

高2 物理力学完成～円運動・万有引力～



1章 円運動 (1)

問題

■演習

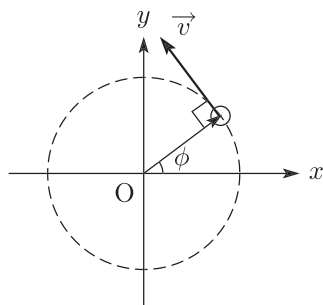
【1】

《解答》

$$(1) \Delta s = 2 \times r \sin \frac{\Delta \phi}{2}$$

(2) Δs を Δt で割って, Δt を 0 に近付けることにより,

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2r \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2r \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \\ &= r\omega \cdot 1 \end{aligned}$$

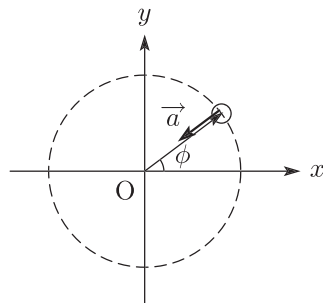
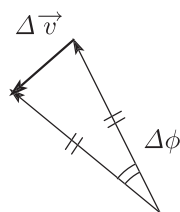


(3) 始点を一致させて, 時間 Δt だけ経過する前後における速度ベクトルを図示すると, 右図のようになるので,

$$|\Delta \vec{v}| = 2 \times v \sin \frac{\Delta \phi}{2}$$

(4) $|\Delta \vec{v}|$ を Δt で割って, Δt を 0 に近付けることにより,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2v \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2v \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \cdot \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \\ &= v\omega \cdot 1 \\ &= r\omega^2 \end{aligned}$$



【2】

《解答》

(1) $R = 3h \tan \frac{\pi}{4} + h = 4h$

(2) 向心方向の運動方程式は,

$$m \times 4h \cdot \omega^2 = T \sin \frac{\pi}{4} \quad \therefore T = 4\sqrt{2}mh\omega^2$$

鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = N + T \cos \frac{\pi}{4} - mg \quad \therefore N = mg - 4mh\omega^2$$

(3) $\omega = \omega_0$ のとき, $N = 0$ となって離れるので,

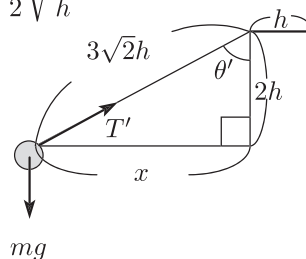
$$0 = mg - 4mh\omega_0^2 \quad \therefore \omega_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}$$

(4) 高さ h で円運動するとき, 右図のようになるので,

$$x = \sqrt{(3\sqrt{2}h)^2 - (2h)^2} = \sqrt{14}h$$

このとき, 糸の傾き角度を θ' とすると,

$$\begin{cases} \sin \theta' = \frac{\sqrt{14}h}{3\sqrt{2}h} = \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \cos \theta' = \frac{2h}{3\sqrt{2}h} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$



また, 糸の張力の大きさを T' として, 鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = T' \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - mg \quad \therefore T' = \frac{3}{\sqrt{2}}mg$$

向心方向の運動方程式は,

$$m \times (\sqrt{14} + 1)h \cdot \omega^2 = T' \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}$$

これらより, T' を消去すると,

$$(\sqrt{14} + 1)mh\omega^2 = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}mg \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{7}g}{(2\sqrt{7} + \sqrt{2})h}}$$

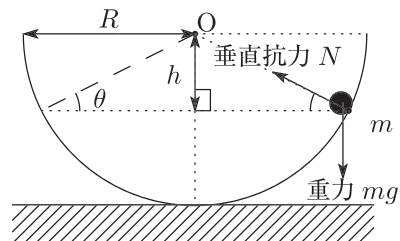
【3】

《解答》

(1) 小球は右図のように重力と垂直抗力を受けている。

(2) 角度 θ を図のように設定すると、

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{h}{R} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} \end{cases}$$



鉛直方向の力のつりあいより、

$$0 = N \sin \theta - mg \quad \therefore \quad N = \frac{R}{h} mg$$

半径は $\sqrt{R^2 - h^2}$ なので、向心方向の運動方程式は、

$$m \cdot \frac{V_0^2}{\sqrt{R^2 - h^2}} = N \cos \theta$$

これらより、

$$m \cdot \frac{V_0^2}{\sqrt{R^2 - h^2}} = \frac{R}{h} mg \cdot \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R} \quad \therefore \quad V_0 = \sqrt{\frac{g(R^2 - h^2)}{h}}$$

(3) (2) の V_0 をふまえると、

$$T = \frac{2\pi\sqrt{R^2 - h^2}}{V_0} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

(4) 力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh \quad \therefore \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

【4】

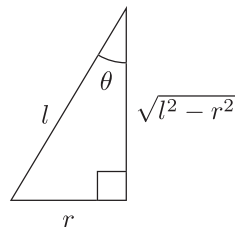
《解答》

(a) $F_C = mr\omega^2$

(b) 右図で $\sin \theta = \frac{r}{l}$ なので,

$$F_H = K(l - l_0) \sin \theta = K(l - l_0) \cdot \frac{r}{l}$$

(c) 右図で $\cos \theta = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l}$ をふまえると,



$$0 = K(l - l_0) \cdot \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l} - mg$$

(d) (a), (b) より, 向心方向の運動方程式は,

$$mr\omega^2 = K(l - l_0) \cdot \frac{r}{l} \quad \therefore \quad l = \frac{Kl_0}{K - m\omega^2}$$

また, (c) を書き換えると,

$$\sqrt{l^2 - r^2} = \frac{mgl}{K(l - l_0)} \quad \therefore \quad r = \sqrt{l^2 - \left\{ \frac{mgl}{K(l - l_0)} \right\}^2}$$

l を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(\frac{Kl_0}{K - m\omega^2} \right)^2 - \left(\frac{mg}{K} \cdot \frac{Kl_0}{m\omega^2 l_0} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{Kl_0}{K - m\omega^2} \right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4}} \end{aligned}$$

(e) $l > 0$ なので,

$$\frac{Kl_0}{K - m\omega^2} > 0 \quad \therefore \quad \omega < \sqrt{\frac{K}{m}}$$

(f) $r^2 > 0$ より,

$$\left(\frac{Kl_0}{K - m\omega^2} \right)^2 - \frac{g^2}{\omega^4} > 0 \quad \therefore \quad \omega > \sqrt{\frac{Kg}{mg + Kl_0}}$$

2章 円運動 (2)

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 点 P の高さは $l - l \cos \theta$ なので, 位置エネルギーは,

$$U = mg \cdot l(1 - \cos \theta)$$

(2) 力学的エネルギーの保存より,

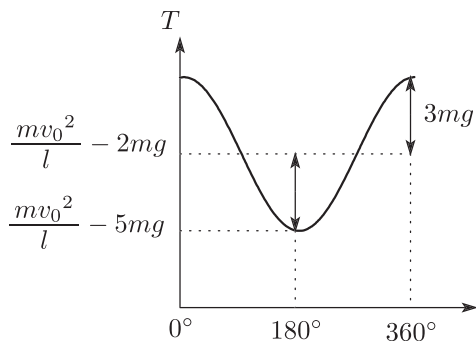
$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad \therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta)}$$

$$(3) m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \theta$$

(4) (2), (3) より v を消去すると,

$$\begin{aligned} T &= mg \cos \theta + \frac{m}{l} \{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \theta)\} \\ &= \left(\frac{mv_0^2}{l} - 2mg \right) + 3mg \cos \theta \end{aligned}$$

これを図示すると下図のようになる.



(5) $\theta = 180^\circ$ における T の最小値が負にならないければよいので,

$$\frac{mv_0^2}{l} - 5mg \geq 0 \quad \therefore v_0 \geq \sqrt{5gl}$$

【2】

《解答》

(イ) P 点における速さを v_1 とし, 点 O を重力の位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga = \frac{1}{2}mv_1^2 + mga \cos \theta_1 \quad \therefore \quad v_1 = \sqrt{v^2 + 2ga(1 - \cos \theta_1)}$$

(ロ) M が球面から受ける力を f とすると, 向心方向の運動方程式は,

$$m \frac{v_1^2}{a} = mg \cos \theta_1 - f$$

これと (イ) より,

$$m \cdot \frac{v^2 + 2ga(1 - \cos \theta_1)}{a} = mg \cos \theta_1 - f$$

$$\therefore \quad f = 3mg \cos \theta_1 - \left(\frac{mv^2}{a} + 2mg \right)$$

(ハ) (ロ) で $\theta_1 = \theta_2$ のとき, $f = 0$ となるので,

$$3mg \cos \theta_2 - \left(\frac{mv^2}{a} + 2mg \right) = 0 \quad \therefore \quad \cos \theta_2 = \frac{v^2 + 2ag}{3ag}$$

(ニ) B 点において, 接線方向の力のつり合いより,

$$0 = mg \sin 30^\circ - F \quad \therefore \quad F = \frac{1}{2}mg$$

(ホ) B 点において, 向心方向の力のつり合いより,

$$0 = mg \cos 30^\circ - N \quad \therefore \quad N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

(ヘ) B 点では $F = \mu N$ となっているので,

$$\frac{1}{2}mg = \mu \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}mg \quad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ト) C 点において, 向心方向の運動方程式は,

$$m \frac{V^2}{a} = mg \cos 60^\circ \quad \therefore \quad V = \sqrt{\frac{1}{2}ga}$$

【3】**《解答》**

(ア) 小球の速さを v とし, 点 A を重力の位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギーの保存より,

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot (-R \sin \theta) \quad \therefore \quad v = \sqrt{2gR \sin \theta}$$

(イ) 小球について, 向心方向の運動方程式は,

$$m \frac{v^2}{R} = N - mg \sin \theta$$

これと (ア) より,

$$m \cdot \frac{2gR \sin \theta}{R} = N - mg \sin \theta \quad \therefore \quad N = 3mg \sin \theta$$

(ウ) 台について, 鉛直方向の力のつりあいより,

$$0 = N' - Mg - N \sin \theta \quad \therefore \quad N' = Mg + N \sin \theta$$

(エ) 台について, 水平方向の力のつりあいより,

$$0 = f' - N \cos \phi \quad \therefore \quad f' = N \cos \phi$$

(オ) $\theta = \phi$ において, 台がすべり出さないための条件 $f' \leq \mu N'$ より,

$$3mg \sin \phi \cdot \cos \phi \leq \mu (Mg + 3mg \sin \phi \cdot \sin \phi)$$

$$\therefore \quad \frac{M}{m} \geq \frac{3 \sin \phi (\cos \phi - \mu \sin \phi)}{\mu}$$

【4】

《解答》

(1) $\frac{1}{2}kx^2$

(2) 力学的エネルギーの保存より,

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \quad \therefore v_0 = x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(3) 点 C を重力の位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギーの保存より,

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 2r \quad \therefore v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 4gr}$$

(4) 点 D における速さを v_D とし, 点 C を重力の位置エネルギーの基準として, 力学的エネルギーの保存より,

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mg\{r + r \cos(\pi - \theta)\}$$

$$\therefore v_D = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gr(1 - \cos \theta)}$$

また, 向心方向の運動方程式は,

$$m \frac{v_D^2}{r} = N + mg \cos(\pi - \theta)$$

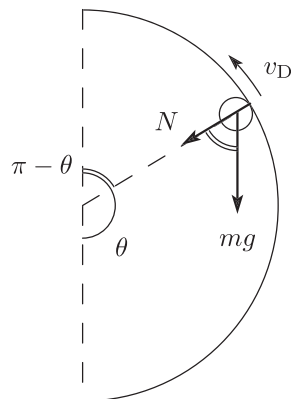
これらより v_D を消去すると,

$$\frac{m}{r} \left\{ \frac{kx^2}{m} - 2gr(1 - \cos \theta) \right\} = N - mg \cos \theta$$

$$\therefore N = \left(\frac{kx^2}{r} - 2mg \right) + 3mg \cos \theta$$

(5) $\theta = \pi$ における N の最小値が負にならないければよいので,

$$\frac{kx^2}{r} - 5mg \geq 0 \quad \therefore x \geq \sqrt{\frac{5mgr}{k}}$$



3章 万有引力(1)

問題

■演習

【1】

《解答》

$$(ア) f = \frac{GMm}{l^2}$$

$$(イ) a = \frac{V^2}{l}$$

$$(ウ) m \frac{V^2}{l} = \frac{GMm}{l^2}$$

$$(エ) V = \sqrt{\frac{GM}{l}}$$

$$(オ) T = \frac{2\pi l}{V} = 2\pi l \sqrt{\frac{l}{GM}}$$

(カ) (オ) の式を 2 乗すると, T の 2 乗は l の 3 乗に比例している.

$$(キ) m'g = \frac{GMm'}{R^2}$$

(ク) (キ) より $MG = gR^2$ と表せるので, これを (オ) の式に代入すると,

$$T = 2\pi l \sqrt{\frac{l}{gR^2}} = \frac{2\pi l}{R} \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(ケ) (ク) の式に $l = 60R$ を代入すると,

$$T = \frac{2\pi \cdot 60R}{R} \sqrt{\frac{60R}{g}} = 120\pi \sqrt{\frac{60R}{g}}$$

与えられた数値を代入すると,

$$T = 120 \times 3.1 \times \frac{7.7 \times (2.5 \times 10^3)}{3.1} = 2.31 \times 10^6 [\text{s}]$$

1[日]=24×3600[s] をふまえると,

$$T = \frac{2.31 \times 10^6}{24 \times 3600} \doteq 27 \text{ 日}$$

【2】

《解答》

(ア) $F = \frac{GMm}{r^2}$

(イ) $\frac{2\pi}{T}$

(ウ) $r \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

(エ) (ア), (ウ) をふまえると, 運動方程式は,

$$m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GMm}{r^2} \quad \therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

(オ) 速さは $r \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi r}{T}$ なので, 運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi r}{T} \right)^2 = \frac{2\pi^2 m r^2}{T^2}$$

(カ) (エ), (オ) より,

$$K = \frac{2\pi^2 m r^2}{\frac{4\pi^2}{GM} r^3} = \frac{GMm}{2r}$$

(キ) $U = -\frac{GMm}{r}$

(ク) (カ), (キ) より,

$$K + U = \frac{GMm}{2r} + \frac{-GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

【3】**《解答》**

(1) (ア) 接線方向

(a) $v\Delta t$

(b) $\Delta S = \frac{1}{2}R \cdot v\Delta t$

(c) $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}Rv$

(イ) 等速円運動

(2) (ウ) 太陽

(d) $\frac{v^2}{R}$

(e) $F = m\frac{v^2}{R}$

(f) $T = \frac{2\pi R}{v}$

(g) 問題文の③, ④ 式より, v を消去すると,

$$F = \frac{m}{R} \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 m R}{T^2}$$

(h) 問題文の⑤, ⑥ 式より, T^2 を消去すると,

$$F = \frac{4\pi^2 m R}{R^3/k} = \frac{4\pi^2 k m}{R^2}$$

(3) (エ) 二

(オ) 反比例

(カ) 比例

(キ) 引力

(ク) 万有引力

【4】

《解答》

(1) (a) $F = \frac{GMm}{R^2}$

(b) (a) の F が重力 mg なので,

$$mg = \frac{GMm}{R^2} \quad \therefore \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

(2) (c) $U_R = -\frac{GMm}{R}$

(d) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{-GMm}{R} = 0 + \frac{-GMm}{2R} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(e) 無限遠点で速さが 0 に収束する場合について, 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv_R^2 + \frac{-GMm}{R} = 0 + 0 \quad \therefore \quad v_R = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

ここで (b) より $GM = gR^2$ と表せるので,

$$v_R = \sqrt{\frac{2 \cdot gR^2}{R}} = \sqrt{2gR}$$

与えられた数値を代入すると,

$$\begin{aligned} v_R &= \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \\ &= 112 \times 10^2 \\ &\doteq 1.1 \times 10^4 [\text{m/s}] \end{aligned}$$

4章 万有引力 (2)

問題

■ 演習

【1】

《解答》

(1) 円軌道の半径は $R + h$ なので、向心方向の運動方程式は、

$$m \frac{v^2}{R + h} = \frac{GMm}{(R + h)^2} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R + h}}$$

この速さで1周 $2\pi(R + h)$ を運動する時間が T なので、

$$T = \frac{2\pi(R + h)}{v} = 2\pi(R + h) \sqrt{\frac{R + h}{GM}}$$

(2) 爆発直後の A の速さが v_A のとき、無限遠方で A の速さが 0 となることをふまえ、無限遠方を万有引力の位置エネルギーの基準として、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot v_A^2 + \frac{-GM \cdot \frac{m}{2}}{R + h} = 0 + 0 \quad \therefore v_A = \sqrt{\frac{2GM}{R + h}}$$

(3) 爆発の前後における運動量の保存より、

$$mv = \frac{m}{2} v_A + \frac{m}{2} v_B \quad \therefore v_B = 2v - v_A$$

これと (1), (2) より、

$$v_B = 2\sqrt{\frac{GM}{R + h}} - \sqrt{\frac{2GM}{R + h}} = (2 - \sqrt{2})\sqrt{\frac{GM}{R + h}}$$

地表に達するときの B の速さを u_B とし、無限遠方を万有引力の位置エネルギーの基準として、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot v_B^2 + \frac{-GM \cdot \frac{m}{2}}{R + h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot u_B^2 + \frac{-GM \cdot \frac{m}{2}}{R}$$

これを解いて v_B を代入すると、

$$u_B = \sqrt{\frac{2GM\{(3 - 2\sqrt{2})R + h\}}{R(R + h)}}$$

【2】

《解答》

(ア) 人工衛星の質量を m とすると、向心方向の運動方程式は、

$$m \frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

(イ) 第2宇宙速度を v' とすると、初速 v' で打ち上げた場合に無限遠方で速さが0となる。この場合について、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GMm}{R} = 0 + 0 \quad \therefore \quad v' = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \dots v \text{ の } \sqrt{2} \text{ 倍}$$

$$(ウ) \quad \frac{1}{2}m(av)^2 + 0 = \frac{1}{2}ma^2v^2$$

$$(エ) \quad \frac{1}{2} \cdot av \cdot bR = \frac{1}{2}abRv$$

$$(オ) \quad \frac{1}{2}XV$$

$$(カ) \quad \frac{1}{2}mV^2 + \frac{-GMm}{X}$$

(キ) (オ) で $X = R$, $V = V_0$ として、ケプラーの第2法則より、

$$\frac{1}{2}abRv = \frac{1}{2}RV_0 \quad \therefore \quad V_0 = abv$$

(ク) (カ) で $X = R$, $V = V_0$ として、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}ma^2v^2$$

(ア), (キ) をふまえると、

$$\frac{ma^2b^2}{2} \cdot \frac{GM}{R} - \frac{GMm}{R} = \frac{ma^2}{2} \cdot \frac{GM}{R} \quad \therefore \quad b = \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{a}$$

(ケ) 分裂してAの速さが v となる場合のBの速さを v_B として、Bを打ち出す前後における運動量の保存より、

$$mV_0 = \frac{m}{2}v + \frac{m}{2}v_B \quad \therefore \quad v_B = 2V_0 - v$$

よって、Aから見てBを打ち出した速さは、

$$(2V_0 - v) - v = 2(V_0 - v)$$

【3】

《解答》

(ア) $m \frac{v^2}{r}$

(イ) 向心方向の運動方程式は,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(ウ) $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$

(エ) (ウ) を 2 乗すると,

$$T^2 = 4\pi^2 r^2 \frac{r}{GM} \quad \therefore \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

(オ) (イ) より, 惑星の運動エネルギーは,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{GM}{r}$$

また, 万有引力による位置エネルギーは $U = -\frac{GMm}{r}$ なので,

$$K : U = \frac{GMm}{2r} : \frac{-GMm}{r} = 1 : -2$$

(カ) $\overline{FA} = a - a\varepsilon$ なので,

$$\Delta S = \frac{1}{2}(a - a\varepsilon) \cdot v_A \Delta t \quad \therefore \quad I_A = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1 - \varepsilon}{2}av_A$$

(キ) $\overline{OB} = \sqrt{a^2 - (a\varepsilon)^2}$ なので,

$$\Delta S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (a\varepsilon)^2} \cdot v_B \Delta t \quad \therefore \quad I_B = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2}av_B$$

(ク) $I_A = I_B$ より,

$$\frac{1 - \varepsilon}{2}av_A = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2}av_B \quad \therefore \quad v_A = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \times v_B$$

(ケ) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{-GMm}{a - a\varepsilon} = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{-GMm}{a}$$

これと (ク) より,

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}v_B^2 - \frac{GMm}{a(1 - \varepsilon)} = \frac{m}{2} \cdot v_B^2 - \frac{GMm}{a} \quad \therefore \quad v_B = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

(コ) (キ), (ケ) をふまえると,

$$T = \frac{\pi a \sqrt{a^2 - (a\varepsilon)^2}}{\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{2}a \cdot \sqrt{\frac{GM}{a}}} = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$

【4】

《解答》

(イ) $K = \frac{1}{2}mv^2$

(ロ) $U = -\frac{GMm}{r}$

(ハ) 向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad \therefore \quad r = \frac{GM}{v^2}$$

(ニ) (ロ), (ハ) より,

$$U = -\frac{GMm}{GM/v^2} = -mv^2 \quad \therefore \quad \frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{-mv^2} = -\frac{1}{2}$$

(ホ) (ニ) より $K = -\frac{1}{2}U$ と表せるので,

$$E = \left(-\frac{1}{2}U\right) + U = -\frac{GMm}{2r}$$

(ヘ) (ハ) より $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ と表せるので,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}$$

(ト) (ホ) の r を $\overline{AX} = \frac{R+r}{2}$ で置き換えることにより,

$$E = -\frac{GMm}{2 \cdot \overline{AX}} = -\frac{GMm}{R+r}$$

(チ) 遠地点 A における力学的エネルギーが (ト) の E なので,

$$\frac{1}{2}mv'^2 + \frac{-GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+r} \quad \therefore \quad v' = \sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

また, (ハ) と同様に半径 R の円運動について立式すると,

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

これらより,

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{R}}}{\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} + 1 \right)}$$

ここで (ヘ) をふまえると,

$$\begin{cases} T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}} \\ t = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} \end{cases} \quad \therefore \quad \left(\frac{T}{t}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^3$$

以上より, $\frac{R}{r}$ を消去すると,

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{T}{t} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right\}}$$

(リ) (チ) をふまえると,

$$\frac{K}{K'} = \left(\frac{v}{v'} \right)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{T}{t} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right\}$$

与えられた数値を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{K}{K'} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{24 \times 60}{90} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(4 \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ 4 \times (1.26)^2 + 1 \} \doteq 3.7 \end{aligned}$$

5章 力学入試問題演習

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) 箱と台車2について、力のつりあいより、

$$\begin{cases} 0 = T_0 - S_0 & \cdots \textcircled{1} \\ 0 = R_0 - mg & \cdots \textcircled{2} \\ 0 = T_0 - M_2g & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

(イ) ②より、 $R_0 = mg$

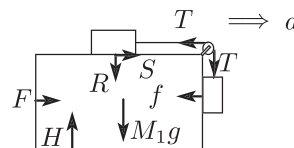
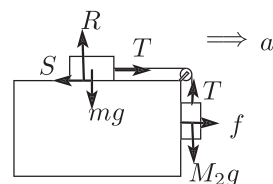
(ロ) ① - ③より、 $S_0 = M_2g$

(ハ) 滑り出さないための条件は $S_0 \leq \mu R_0$ なので、

$$M_2g \leq \mu mg \quad \therefore M_2 \leq \mu m$$

(2) それぞれの運動方程式は、

$$\begin{cases} ma = T - S & \cdots \textcircled{4} \\ m \cdot 0 = R - mg & \cdots \textcircled{5} \\ M_1a = F + S - T - f & \cdots \textcircled{6} \\ M_1 \cdot 0 = H - M_1g - R - T & \cdots \textcircled{7} \\ M_2a = f & \cdots \textcircled{8} \\ M_2 \cdot 0 = T - M_2g & \cdots \textcircled{9} \end{cases}$$



(ニ) ④ + ⑥ + ⑧より、

$$(M_1 + M_2 + m)a = F \quad \therefore a = \frac{F}{M_1 + M_2 + m}$$

(ホ) ⑨より、 $T = M_2g$

(ヘ) ④より、

$$\begin{aligned} S &= T - ma \\ &= M_2g - \frac{m}{M_1 + M_2 + m}F \end{aligned}$$

(ト) ⑧より、 $f = \frac{M_2}{M_1 + M_2 + m}F$

(3) (チ) ⑥より、 $a = \frac{F + S - T - f}{M_1}$

(リ) ⑦より、 $H = M_1g + T + R$

(4)(ヌ) (へ) で F を大きくすると $S < 0$ となる。このとき、箱が左に滑らないための条件は $-S \leq \mu R$ なので、

$$\frac{m}{M_1 + M_2 + m}F - M_2g \leq \mu mg \quad \therefore \quad F \leq \frac{(M_2 + \mu m)(M_1 + M_2 + m)g}{m}$$

(5)(ル) $S = 0$ なので、

$$0 = M_2g - \frac{m}{M_1 + M_2 + m}F \quad \therefore \quad F = \frac{M_2(M_1 + M_2 + m)g}{m}$$

【2】

《解答》

(1) 運動量の保存より,

$$m_B v_0 = (m_A + m_B) v \quad \therefore \quad v = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0$$

(2) (1) をふまえると,

$$\frac{1}{2} m_B v_0^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) v^2 = \frac{m_A m_B v_0^2}{2(m_A + m_B)}$$

(3) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2} (m_A + m_B) v^2 + \frac{1}{2} k \cdot 0^2 = 0 + \frac{1}{2} k d^2 \quad \therefore \quad d = \frac{m_B v_0}{\sqrt{(m_A + m_B)k}}$$

(4) バネの縮みが x の位置における加速度を a , A と B の間で作用する抗力を N とすると, A および B の運動方程式は,

$$\begin{cases} m_A a = -kx + N \\ m_B a = -N \end{cases} \quad \therefore \quad a = -\frac{k}{m_A + m_B} x$$

A および B の運動は単振動と分かり,

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}} \quad \therefore \quad \text{周期 } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}}$$

求める時間 t は, 振動の中心から右端までの所要時間なので,

$$t = \frac{1}{4} T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}}$$

(5) 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2} (m_A + m_B) v^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v'^2 + 0 \quad \therefore \quad v' = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0$$

(6) バネの縮みが x の位置における加速度を a' とすると, A の運動方程式は,

$$m_A a' = -kx \quad \therefore \quad a' = -\frac{k}{m_A} x$$

A の運動は単振動と分かり,

$$\text{角振動数 } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_A}} \quad \therefore \quad \text{周期 } T' = 2\pi \sqrt{\frac{m_A}{k}}$$

また, 単振動の振幅を A として, 力学的エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2} m_A v'^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} k A^2 \quad \therefore \quad A = \frac{m_B v_0}{m_A + m_B} \sqrt{\frac{m_A}{k}}$$

【3】

《解答》

(1) 垂直抗力の大きさを N_0 とすると、力のつりあいの式は、

$$\begin{cases} 0 = Mg + N_0 - kd \\ 0 = mg - N_0 \end{cases} \quad \therefore \quad N_0 = mg$$

これらより N_0 を消去すると、

$$0 = Mg + mg - kd \quad \therefore \quad d = \frac{(M+m)g}{k}$$

$$(2) \quad \begin{cases} Ma = Mg + N - k(x - l_0) & \cdots \textcircled{1} \\ ma = mg - N & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(3) ①+②より、

$$(M+m)a = (M+m)g + kl_0 - kx \quad \cdots \textcircled{3}$$

振動の中心では $a = 0$ なので、

$$0 = (M+m)g + kl_0 - kx_0 \quad \therefore \quad x_0 = l_0 + \frac{(M+m)g}{k}$$

x_0 を用いて③を書き換えると、

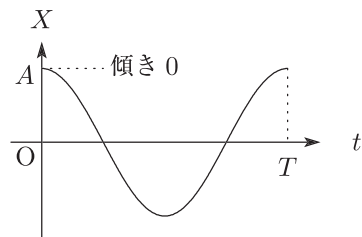
$$(M+m)a = kx_0 - kx \quad \therefore \quad a = -\frac{k}{M+m}(x - x_0)$$

運動は単振動と分かり、

$$\text{角振動数 } \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad \therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

(4) つりあいからのずれ $x - x_0$ を X とおくと、 $X-t$ グラフは右図のようになるので、

$$\begin{aligned} x - x_0 &= A \cos(\omega t) \\ \therefore \quad x &= x_0 + A \cos(\omega t) \end{aligned}$$



(3) をふまえると、

$$x = l_0 + \frac{(M+m)g}{k} + A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)$$

(5) ① $\times m -$ ② $\times M$ より、

$$0 = (M+m)N - mk(x - l_0) \quad \therefore \quad N = \frac{mk}{M+m}(x - l_0)$$

(4) をふまえると,

$$N = mg + \frac{mkA}{M+m} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{M+m}} t \right)$$

小球が皿から浮き上がらないための条件は $N_{\min} \geq 0$ なので,

$$mg + \frac{mkA}{M+m} \cdot (-1) \geq 0 \quad \therefore \quad A \leq \frac{(M+m)g}{k}$$

【4】

《解答》

- (1) 円軌道の最下点を重力による位置エネルギーの基準とすると、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - R\cos\theta) \quad \therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)}$$

- (2) 向心方向の運動方程式は、

$$m\frac{v^2}{R} = T - mg\cos\theta \quad \therefore T = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\theta$$

これと (1) より、

$$T = \frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\theta$$

- (3) P で $T_{\min} = 0$ となる場合が、半円を描いて P に到達できる限界なので、

$$\frac{mv_0^2}{R} - 2mg + 3mg\cos\pi = 0 \quad \therefore v_0 = \sqrt{5gR}$$

- (4) (2) より、Q における張力の大きさは、

$$T_Q = \frac{m \cdot 5gR}{R} - 2mg = 3mg$$

この張力が $-x$ 方向に作用し、重力が $-y$ 方向に作用するので、

$$\begin{cases} x \text{ 成分} \cdots -3mg \\ y \text{ 成分} \cdots -mg \end{cases}$$

- (5) $+y$ 方向

- (6) (1), (3) より、Q における速さは、

$$v_Q = \sqrt{5gR - 2gR\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3gR}$$

これをふまえて、Q を重力による位置エネルギーの基準とすると、力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}m \cdot 3gR + 0 = 0 + mgy_{\max} \quad \therefore y_{\max} = \frac{3}{2}R$$

- (7) (1), (3) より、P における速さは、

$$v_P = \sqrt{5gR - 2gR(1 - \cos\pi)} = \sqrt{gR}$$

- (8) 糸から外れた時刻を $t = 0$ とすると、時刻 t における位置は、

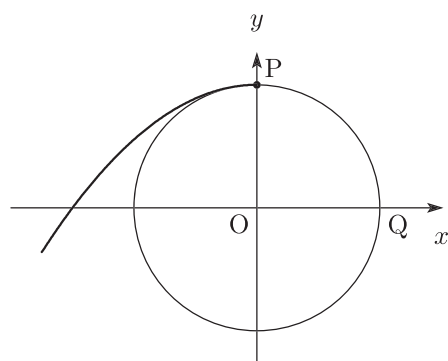
$$\begin{cases} x = -\sqrt{gR} \cdot t \\ y = R - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$y = 0$ となる時刻を $t = t_0$ とすると、

$$R - \frac{1}{2}gt_0^2 = 0 \quad \therefore \quad t_0 = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

このときの x 座標は、

$$x = -\sqrt{gR} \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} = -\sqrt{2}R$$





会員番号

氏 名