介変数表示の応用

問題

【1】(1) $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$ であるから, $0 \leq t \leq 2\pi$ において

t	0	...	π	...	2π
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$	$(\pi, 2)$	$\searrow$	$(2\pi, 0)$

よって, 概形は下図のようになる.



《注》 $x = x(t) = t - \sin t$, $y = y(t) = 1 - \cos t$ とおくと

$$y(t) = y(2\pi - t), \quad \frac{x(t) + x(2\pi - t)}{2} = \pi$$

が成り立つので, グラフは直線 $x = \pi$ に関して対称である.

また, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ から上に凸である.

(2) (1) の概形から

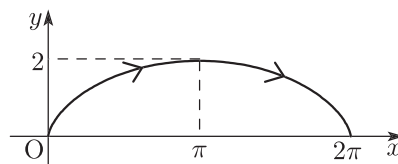
$$S = \int_0^{2\pi} y dx$$

ここで, $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & \rightarrow & 2\pi \\ \hline t & 0 & \rightarrow & 2\pi \\ \hline \end{array}$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi \end{aligned}$$

【2】 (1) $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$ であるから, $0 \leq t \leq 2\pi$ において

t	0	...	π	...	2π
$\frac{dx}{dt}$		+	+	+	
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
(x, y)	(0, 0)	$\nearrow$	$(\pi, 2)$	$\searrow$	$(2\pi, 0)$



よって, 概形は右上図のようになるので

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \quad \left(\because dx = (1 - \cos t)dt, \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & 0 & \rightarrow 2\pi \\ \hline t & 0 & \rightarrow 2\pi \\ \hline \end{array} \right) \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\
 &= \pi \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} - \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} \right) dt \\
 &= \pi \left[\frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t \right]_0^{2\pi} = 5\pi^2
 \end{aligned}$$

(2) $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$ であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}$$

$0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi$ では $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ より, 求める長さを ℓ とすると

$$\ell = \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{t}{2} dt = \left[-4\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8$$

《注》 (1) の体積の計算については

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \quad (2 \text{ 倍角の公式}) \quad \cos^3 t = \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} \quad (3 \text{ 倍角の公式})$$

を用いているが, 次のようにして求めることもできる.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi \int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2} \right)^3 dt = 8\pi \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt \\
 &= 16\pi \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt \quad (\because t = \pi \text{ に関する対称性}) \\
 &= 32\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta \quad (\because t = 2\theta) \\
 &= 32\pi \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2
 \end{aligned}$$

最後の積分計算において, 次の公式を用いた.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 & (n: \text{奇数}) \end{cases}$$

【3】 (1) $OP = \sin \theta$ より

$$AP = PR = 1 - OP = 1 - \sin \theta$$

ここで, R から x 軸への垂線の足を H とおくと,
 $\angle RPH = \frac{\pi}{2} - \theta$ より

$$\begin{aligned} PH &= PR \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= (1 - \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\therefore OH = OP - PH = \sin^2 \theta$$

また

$$RH = PR \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = (1 - \sin \theta) \cos \theta$$

よって

$$R \left(\sin^2 \theta, (1 - \sin \theta) \cos \theta \right)$$

(2) 題意から, θ は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を動き, $\theta = 0$ のとき $R = B$ であり, $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $R = A$ である. また, $R(x, y)$ とおくと, (1) より

$$x = \sin^2 \theta, \quad y = (1 - \sin \theta) \cos \theta$$

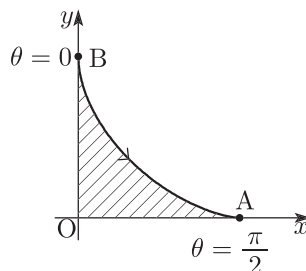
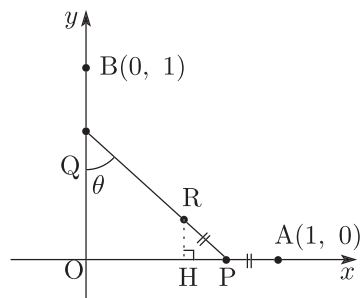
であり

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \geq 0 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

から R の描くグラフは x 方向に単調増加する.

よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 \theta \sin \theta - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \right) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\cos^2 \theta (\cos \theta)' - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right\} d\theta \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{8} \theta + \frac{1}{32} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left(-\frac{\pi}{16} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$



【4】(1) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$ である. $\angle AOR = \theta$ より

$$\overrightarrow{OR} = (a \cos \theta, a \sin \theta)$$

また, $\angle ORP = 90^\circ$ であるから, $\overrightarrow{RP}$ 方向の単位ベクトルとして

$$(\sin \theta, -\cos \theta)$$

がとれる. $|\overrightarrow{RP}|$ は $\widehat{RA}$ の長さに等しいから

$$|\overrightarrow{RP}| = \widehat{RA} = a\theta$$

よって

$$\overrightarrow{RP} = (a\theta \sin \theta, -a\theta \cos \theta)$$

となる. したがって, $\overrightarrow{OP} = (a \cos \theta + a\theta \sin \theta, a \sin \theta - a\theta \cos \theta)$ なので

$$\begin{cases} x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta) \\ y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta) \end{cases}$$

(2) 求める部分は右図の斜線部分であるから, 求める面積 S は

$$S = \int_0^a x dy - \frac{\pi}{4} a^2$$

と表される. 題意より, 右図における点 P が描く曲線は, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲であり, また

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos \theta - \cos \theta + \theta \sin \theta) = a\theta \sin \theta$$

なので

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(\cos \theta + \theta \sin \theta) \cdot a\theta \sin \theta d\theta - \frac{\pi}{4} a^2 \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta \sin \theta \cos \theta + \theta^2 \sin^2 \theta) d\theta - \frac{\pi}{4} a^2 \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\theta}{2} \sin 2\theta + \theta^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta - \frac{\pi}{4} a^2 \end{aligned}$$

ここで

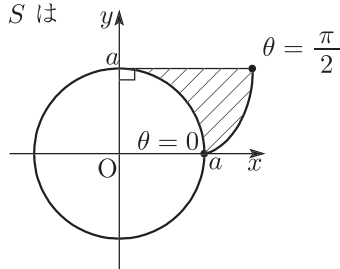
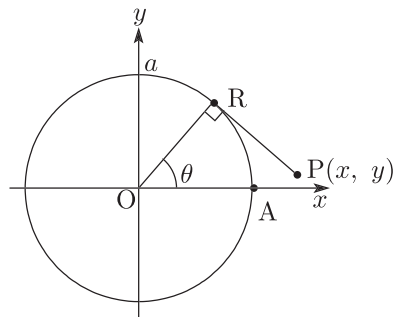
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{2} \sin 2\theta d\theta = \left[-\frac{\theta}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{8} + \left[\frac{1}{8} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^2}{2} d\theta = \left[\frac{\theta^3}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^2}{2} \cos 2\theta d\theta = \left[\frac{\theta^2}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{2} \sin 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{8} \quad (\because \textcircled{1} \text{より})$$

であるから

$$S = a^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} \right) - \frac{\pi}{4} a^2 = \frac{\pi^3}{48} a^2$$



【5】(1) 題意より, $\overrightarrow{OP} = (\cos t, \sin t)$, $\overrightarrow{PQ} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = (\cos t + r \cos \omega t, \sin t + r \sin \omega t)$$

よって, $\overrightarrow{OQ} = (x, y)$ とおくと

$$x = \cos t + r \cos \omega t, \quad y = \sin t + r \sin \omega t$$

より

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t - r\omega \sin \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t + r\omega \cos \omega t$$

また

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t - r\omega^2 \cos \omega t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\sin t - r\omega^2 \sin \omega t$$

条件より, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (0, 0)$ であるから

$$\cos t = -r\omega^2 \cos \omega t, \quad \sin t = -r\omega^2 \sin \omega t$$

よって

$$\cos^2 t + \sin^2 t = r^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \quad \therefore \quad r^2 \omega^4 = 1$$

したがって, $r = \frac{1}{3}$ のとき, $\omega^4 = 9$ より, $\omega > 0$ であるから

$$\omega = \sqrt{3}$$

(2) $r = \frac{1}{2}$, $\omega = 2$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t - \sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t + \cos 2t$$

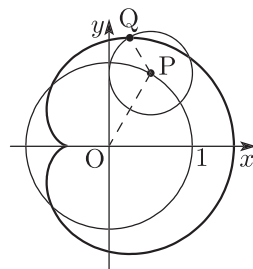
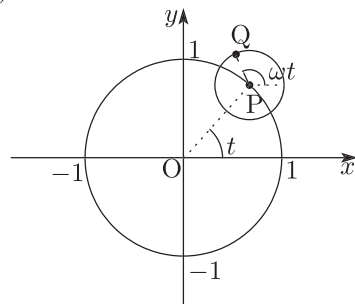
であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= (-\sin t - \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2 \\ &= \sin^2 t + 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t + \cos^2 t + 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t \\ &= 2 + 2(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t) = 2 + 2 \cos t = 4 \cos^2 \frac{t}{2} \end{aligned}$$

したがって, 点 Q が動いた道のりを l とすると

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = 4 \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt = 8 \left[\sin \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 8$$

《注》 点 Q の描く軌跡は右図のようになる. この曲線は, カージオイド (心臓形) である.



3章 複素数平面の応用 (1)

問題

【1】

$$z^3 + (1 - a^2)z - a = (z - a)(z^2 + az + 1)$$

と因数分解できるので, 与えられた方程式の解は

$$z - a = 0 \text{ または } z^2 + az + 1 = 0$$

の解, すなわち

$$\begin{cases} z = a & \dots \textcircled{1} \\ z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

である.

すると, a が実数全体を動くとき, ①の解も実数全体を動く. よって, ②の解が虚数である場合を考える. このとき

$$-2 < a < 2$$

であり, $\alpha = \frac{-a + \sqrt{4 - a^2}i}{2}$ とおくと, 2 解は $\alpha, \bar{\alpha}$ となる. そして, 解と係数の関係より

$$\alpha \bar{\alpha} = 1 \Leftrightarrow |\alpha| = 1$$

また, α の実部は $-\frac{a}{2}$ であるが

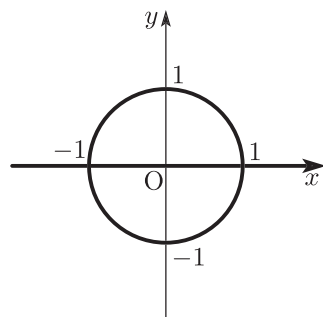
$$-1 < -\frac{a}{2} < 1$$

だから, 点 α は単位円周上の虚部が正である部分を動く. そして, $\bar{\alpha}$ は単位円周上の虚部が負である部分を動く.

以上より, 解の描く図形は

$$\begin{cases} \text{実軸全体} \\ \text{単位円周上の点 } \pm 1 \text{ を除いた部分} \end{cases}$$

であり, これを図示すると右図の太実線部分のようになる.



【2】 (1) $z + \frac{1}{z}$: 実数 より

$$z + \frac{1}{z} = \overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

$$\therefore z - \bar{z} + \frac{\bar{z} - z}{z\bar{z}} = (z - \bar{z}) \left(1 - \frac{1}{z\bar{z}}\right) = 0$$

ここで, $z - \bar{z} \neq 0$ (もし $z = \bar{z}$ なら z は実数) なので

$$z\bar{z} = 1$$

つまり, $z\bar{z} = |z|^2$ より

$$a = 1$$

(2) $|z| = 1$ のとき, $z' = z + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ とおくと

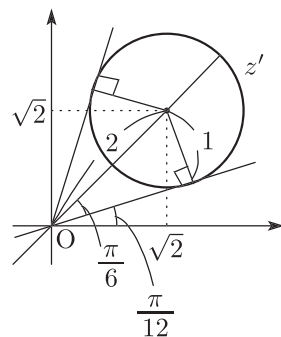
$$|z| = |z' - (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)| = 1$$

をみtas. つまり z' は, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ を中心とする半径 1 の円上を動く (図参照). よって

$$1 \leq |z'| \leq 3, \quad \frac{\pi}{12} \leq \arg z' \leq \frac{5\pi}{12}$$

$w = z'^4$ であるから

$$1 \leq |w| \leq 81, \quad \frac{\pi}{3} \leq \arg w \leq \frac{5\pi}{3}$$



【3】 $|z| = 1$ より

$$z = \cos \theta + i \sin \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくことができる。このとき

$$z^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta, \quad \bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\therefore z^2 - \bar{z} = (\cos 2\theta - \cos \theta) + i(\sin 2\theta + \sin \theta)$$

よって、 $z^2 - \bar{z}$ が実数であるとき

$$\sin 2\theta + \sin \theta = 0$$

これより

$$\sin \theta (2 \cos \theta + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \theta = 0 \quad \text{または} \quad \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

となるので

$$\theta = 0, \pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore z = 1, -1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

また

$$\begin{aligned} |z^2 - \bar{z}|^2 &= (\cos 2\theta - \cos \theta)^2 + (\sin 2\theta + \sin \theta)^2 \\ &= 2 - 2(\cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta) \\ &= 2 - 2 \cos(2\theta + \theta) \\ &= 2 - 2 \cos 3\theta \end{aligned}$$

であるから、 $|z^2 - \bar{z}|$ が最大となるとき

$$\cos 3\theta = -1$$

そして、 $0 \leq 3\theta < 6\pi$ なので

$$3\theta = \pi, 3\pi, 5\pi \quad \therefore \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

よって

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

【4】 (1) z の絶対値が r で偏角が θ なので

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \cdot \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \end{aligned}$$

これより, 複素数 w の実部, 虚部をそれぞれ $\operatorname{Re}(w)$, $\operatorname{Im}(w)$ と表すことにすると

$$\operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta, \quad \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$$

(2) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対して, ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z^n + \frac{1}{z^n} &= r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n + \frac{1}{r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n} \\ &= r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) + \frac{1}{r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)} \\ &= r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) + \frac{1}{r^n}(\cos n\theta - i \sin n\theta) \\ &= \left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) \cos n\theta + i \cdot \left(r^n - \frac{1}{r^n}\right) \sin n\theta \end{aligned}$$

となる. すると,

(i) $z + \frac{1}{z}$ が実数であるとき, (1) より $\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta = 0$ であるから

$$r = \frac{1}{r} \quad \text{または} \quad \sin \theta = 0$$

で, $r > 0$ なので

$$r = 1 \quad \text{または} \quad \theta = m\pi \quad (m \text{ は整数})$$

すると, $r = 1$ のとき

$$r^n - \frac{1}{r^n} = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \quad \operatorname{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0$$

また, $\theta = m\pi$ のとき, $\sin \theta = 0$ より z は実数となるので, $z^n + \frac{1}{z^n}$ は実数である.

(ii) $z + \frac{1}{z}$ が純虚数であるとき, (1) より $\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta = 0$ であるが, $r > 0$ なので

$$\cos \theta = 0 \quad \therefore \quad \theta = m\pi + \frac{\pi}{2} \quad (m \text{ は整数})$$

このとき, $2n\theta = 2mn\pi + n\pi$ であるから

$$\sin 2n\theta = \sin n\pi = 0$$

よって

$$\sin n\theta \cos n\theta = 0 \Leftrightarrow \sin n\theta = 0 \text{ または } \cos n\theta = 0$$

となり

$$\operatorname{Re}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0 \text{ または } \operatorname{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) = 0$$

を得るので, $z^n + \frac{1}{z^n}$ は純虚数または実数である.

【5】 (1) B は原点 O を中心とする正 5 角形の頂点であるから

$$\angle AOB = \frac{2}{5}\pi$$

そして, $OB = OA = 1$ なので, B を表す複素数 β は

$$\beta = 1 \cdot \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right) = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi$$

である. すると, ド・モアブルの定理より

$$\beta^5 = \left(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi \right)^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$\therefore \beta^5 - 1 = (\beta - 1)(\beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1) = 0$$

となるが, β は虚数なので

$$\beta \neq 1 \quad \therefore \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

(2) B を表す複素数を β とすれば, C, D を表す複素数はそれぞれ

$$\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi = \beta^2, \quad \cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi = \beta^3$$

である. よって

$$h = \frac{\beta^2 + \beta^3}{2}$$

これより

$$\begin{aligned} 4h^2 + 2h - 1 &= 4 \cdot \left(\frac{\beta^2 + \beta^3}{2} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\beta^2 + \beta^3}{2} - 1 \\ &= (\beta^2 + \beta^3)^2 + (\beta^2 + \beta^3) - 1 \\ &= \beta^4 + 2\beta^5 + \beta^6 + \beta^2 + \beta^3 - 1 \\ &= \beta^4 + 2 + \beta + \beta^2 + \beta^3 - 1 \quad (\because \beta^5 = 1) \\ &= \beta^4 + \beta^3 + \beta^2 + \beta + 1 \\ &= 0 \quad (\because (1) \text{より}) \end{aligned}$$

となるので, h の値を求めると

$$h = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

そして, 明らかに $h < 0$ だから

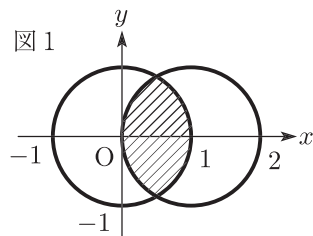
$$h = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

4章 複素数平面の応用 (2)

問題

- 【1】(1) $\begin{cases} |z| \leq 1 & : \text{中心 } O, \text{ 半径 } 1 \text{ の円の内部および周} \\ |z-1| \leq 1 & : \text{中心 } 1, \text{ 半径 } 1 \text{ の円の内部および周} \end{cases}$

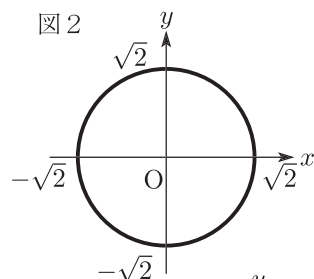
を表す. よって, 図1の斜線部分 (境界を含む) を表す.



(2)

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} = 2 & \Leftrightarrow |z|^2 = 2 \\ & \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

よって, 中心 O, 半径 $\sqrt{2}$ の円 (図2) を表す.

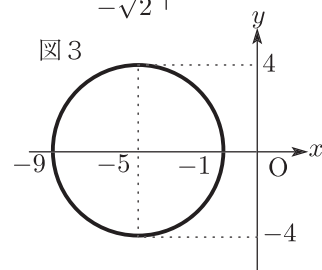


$$\begin{aligned} (3) \quad \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 & \Leftrightarrow \frac{|z-3|}{|z+3|} = 2 \\ & \Leftrightarrow |z-3| = 2|z+3| \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①の両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} |z-3|^2 &= 4|z+3|^2 \\ \Leftrightarrow (z-3)\overline{(z-3)} &= 4(z+3)\overline{(z+3)} \\ \Leftrightarrow (z-3)(\bar{z}-3) &= 4(z+3)(\bar{z}+3) \\ \Leftrightarrow z\bar{z} - 3z - 3\bar{z} + 9 &= 4(z\bar{z} + 3z + 3\bar{z} + 9) \\ \Leftrightarrow z\bar{z} + 5z + 5\bar{z} + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+5)(\bar{z}+5) &= 16 \\ \Leftrightarrow |z+5|^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow |z+5| &= 4 \end{aligned}$$

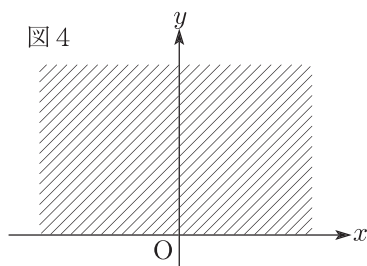
よって, 中心 -5 , 半径 4 の円 (図3) を表す.



- (4) $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと

$$\text{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow y > 0$$

よって, 図4の斜線部分 (境界を含まない) を表す.



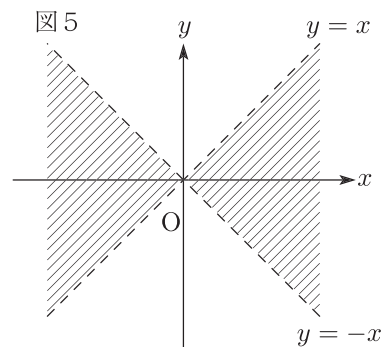
(5) $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくと

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

であるから

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z^2) > 0 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y)(x - y) > 0\end{aligned}$$

よって、図 5 の斜線部分 (境界を含まない) を表す.



【2】 $w = \frac{1}{z-2}$ より $w \neq 0$ である.

ここで, $w(z-2) = 1$ つまり $wz = 1 + 2w$ より

$$z = \frac{1+2w}{w} = 2 + \frac{1}{w}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{z+\bar{z}}{2} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(2 + \frac{1}{w} \right) + \overline{\left(2 + \frac{1}{w} \right)} \right\} \\ &= 2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) = 1\end{aligned}$$

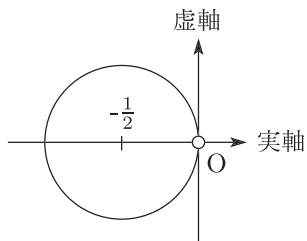
これから

$$w\bar{w} + \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}\bar{w} = 0$$

つまり

$$\begin{aligned}\left(w + \frac{1}{2} \right) \left(\bar{w} + \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \left(w + \frac{1}{2} \right) \overline{\left(w + \frac{1}{2} \right)} &= \frac{1}{4} \\ \therefore \left| w + \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって, w は中心 $-\frac{1}{2}$, 半径 $\frac{1}{2}$ の円を描く. ただし, $w = 0$ を除く.



【3】 $z' = z + 1 - i$ とおくと, z を z' にうつす変換は

複素数 $1 - i$ で表される平行移動

に他ならない. したがって, z' の表す点の軌跡は

中心 1 , 半径 1 の円

である. そして, $w = (-1 + i)z'$ であり

$$\begin{aligned} -1 + i &= \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

なので, z' を w にうつす変換は

原点中心の $\sqrt{2}$ 倍の拡大, 135° 回転の合成

に他ならない. したがって

$$(i - 1) \cdot 1 = -1 + i$$

より, w の表す点の軌跡は

中心 $-1 + i$, 半径 $\sqrt{2}$ の円

である.

<別解>

z は $|z - i| = 1$ をみたす. ここで

$$w = (i - 1)(z + 1 - i) \Leftrightarrow z = \frac{w}{-1 + i} - 1 + i$$

なので, w は

$$\left| \frac{w}{-1 + i} - 1 + i - i \right| = 1$$

をみたす. これを変形すると

$$|w - (-1 + i)| = |-1 + i| = \sqrt{2}$$

から, 結論を得る.

【4】 (1) $a = 1$ のとき

$$z_2 = 1 + i$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} &= \frac{2 + 2i}{-2i} = -1 + i = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)\end{aligned}$$

$$\therefore \angle z_2 z_1 z_3 = \arg \left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \right) = \frac{3}{4}\pi$$

(2) 求める条件は $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ が実数であることであるから

$$\begin{aligned}\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} &= \frac{(a-1) - 2i}{2 + 2i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\{(a-1) - 2i\}(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{a-3 + (-a-1)i}{4}\end{aligned}$$

よって

$$-a-1=0 \quad \therefore a=-1$$

【5】 他の 2 頂点は、点 (a, b) を原点のまわりに $\pm \frac{2}{3}\pi$ 回転させたものである (図 1). よって、他の 2 頂点に対応する複素数は

$$\begin{aligned}&(a+bi) \left\{ \cos \left(\pm \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\pm \frac{2}{3}\pi \right) \right\} \\ &= (a+bi) \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -\frac{1}{2}a \pm \frac{\sqrt{3}}{2}ai - \frac{1}{2}bi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}bi^2 \\ &= \frac{-a \mp \sqrt{3}b}{2} + \frac{-b \pm \sqrt{3}a}{2}i \quad (\text{複号同順})\end{aligned}$$

ゆえに、他の 2 頂点の x 座標は

$$\frac{-a - \sqrt{3}b}{2}, \quad \frac{-a + \sqrt{3}b}{2}$$

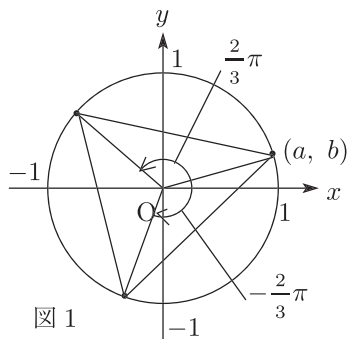


図 1

5章 複素数平面の応用 (3)

問題

【1】 α, β は共役複素数なので

$$\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \alpha\beta = 1 \quad \therefore |\alpha| = |\beta| = 1$$

よって, α, β の表す頂点は図の2頂点 A, B である. したがって, 図より, α と β は

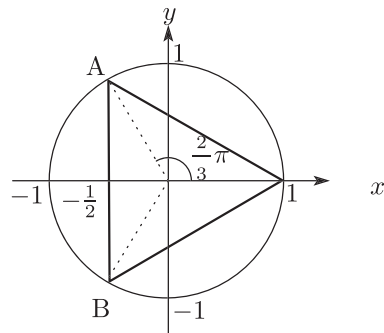
$$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である. 解と係数の関係を用いると

$$\alpha + \beta = -2p$$

よって

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



【2】 $w = \frac{z+2}{z-1}$ を z について解くと

$$(z-1)w = z+2 \quad \therefore (w-1)z = w+2$$

$w = 1$ はこれをみたさない, $w \neq 1$ である. よって

$$z = \frac{w+2}{w-1}$$

これを $|z| = 2$ に代入すると

$$\left| \frac{w+2}{w-1} \right| = 2 \quad \therefore |w+2| = 2|w-1|$$

辺々を平方すると

$$\begin{aligned} |w+2|^2 = 4|w-1|^2 &\iff (w+2)\overline{(w+2)} = 4(w-1)\overline{(w-1)} \\ &\iff (w+2)(\bar{w}+2) = 4(w-1)(\bar{w}-1) \\ &\iff w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} = 0 \\ &\iff (w-2)(\bar{w}-2) = 4 \\ &\iff |w-2|^2 = 4 \\ &\iff |w-2| = 2 \end{aligned}$$

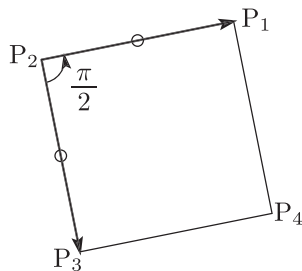
よって, 点 w は点 2 を中心とする半径 2 の円を描く.

- 【3】 (1) P_1, P_2, P_3 はこの順に反時計回りに並ぶから、四角形 $P_1P_2P_3P_4$ が正方形であるとき、 $\overrightarrow{P_2P_1}$ は $\overrightarrow{P_2P_3}$ を反時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものである。よって

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\therefore \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = -i$$

- (2) 四角形 $P_1P_2P_3P_4$ が正方形であるならば、(1) と同様に



$$\frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = -i, \quad \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = -i, \quad \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2} = -i$$

$$\therefore \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2} \quad \dots \textcircled{1}$$

逆に、①が成り立つとき、与式の値を k とおき

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = k, \quad \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = k, \quad \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = k, \quad \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2} = k$$

の辺々の積をとると

$$1 = k^4$$

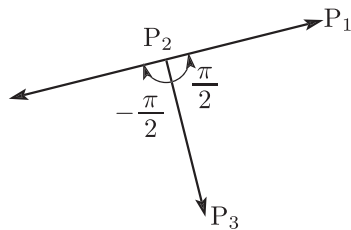
これより $k^2 = \pm 1$ となり

$$k = \pm 1, \pm i$$

ここで、 P_1, P_2, P_3 は同一直線上にないから、 k は実数でない。よって、 $k = \pm i$ となり

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = -k = \pm i$$

すなわち、 $\overrightarrow{P_2P_1}$ は $\overrightarrow{P_2P_3}$ を $\pm \frac{\pi}{2}$ 回転させたものであるが、 P_1, P_2, P_3 は反時計回りに並ぶから、 $-\frac{\pi}{2}$ は不適で、 $\overrightarrow{P_2P_1}$ は $\overrightarrow{P_2P_3}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させたものに他ならない。よって



$$P_1P_2 = P_2P_3, \quad P_1P_2 \perp P_2P_3$$

他の辺についても同様であるから、四角形 $P_1P_2P_3P_4$ は正方形となる。

【4】 (1) ベクトル $\overrightarrow{BC}$ を $-\frac{\pi}{3}$ 回転させると, $\overrightarrow{BD}$ に一致する. これより

$$d - b = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (c - b)$$

よって

$$\begin{aligned} d &= b + \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (c - b) \\ &= b + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (c - b) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) b + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) c \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に, ベクトル $\overrightarrow{CA}$ を $-\frac{\pi}{3}$ 回転させると, $\overrightarrow{CE}$ に一致するので

$$e - c = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (a - c)$$

よって

$$e = c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (a - c) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) a$$

また, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を $-\frac{\pi}{3}$ 回転させると, $\overrightarrow{AF}$ に一致するので

$$f - a = \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right\} (b - a)$$

よって

$$f = a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (b - a) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) b$$

以上より

$$d + e + f = a + b + c$$

すると, $\triangle DEF$ の重心, $\triangle ABC$ の重心を表す複素数はそれぞれ

$$\frac{d + e + f}{3}, \quad \frac{a + b + c}{3}$$

であるが, 上式より

$$\frac{d + e + f}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

したがって, $\triangle DEF$ の重心と $\triangle ABC$ の重心は一致する.

【5】 (1) $\frac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるための条件は

$$\overline{\left\{ \frac{z-2i}{i(z-2)} \right\}} = \frac{z-2i}{i(z-2)}$$

となることである。そこで、 $z \neq 2$ のもとでこの等式を変形すると

$$\begin{aligned} \overline{\left\{ \frac{z-2i}{i(z-2)} \right\}} = \frac{z-2i}{i(z-2)} &\iff \overline{(z-2i)} \cdot i(z-2) = (z-2i) \cdot \overline{i(z-2)} \\ &\iff (\bar{z}+2i) \cdot i(z-2) = (z-2i) \cdot (-i)(\bar{z}-2) \\ &\iff (\bar{z}+2i)(z-2) + (z-2i)(\bar{z}-2) = 0 \\ &\iff z\bar{z} - (1+i)\bar{z} - (1-i)z = 0 \\ &\iff \{z - (1+i)\}\{\bar{z} - (1-i)\} = (1+i)(1-i) \\ &\iff \{z - (1+i)\}\overline{\{z - (1+i)\}} = 2 \\ &\iff |z - (1+i)|^2 = 2 \\ &\iff |z - (1+i)| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

したがって、 z の描く図形は

中心 $1+i$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円 (ただし、点 2 を除く)

<別解>

$z = x + yi$ において考えても面倒ではない。以下に示しておく

$$\begin{aligned} \frac{z-2i}{i(z-2)} &= \frac{x+(y-2)i}{i\{(x-2)+yi\}} = \frac{x+(y-2)i}{-y+(x-2)i} \\ &= \frac{\{x+(y-2)i\}\{-y-(x-2)i\}}{\{-y+(x-2)i\}\{-y-(x-2)i\}} \\ &= \frac{\{-xy+(x-2)(y-2)\} - \{x(x-2)+y(y-2)\}i}{y^2+(x-2)^2} \end{aligned}$$

となるから、 $\frac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるための条件は

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{z-2i}{i(z-2)} \right\} = 0 \iff \frac{x(x-2)+y(y-2)}{y^2+(x-2)^2} = 0$$

であり、これより

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad (\text{ただし、}(x, y) \neq (2, 0))$$

を得る。

- (2) 条件より O, A, B の位置関係は右図のようになるから、円の中心 $1+i$ を γ とおけば

$$\alpha - \gamma = \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) (0 - \gamma)$$

よって

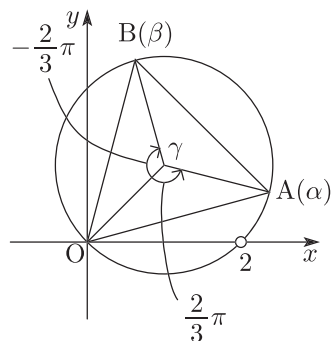
$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 - i) \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

また

$$\beta - \gamma = \left\{ \cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right\} (0 - \gamma)$$

よって

$$\begin{aligned} \beta &= 1 + i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-1 - i) \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$



【1】

(1) 線分 AB 上の点 $P(z)$ は $z = 1 + ti$ ($0 \leq t \leq 2$) と表せる. よって

$$z^2 = 1 - t^2 + 2ti$$

z^2 の実数部分を x , 虚数部分を y とすると

$$\begin{aligned} x &= 1 - t^2 \\ y &= 2t \end{aligned}$$

よって

$$x = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}y^2 + 1 \quad (0 \leq y \leq 4)$$

(2) $\arg \frac{1-w}{2i-w} = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ かつ $|1-w| = |2i-w|$ であるから

$$\frac{1-w}{2i-w} = \pm i$$

これを解く.

(i) $\frac{1-w}{2i-w} = i$ の場合

$$1-w = -2-iw \Leftrightarrow 3 = (1-i)w \text{ より}$$

$$w = \frac{3}{1-i} = \frac{3}{2}(1+i) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

(ii) $\frac{1-w}{2i-w} = -i$ の場合

$$1-w = 2+iw \Leftrightarrow -1 = (1+i)w \text{ より}$$

$$w = \frac{-1}{1+i} = -\frac{1}{2}(1-i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



会員番号		氏 名	
------	--	-----	--