M3JSA/M3JA/M3TA

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学

難関大理系数学 T

1章　実戦演習1

問題

【1】(1) $a^2+b^2=16 \quad \cdots\cdots①, \quad a^3+b^3=44 \quad \cdots\cdots②$

①, ②において $a+b=u,\ ab=v$ とおくと

$$\begin{cases} u^2-2v=16 & \cdots\cdots①' \\ u^3-3uv=44 & \cdots\cdots②' \end{cases}$$

ただし，$a,\ b$ は2次方程式

$t^2-ut+v=0$

の2解であり，仮定よりこれらは実数でなければならないから

$u^2-4v \geqq 0 \quad \cdots\cdots③$

$①' \times 3u - ②' \times 2$ より，v を消去すると

$3u^3-2u^3=48u-88 \qquad \therefore\ u^3-48u+88=0$

これを解いて

$(u-2)(u^2+2u-44)=0 \qquad \therefore\ u=2,\ -1\pm\sqrt{45} \quad \cdots\cdots④$

一方，$①'$ より $2v=u^2-16$ であるから，これを③に代入すると

$u^2-2(u^2-16) \geqq 0 \qquad \therefore\ u^2 \leqq 32 \quad \cdots\cdots⑤$

ここで

$(-1\pm\sqrt{45})^2=46\mp2\sqrt{45} \geqq 46-2\sqrt{45} > 46-2\cdot7=32$

が成り立つことに注意すると，④, ⑤を同時にみたす u の値は

$u=2 \qquad \therefore\ a+b=\mathbf{2}$ 　(答)　$\cdots\cdots⑥$

(2) ⑥を $①'$ に代入して，v の値を求めると

$v=-6 \qquad \therefore\ ab=-6 \quad \cdots\cdots⑦$

さて，自然数 n に関する数学的帰納法により

$P_n=a^n+b^n \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

が4の倍数となることを示す．

まず，P_n がみたす漸化式を求める．

⑥, ⑦より，$a,\ b$ は2次方程式 $t^2-2t-6=0$ の2解であるから

$a^2-2a-6=0, \quad b^2-2b-6=0$

両辺にそれぞれ $a^n,\ b^n$ をかけて

$a^{n+2}-2a^{n+1}-6a^n=0, \quad b^{n+2}-2b^{n+1}-6b^n=0$

辺々加えると

$$a^{n+2}+b^{n+2}-2(a^{n+1}+b^{n+1})-6(a^n+b^n)=0$$

$\therefore\ P_{n+2}-2P_{n+1}-6P_n=0 \quad \cdots\cdots⑧$

(i) $n=2,\ 3$ のとき，①, ②より $P_2,\ P_3$ はいずれも4の倍数である．

(ii) $n=k,\ k+1\ (k \geqq 2)$ のとき，$P_k,\ P_{k+1}$ はいずれも4の倍数であると仮定する．このとき，⑧より $P_{k+2}=2P_{k+1}+6P_k$ も4の倍数となる．

以上 (i), (ii) より，題意が示された．　〔証明終〕

≪注≫

一般に，$P_n = p\alpha^n + q\beta^n$ (p, q, α, β は定数) で定義される P_n は，漸化式

$$P_{n+2} - (\alpha+\beta)P_{n+1} + \alpha\beta P_n = 0$$

をみたす．これは，(2) の解答と同様にして確かめられる．

【2】(1) 原点 O(0, 0) と格子点 P(a, b) を結ぶ線分上にある格子点の個数を求める．

a と b の最大公約数を d とし

$$a = da', \quad b = db' \quad (a',\ b' \text{ は整数}) \quad \cdots\cdots ①$$

とする．

線分 OP 上の格子点 $(X,\ Y)$ は，$bx - ay = 0$ 上にあり，$aY = bX$ をみたす．

① より

$$a'Y = b'X$$

で a', b' が互いに素なので

$$X = a't,\ Y = b't \ (t \text{ は整数})$$

と表される．

よって，線分 OP 上の両端を除く格子点は

$$(a',\ b'),\ (2a',\ 2b'),\ \cdots\cdots,\ ((d-1)a',\ (d-1)b')$$

の $d-1$ 個ある．

したがって，A$(a_1,\ a_2)$, B$(b_1,\ b_2)$, C$(c_1,\ c_2)$ とすると，題意をみたすためには

$$\begin{cases} b_1 - a_1 \text{ と } b_2 - a_2 \text{ の最大公約数が偶数 } 2d \\ \text{かつ} \\ c_1 - a_1 \text{ と } c_2 - a_2 \text{ の最大公約数が偶数 } 2e \end{cases}$$

つまり，l_1, l_2, m_1, m_2 を整数として

$$b_1 - a_1 = 2dl_1, \quad b_2 - a_2 = 2dl_2, \quad c_1 - a_1 = 2em_1, \quad c_2 - a_2 = 2em_2$$

と表すことができるから

$$b_1 - c_1 = 2(dl_1 - em_1), \quad b_2 - c_2 = 2(dl_2 - em_2)$$

と表すことができる．

B と C の x 座標，y 座標の差の最大公約数も偶数となるので，線分 BC 上の端点を除く格子点は奇数個である．　〔証明終〕

(2) (1) より，次の 2 つのベクトルは，整数 l, m, s, t (l と m, s と t は互いに素) を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4l \\ 4m \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4s \\ 4t \end{pmatrix}$$

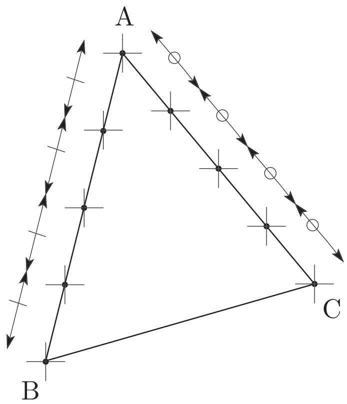
と表される．よって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}$$

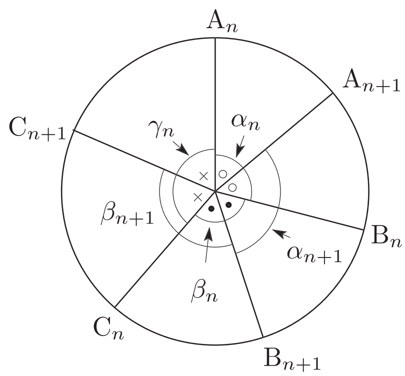
$$= \frac{1}{2}\sqrt{(16l^2+16m^2)(16s^2+16t^2) - (16ls+16mt)^2}$$

$$= 8|lt - ms|$$

$|lt - ms|$ は整数より，△ABC の面積は 8 の倍数である．　〔証明終〕



【3】(1)　$\angle \mathrm{B}_n\mathrm{OC}_n = \beta_n$，$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{OA}_n = \gamma_n$ とおくと，右図より，



$$\begin{cases} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 2\pi & \cdots\cdots ① \\ \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n) & \cdots\cdots ② \\ \beta_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\beta_n + \gamma_n) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，③より，

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{1}{2}(2\pi - \alpha_n) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\alpha_n \end{aligned}$$

$$\therefore\ \ \beta_n = \pi - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}$$

だから，これを②に代入して，

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \pi - \frac{1}{2}\alpha_{n-1}\right)$$

$$\therefore\ \ 4\alpha_{n+1} - 2\alpha_n + \alpha_{n-1} = 2\pi \qquad \cdots\cdots ④$$

となる．　　（証明終）

(2)　④より，

$$4\alpha_{n+2} - 2\alpha_{n+1} + \alpha_n = 2\pi \qquad \cdots\cdots ⑤$$

⑤ $\times 2 +$ ④ より，

$$8\alpha_{n+2} + \alpha_{n-1} = 6\pi$$

$$\therefore\ \ \alpha_{n+2} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{8}\alpha_{n-1}$$

（証明終）

(3)　(2) の結果において n を $3n-2$ に置き換えると，

$$\alpha_{3n}=\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{8}\alpha_{3(n-1)}$$

$$\therefore\quad \alpha_{3n}-\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{8}\left(\alpha_{3(n-1)}-\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって，数列 $\left\{\alpha_{3n}-\dfrac{2}{3}\pi\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列だから，

$$\alpha_{3n}-\frac{2}{3}\pi=\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(\alpha_0-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\therefore\quad \alpha_{3n}=\frac{2}{3}\pi+\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(\alpha_0-\frac{2}{3}\pi\right)\qquad \text{(答)}$$

【4】(1)

$$\begin{cases} 2x+3y=m & \cdots\cdots ① \\ 2(-m)+3m=m & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$$2(x+m)+3(y-m)=0$$

$$\therefore\quad 2(x+m)=-3(y-m)$$

2 と 3 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$x+m=3k,\quad y-m=-2k$$

$$\therefore\quad x=3k-m,\quad y=m-2k$$

と表される．ここで，$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ より

$$\frac{m}{3} \leqq k \leqq \frac{m}{2}\quad \cdots\cdots ③$$

である．

さて，$N(m)$ は③をみたす整数 k の個数に一致し，$N(m+6)$ は $\dfrac{m+6}{3} \leqq k \leqq \dfrac{m+6}{2}$ をみたす整数 k の個数に一致する．ここで

$$\frac{m+6}{3} \leqq k \leqq \frac{m+6}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{m}{3}+2 \leqq k \leqq \frac{m}{2}+3$$

$$\therefore\quad \frac{m}{3} \leqq k-2 \leqq \frac{m}{2}+1\quad \cdots\cdots ④$$

となり，$N(m+6)$ は④をみたす $k-2$ の個数と一致する．その個数は $N(m)$ より 1 つ多いから

$$N(m+6)=N(m)+1$$

が成り立つ．　〔証明終〕

(2) ③は $m=0$ のとき，$0 \leqq k \leqq 0$ で，$N(0)=1$.

③は $m=1$ のとき，$\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ で，$N(1)=0$.

③は $m=2$ のとき，$\dfrac{2}{3} \leqq k \leqq \dfrac{2}{2}$ で，$N(2)=1$.

③は $m=3$ のとき，$\dfrac{3}{3} \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}$ で，$N(3)=1$.

③は $m=4$ のとき，$\dfrac{4}{3} \leqq k \leqq \dfrac{4}{2}$ で，$N(4)=1$.

③は $m=5$ のとき，$\dfrac{5}{3} \leqq k \leqq \dfrac{5}{2}$ で，$N(5)=1$.

よって

$$N(m)=1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right] \quad \cdots\cdots ⑤$$

は $0 \leqq m \leqq 5$ のとき成り立つ．⑤がある m で成り立つと仮定すると (1) より

$$\begin{aligned} N(m+6) &= N(m)+1 \\ &= 1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]+1 \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} &1-(m+6)+\left[\frac{m+6}{2}\right]+\left[\frac{2(m+6)}{3}\right] \\ &= 1-m-6+\left[\frac{m}{2}+3\right]+\left[\frac{2m}{3}+4\right] \\ &= 1-m-6+\left[\frac{m}{2}\right]+3+\left[\frac{2m}{3}\right]+4 \\ &= 1-m+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{2m}{3}\right]+1 \end{aligned}$$

となるから

$$N(m+6)=1-(m+6)+\left[\frac{m+6}{2}\right]+\left[\frac{2(m+6)}{3}\right]$$

となり，$m+6$ のときも成り立つ．したがって，数学的帰納法により，0 以上の整数 m に対して⑤が成り立つことが証明された．　　〔証明終〕

＜別解＞

$\lceil x \rceil$ は x の小数部分を切り上げた整数，$\lfloor x \rfloor$ は x の小数部分を切り捨てた整数を表すとする．x が整数のときは，$\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ である．

この記号を用いて解答すると，次のようになる．

(1) ③を得るまでは同様.

③より

$$\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \leqq k \leqq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

と書けて，これをみたす整数の k の個数 $N(m)$ は

$$N(m)=\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + 1$$

である.

よって

$$\begin{aligned} N(m+6) &= \left\lfloor \frac{m+6}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m+6}{3} \right\rceil + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{m}{2}+3 \right\rfloor - \left\lceil \frac{m}{3}+2 \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

$$= \left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 3\right) - \left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + 2\right) + 1$$
$$= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil + 2$$
$$= N(m) + 1$$

(2) $[x]$ と $\lfloor x \rfloor$ は同じ記号である．よって

$$N(m) = 1 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$

が

$$N(m) = 1 + \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{2m}{3}\right] - m$$

に一致することを示すためには

$$\left[\frac{2m}{3}\right] - m = -\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$
$$\iff \quad \left[\frac{2m}{3}\right] + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - m = 0 \quad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つことを示せばよい.

ここで，$m = 3l + r$ (l は整数で r は 0, 1, 2 のいずれか) とおくと

$$\left[\frac{2m}{3}\right] + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - m$$
$$= \left[\frac{2(3l+r)}{3}\right] + \left\lceil \frac{3l+r}{3} \right\rceil - (3l+r)$$
$$= \left[2l + \frac{2r}{3}\right] + \left\lceil l + \frac{r}{3} \right\rceil - (3l+r)$$
$$= 2l + \left[\frac{2r}{3}\right] + l + \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil - 3l - r$$
$$= \left[\frac{2r}{3}\right] + \left\lceil \frac{r}{3} \right\rceil - r$$

となり，$r = 0$，1，2 をそれぞれ代入すれば

$$\left[\frac{0}{3}\right] + \left\lceil \frac{0}{3} \right\rceil - 0 = 0 + 0 - 0 = 0$$
$$\left[\frac{2}{3}\right] + \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$
$$\left[\frac{4}{3}\right] + \left\lceil \frac{2}{3} \right\rceil - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

となり，いずれの場合も 0 となるから，⑥は成り立つ.

以上より，証明された.

【5】点 P の y 座標が整数 n のときの x 座標を x_n とおく．また，点 $(x_n,\ n)$，$(x_{n+1},\ n+1)$ を結ぶ線分の傾きを a_n とおくと，

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = sa_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

ゆえに

$$a_n = as^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

また，

$$a_n = \frac{(n+1)-n}{x_{n+1}-x_n} = \frac{1}{x_{n+1}-x_n}$$

$a \fallingdotseq 0,\ s \fallingdotseq 0$ より

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{as^n}$$

ゆえに，$n \geqq 1$ のとき

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{as^k} \qquad (\because \quad x_0 = 0)$$

数列 $\left\{\dfrac{1}{as^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a}$，公比 $\dfrac{1}{s}$ の等比数列だから，公比 $\dfrac{1}{s}$ について，$0 < \dfrac{1}{s} < 1$，すなわち，$s > 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{s}} = \frac{s}{a(s-1)}$$

また，$\dfrac{1}{s} \geqq 1$，すなわち，$0 < s \leqq 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

したがって，点 P の描く折れ線が直線

$$x = b \quad (b > 0)$$

を横切るための条件は，次の (i) または (ii) である．

(i) $s > 1$ かつ $\dfrac{s}{a(s-1)} > b \qquad \therefore \quad s > ab(s-1) \qquad (\because \quad s-1>0,\ a>0)$

(ii) $0 < s \leqq 1$（かつ $a,\ b$ は任意正数）

以上より，求める条件は

$$\begin{cases} \boldsymbol{s > 1} \\ \boldsymbol{s > ab(s-1)} \end{cases} \textbf{ または } \boldsymbol{0 < s \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

【6】

$$\sqrt{2n^2-k^2}-1<[\sqrt{2n^2-k^2}]\leqq\sqrt{2n^2-k^2}$$

なので

$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}\leqq\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2-\frac{k^2}{n^2}}-\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\frac{k^2}{n^2}}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot n\\&=\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\\&=\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx\cdots\cdots①\end{aligned}$$

であり①において $x=\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta,\ x:0\to1 \text{ のとき}\theta\text{: }0\to\frac{\pi}{4}$$

なので

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{2-x^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos2\theta+1)d\theta\\&=\left[\frac{1}{2}\sin2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

また

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}}\qquad(\text{答})$$

【7】(1)

$$
\begin{aligned}
c_n &= (n+1)\int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \ = \ \int_0^1 (x^{n+1})' \cos \pi x \, dx \\
&= \Big[x^{n+1}\cos \pi x\Big]_0^1 + \pi \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx \\
&= -1 + \pi \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x \, dx \ = \ -1 + \pi \left\{ \frac{1}{n+2} \int_0^1 (x^{n+2})' \sin \pi x \, dx \right\} \\
&= -1 + \frac{\pi}{n+2} \left(\Big[x^{n+2} \sin \pi x\Big]_0^1 - \pi \int_0^1 x^{n+2} \cos \pi x \, dx \right) \\
&= -1 + \frac{\pi}{n+2} \left(\Big[x^{n+2} \sin \pi x\Big]_0^1 - \frac{\pi}{n+3} c_{n+2} \right) \\
&= -1 - \frac{\pi^2}{(n+2)(n+3)} c_{n+2}
\end{aligned}
$$

よって

$$\boldsymbol{c_n + 1 = -\frac{\pi^2}{(n+2)(n+3)} c_{n+2}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の計算の途中より

$$c_n + 1 = \pi \int_0^1 x^{n+1} \sin \pi x dx$$

したがって

$$|c_n + 1| \leqq \pi \int_0^1 x^{n+1} |\sin \pi x| dx \leqq \pi \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{\pi}{n+2}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} |c_n + 1| = 0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \boldsymbol{-1} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) より

$$\frac{c_{n+1} - c}{c_n - c} = \frac{c_{n+1} + 1}{c_n + 1} = \frac{(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+4)} \cdot \frac{c_{n+3}}{c_{n+2}} = \frac{n+2}{n+4} \cdot \frac{c_{n+3}}{c_{n+2}}$$

よって, (2) より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - c}{c_n - c} = 1 \cdot \frac{-1}{-1} = \boldsymbol{1} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 正の整数 N に対し，$g(x) = x + \dfrac{N}{x}$ (x は正の実数) とおくと

$$g'(x) = 1 - \frac{N}{x^2} = \frac{(x+\sqrt{N})(x-\sqrt{N})}{x^2}$$

より，$g(x)$ の増減は次の表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{N}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

これより $f(n) = g(n)$ は

$n \leqq \sqrt{N}$をみたす n について減少

$n \geqq \sqrt{N}$をみたす n について増加

であり k が正の整数のとき，$N = 2^k$ の正の約数は

$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,2^k$

であるから

(i) k が偶数のとき　$\sqrt{N} = 2^{\frac{k}{2}}$ は N の約数で

$$f(2^{\frac{k}{2}}) = 2^{\frac{k+2}{2}}$$

だから求める最小値は $2^{\frac{k+2}{2}}$ である．

(ii) k が奇数のとき　$\sqrt{N} = 2^{\frac{k}{2}}$ 以下の最大の約数は $2^{\frac{k-1}{2}}$，$\sqrt{N}$ 以上の最小の約数は $2^{\frac{k+1}{2}}$ で

$$f(2^{\frac{k-1}{2}}) = f(2^{\frac{k+1}{2}}) = 3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$$

だから，求める最小値は $3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}$ である．

(i)，(ii) より求める最小値は

k が偶数のとき $\boldsymbol{2^{\frac{k+2}{2}}}$，$k$ が奇数のとき $\boldsymbol{3 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}}}$　　(答)

(2) $N = 7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5040$ より

$$\sqrt{N} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = 12\sqrt{35}$$

ここで

$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7,\quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$

はともに $N = 7!$ の約数であり，$70^2 = 4900 < 5040 < 72^2 = 5184$ より

$70 < \sqrt{N} < 72$

そして，71 は $N = 7!$ の約数ではなく，$f(70) = f(72) = 142$ だから，求める最小値は

142　　(答)

【9】(1) $x_1 = f(x_0) = \sqrt{2}$ である。

まず，$0 < x_n < 2$ を数学的帰納法を用いて示す。

(I) $n = 1$ のとき，$0 < \sqrt{2} < 2$ より成り立つ。

(II) $n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$0 < x_k < 2$$

$$\therefore \quad \sqrt{2} < \sqrt{x_k + 2} < 2 \text{ すなわち } \sqrt{2} < x_{k+1} < 2$$

よって，$n = k + 1$ でも成り立つ。

(I)，(II) より，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ で $0 < x_n < 2$ が成り立つ。

次に，$x_n < x_{n+1}$ を示す。$n \geqq 1$ において

$$x_{n+1}{}^2 - x_n{}^2 = x_n + 2 - x_n{}^2 = (2 - x_n)(x_n + 1) > 0 \quad (\because 0 < x_n < 2)$$

$$\therefore \quad x_n{}^2 < x_{n+1}{}^2$$

$x_n > 0$，$x_{n+1} > 0$ より，$x_n < x_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つ。

さらに，$x_n > 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ を示す。$n \geqq 0$ において

$$2 - x_{n+1} = 2 - \sqrt{x_n + 2} = \frac{4 - (x_n + 2)}{2 + \sqrt{x_n + 2}} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}} < \frac{1}{2}(2 - x_n)$$

これを繰り返し用いると，$n \geqq 1$ において

$$2 - x_n < \frac{1}{2}(2 - x_{n-1}) < \left(\frac{1}{2}\right)^2 (2 - x_{n-2}) < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - x_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$x_n > 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つ。

以上より，題意は示された。　　　[証明終]

(2) $0 < x_n < 2$ より

$$2 - x_{n+1} = \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}} > \frac{2 - x_n}{2 + \sqrt{2 + 2}} = \frac{1}{4}(2 - x_n)$$

これを繰り返し用いると，$n \geqq 1$ において

$$2 - x_n > \frac{1}{4}(2 - x_{n-1}) > \left(\frac{1}{4}\right)^2 (2 - x_{n-2}) > \cdots$$

$$> \left(\frac{1}{4}\right)^n (2 - x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n > \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$x_n < 2 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つ。　　　[証明終]

(3) $2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < 2$ とハサミウチの原理より

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 2$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2 + \sqrt{x_n + 2}} = \frac{1}{4}$$

$\alpha \leqq \dfrac{1}{4}$ であることを背理法で示す。

$\alpha > \dfrac{1}{4}$ であると仮定すると，$\{x_n\}$ が単調増加であることから

$$\frac{1}{2 + \sqrt{x_1 + 2}} > \frac{1}{2 + \sqrt{x_2 + 2}} > \cdots$$

$$> \frac{1}{2 + \sqrt{x_{N-1} + 2}} > \alpha > \frac{1}{2 + \sqrt{x_N + 2}} > \cdots$$

をみたす自然数 N が存在する。

$\dfrac{1}{2+\sqrt{x_N+2}}=\beta(<\alpha)$ とおくと，$n>N$ のとき $\dfrac{1}{2+\sqrt{x_n+2}}<\beta$ となるので

$$2-x_{n+1}=\frac{1}{2+\sqrt{x_n+2}}(2-x_n)<\beta(2-x_n)$$

これを繰り返し用いると，十分大きい n に対して

$$2-x_n<\beta(2-x_{n-1})<\beta^2(2-x_{n-2})<\cdots<\beta^{n-N-1}(2-x_{N+1})$$

これと $2-x_n>\alpha^n$ を合わせて

$$\alpha^n<\beta^{n-N-1}(2-x_{N+1}) \qquad \therefore \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n<\frac{2-x_{N+1}}{\beta^{N+1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

右辺は定数であり，$\alpha>\beta$ より $\dfrac{\alpha}{\beta}>1$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=\infty$ となるから，十分大きな自然数 n に対してこの不等式 $(*)$ が成り立たない。

よって矛盾するため，$\alpha\leqq\dfrac{1}{4}$ である。

(2) より $\alpha=\dfrac{1}{4}$ は題意をみたすので，求める最大の α は

$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$ (答)

問題

【1】(1) $k \geqq 2$ のとき

$$a_{k^2} = \left[\ \sqrt{k^2}\ \right] = [\ k\ ] = k$$

$$a_{k^2-1} = \left[\ \sqrt{k^2-1}\ \right] = \left[\ \sqrt{(k-1)^2}\ \right] = [\ k-1\ ] = k-1$$

より

$$a_{k^2-1} < k \leqq a_{k^2} \quad \cdots\cdots(\star)$$

である．

ここで，$n \geqq 1$ において，$a_n \leqq a_{n+1}$ が成り立つので

$$a_n < k \leqq a_{n+1}$$

をみたす n はただ 1 通りに定まる．

$(\star)$ より

$$b_k = k^2 - 1 \quad (k \geqq 2)$$

これは，$k=1$ のときも $b_1 = 0$ をみたすので

$$b_k = \boldsymbol{k^2 - 1} \qquad \text{(答)}$$

(2) すべての自然数 n に対して

$$\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^{n} b_k = n^3 \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法により証明する．

(i) $n=1$ のとき

$$a_1 + b_1 = 1 + 0 = 1 = 1^3$$

より成立する．

(ii) $n=l$ のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{(l+1)^2} a_m + \sum_{k=1}^{l+1} b_k \\
&= \left(\sum_{m=1}^{l^2} a_m + \sum_{m=l^2+1}^{(l+1)^2-1} a_m + a_{(l+1)^2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{l} b_k + b_{l+1}\right) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{l^2} a_m + \sum_{k=1}^{l} b_k\right) + \sum_{m=l^2+1}^{(l+1)^2-1} a_m + (l+1) + \{(l+1)^2 - 1\} \\
&= l^3 + \{(l+1)^2 - 1 - l^2\} \cdot l + (l+1) + (l^2 + 2l) \\
&= l^3 + 3l^2 + 3l + 1 \\
&= (l+1)^3
\end{aligned}$$

より，$n = l+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．　　〔証明終〕

(3) (2) より

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n^2}[\,\sqrt{m}\,] &= \sum_{m=1}^{n^2} a_m \\ &= n^3 - \sum_{k=1}^{n} b_k \\ &= n^3 - \sum_{k=1}^{n}(k^2-1) \\ &= n^3 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{711} < 11 - \frac{7}{2}\pi < \frac{\pi}{709} \quad \cdots\cdots ① \\ \iff\ & \frac{\pi}{711} + \frac{7}{2}\pi < 11 < \frac{\pi}{709} + \frac{7}{2}\pi \\ \iff\ & \frac{15598}{4965} < \pi < \frac{15642}{4979} \\ \iff\ & 3.141591\cdots\cdots < \pi < 3.141594\cdots\cdots \end{aligned}$$

を示せばよく，$\pi = 3.141592\cdots\cdots$ であるから，これは成り立つ．よって，証明された．

〔証明終〕

(2) $11 - \dfrac{7}{2}\pi = \alpha$ とおくと，①より

$$\frac{\pi}{711} < \alpha < \frac{\pi}{709} \quad \cdots\cdots ①'$$

であり

$$a_n = \tan(11n) = \tan\left(\frac{7}{2}n\pi + n\alpha\right)$$

これより

$$a_1 = \tan\left(\frac{7}{2}\pi + \alpha\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

となり，さらに ①$'$ より，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ なので，$-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{2} + \alpha < 0$ となるから

$$a_1 < 0$$

が成り立つ．

また

$$a_2 = \tan(7\pi + 2\alpha) = \tan 2\alpha$$

であり，①$'$ より，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ なので $0 < 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ となるから

$$a_2 > 0$$

したがって，題意が示された．　〔証明終〕

(3) $n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 709$ のとき，$n=2m-1$ とおくと

$$a_n = \tan\left\{\frac{7}{2}(2m-1)\pi+(2m-1)\alpha\right\}$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{2}+n\alpha\right) \quad \cdots\cdots②$$

①$'$ より $0<n\alpha \leqq 709\alpha < \pi$ なので

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}+n\alpha < \frac{\pi}{2}$$

ここで，$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ では $\tan x$ は増加関数なので，n の増加とともに a_n は増加する． 〔証明終〕

(4) a_{709} と a_{711} の大小を考える．

①$'$ より

$$0<\frac{709}{711}\pi-\frac{\pi}{2}<709\alpha-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$$

となるので

$$a_{709}=\tan\left(709\alpha-\frac{\pi}{2}\right)>0$$

一方，①$'$ より

$$\frac{\pi}{2}<711\alpha-\frac{\pi}{2}<\frac{711}{709}\pi-\frac{\pi}{2}<\pi$$

となるから

$$a_{711}=\tan\left(711\alpha-\frac{\pi}{2}\right)<0$$

以上により

$$a_{711}<a_{709}$$

となるので，無限数列 $a_1,\ a_3,\ a_5,\ \cdots\cdots$ は増加数列ではない． 〔証明終〕

【3】

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ とおくと，考えるべき不等式は，

$$n-\sum_{k=2}^{n} f(k) \geqq \frac{i}{10}$$

と表せる．ここで，

$$D_n = n-\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

とおけば，$f(k)$ はつねに正であるから，$\{D_n\}$ は単調減少なので，D_n が収束し，

$$\lim_{n\to\infty} D_n \geqq \frac{i}{10} \qquad \cdots\cdots(*)$$

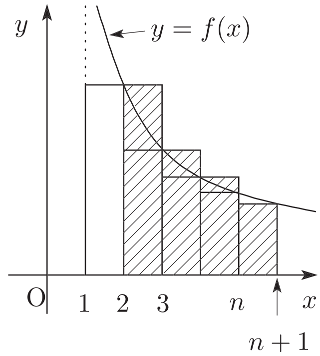
を満たす最大の整数 i を求めればよいことになる．

ところで，区間 $x>1$ において，関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

は単調減少するので，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$ は定積分を利用して次のように評価できる．

(i) $n \geqq 3$ のとき,



$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} f(k) &= f(2) + \sum_{k=3}^{n} f(k) \\ &> f(2) + \int_{3}^{n+1} f(x)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \int_{3}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{3}^{n+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{2} + \sqrt{n^2+2n}\end{aligned}$$

(ii) $n \geqq 4$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} f(k) &= f(2) + f(3) + \sum_{k=4}^{n} f(k) \\ &< f(2) + f(3) + \int_{3}^{n} f(x)dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \int_{3}^{n} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{8}} + \left[\sqrt{x^2-1}\right]_{3}^{n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{8}} + \sqrt{n^2-1}\end{aligned}$$

よって, $n \geqq 4$ のとき,

$$n - \sqrt{n^2-1} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{8}}$$
$$\leqq D_n \leqq n - \sqrt{n^2+2n} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

である. 左辺を L_n, 右辺を R_n とおくと,

$$n - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$$
$$n - \sqrt{n^2+2n} = \frac{-2n}{n+\sqrt{n^2+2n}} = -\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

であることから, 数列 $\{L_n\}$, $\{R_n\}$ はともに減少数列であり, $\sqrt{3} < 1.734$, $\sqrt{2} > 1.414$ より

$$\lim_{n\to\infty} L_n = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{8}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{4} > 0.6115 > 0.61 \qquad \cdots\cdots ②$$

$\sqrt{3} > 1.731$, $\sqrt{2} < 1.415$ より

$$\lim_{n\to\infty} R_n = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{2} = -1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{2} < 0.676 < 0.68 \qquad \cdots\cdots ③$$

となる.

したがって，数列 $\{D_n\}$ は単調減少であり，

$D_n \geqq \lim_{n\to\infty} L_n > 0.61$

より下に有界であるから，収束する．

さらに，②，③より，

$0.61 < \lim_{n\to\infty} D_n < 0.68$

となるから，$(*)$ を満たす最大の整数 i は **6** である．　　(答)

＜別解＞

上記解答においては，「数列 $\{a_n\}$ が単調減少で下に有界であれば，収束する」という高校範囲外の定理を用いて解答してある．これを使わなければ，以下のような解答になる．

①は $n \geqq 3$ について成り立つ．

十分大きな n について，R_n は $\lim_{n\to\infty} R_n$ の近くにあるはずであるから，③より，

$R_n < 0.7$

を満たしている．このとき，D_n は当然

$D_n < 0.7$

となるので，$D_n \geqq \dfrac{i}{10}$ が任意の $n \geqq 3$ について成り立つためには，

$i \leqq 6$

が必要である．

一方，$i = 6$ のとき，①より，任意の $n \geqq 3$ に対して，

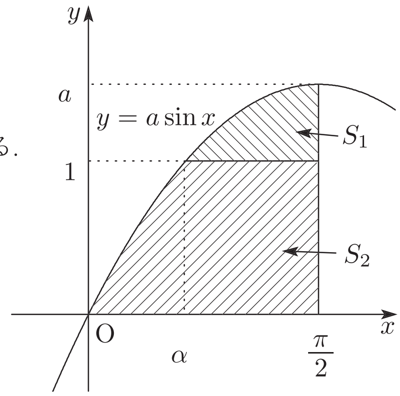
$D_n \geqq L_n \geqq \lim_{n\to\infty} L_n > 0.61$

であるから，任意の $n \geqq 3$ に対して，$D_n \geqq \dfrac{i}{10}$ が成り立つ．

$n = 2$ のときも題意が成り立つことを確認するのは容易である．

したがって，求める i の値は 6 である．

【4】



$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の方程式

$a\sin x = 1$

の解を α とおけば，題意の領域は右図のようになる．

したがって，

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= (S_2 + S_1) - 2S_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin x dx - 2\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} (a\sin x - 1)dx \\ &= \Big[-a\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\Big[-a\cos x - x\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a - 2\left(-\frac{\pi}{2} + a\cos\alpha + \alpha\right) \\ &= a(1 - 2\cos\alpha) - 2\alpha + \pi \quad \cdots\cdots(*) \end{aligned}$$

ここで，$a\sin\alpha = 1$，$\sin\alpha \fallingdotseq 0$ より，

$$a = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \cdots\cdots①$$

だから，これを上式に代入して

$$S_2 - S_1 = \frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\alpha + \pi \quad \cdots\cdots②$$

② の右辺を $f(\alpha)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{2\sin\alpha \cdot \sin\alpha - (1 - 2\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - 2 \\ &= \frac{\cos\alpha(2\cos\alpha - 1)}{\sin^2\alpha} \end{aligned}$$

α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots③$ をみたし，この範囲で方程式 $f'(\alpha) = 0$ を解くと

$$\cos\alpha = 0,\ \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$$

よって，③ の範囲における $f(\alpha)$ の増減は下表のようになる．

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0
$f(\alpha)$		↗	極大	↘	

$f(\alpha)$ は $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ のとき極大かつ最大となる．このとき，①,② より

$$a\sin\frac{\pi}{3} = 1 \qquad \therefore \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}$$

以上より，求める最大値とそのときの a の値は

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$，　$a = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$　(答)

【5】

$\{f(x)\}^2 = x^{2n} + 2px^{n+1} + 2qx^n + p^2x^2 + 2pqx + q^2$

より，n が奇数のときと偶数のときに分けて調べる．

(i) n が奇数のとき

$$I = \int_0^1 (x^{2n} + 2px^{n+1} + p^2x^2 + q^2)dx$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{2p}{n+2} + \frac{p^2}{3} + q^2$$
$$= \frac{1}{3}\left(p + \frac{3}{n+2}\right)^2 + q^2 + \frac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2}$$
$$\geqq \frac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2}$$

ここで等号は $(p,\ q) = \left(-\dfrac{3}{n+2},\ 0\right)$ のときに限って成り立つから，n が奇数のとき I を最小にするような $(p,\ q) = \boldsymbol{\left(-\dfrac{3}{n+2},\ 0\right)}$ がただ 1 組存在し，I の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2}}$ である．　　(答)

(ii) n が偶数のとき

$$I = \int_0^1 (x^{2n} + 2qx^n + p^2x^2 + q^2)dx = \frac{1}{2n+1} + \frac{2q}{n+1} + \frac{p^2}{3} + q^2$$
$$= \frac{1}{3}p^2 + \left(q + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}$$
$$\geqq \frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}$$

ここで等号は $(p,\ q) = \left(0,\ -\dfrac{1}{n+1}\right)$ のときに限って成り立つから，n が偶数のとき I を最小にするような $(p,\ q) = \boldsymbol{\left(0,\ -\dfrac{1}{n+1}\right)}$ がただ 1 組存在し，I の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}}$ である．　　(答)

【6】(1)

$$I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1}dx = \int_1^e (x)'(\log x)^{n+1}dx$$
$$= \Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e - (n+1)\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}(\log x)^n dx$$
$$= \boldsymbol{e - (n+1)I_n} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，

$I_{n+1} = e - (n+1)I_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots$①

$1 \leqq x \leqq e$ のとき $0 \leqq \log x \leqq 1$ だから，

$0 \leqq (\log x)^{n+1} \leqq (\log x)^n \quad \cdots$②

②式を $1 \leqq x \leqq e$ の範囲で積分すると,

$$I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx \leqq \int_1^e (\log x)^n dx = I_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \quad \cdots ③$$

③より, $\quad I_{n+1} \leqq I_n \leqq I_{n-1} \leqq \cdots \leqq I_1 \quad \cdots ④$

また

$$I_1 = \int_1^e \log x dx \ = \ [x \log x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= e - [\,x\,]_1^e \ = \ 1$$

だから④より, $\quad I_{n+1} \leqq 1 \quad \cdots ⑤$

①, ⑤より, $\quad e - 1 \leqq (n+1) I_n \quad \cdots ⑥$

①より,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= e - (n+2) I_{n+1} \\ &= e - (n+2)\{e - (n+1) I_n\} \\ &= (n+1)(n+2) I_n - (n+1) e \end{aligned}$$

④より, $I_{n+2} \leqq I_1 = 1$ だから,

$$(n+1)(n+2) I_n \leqq (n+1) e + 1 \quad \cdots ⑦$$

⑥, ⑦より,

$$\frac{e-1}{n+1} \leqq I_n \leqq \frac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)}$$ 〔証明終〕

【7】(1) $t = e^x,\ h(t) = \dfrac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1}$ $(t > 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) = h'(t) e^x &= 12 \cdot \frac{(3t^2 - 3)(t^2 - 1) - (t^3 - 3t) \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} \cdot e^x \\ &= \frac{12(t^4 + 3) e^x}{(t^2 - 1)^2} > 0 \end{aligned}$$

であるから, $f(x)$ は増加関数である.

また

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{12\left(t - \dfrac{3}{t}\right)}{1 - \dfrac{1}{t^2}}$$

$$= \infty$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{t \to 1+0} h(t) = \lim_{t \to 1+0} \frac{12(t^3 - 3t)}{t^2 - 1}$$

$$= -\infty$$

であるから, $f(x)$ は任意の実数値をとる.

よって, 任意の実数 a に対して, $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在する.

〔証明終〕

(2) まず，$f(\alpha)=8$，$f(\beta)=27$ をみたす α, β の値を求める．

$h(t)=8\ (t>1)$ とおくと

$$\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}=8$$

より

$$3t^3-2t^2-9t+2=0 \qquad \therefore\quad (t-2)(3t^2+4t-1)=0$$

$$\therefore\quad t=2$$

となるから

$$e^{\alpha}=2 \qquad \therefore\quad \alpha=\log 2$$

$h(t)=27\ (t>1)$ とおくと

$$\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}=27$$

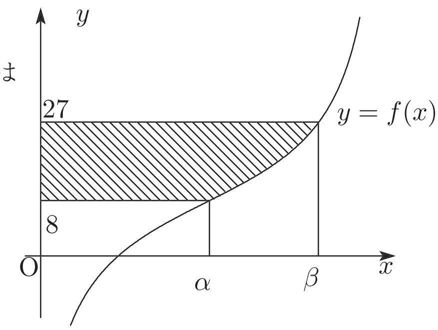
より

$$4t^3-9t^2-12t+9=0 \qquad \therefore\quad (t-3)(4t^2+3t-3)=0$$

$$\therefore\quad t=3$$

となるから

$$e^{\beta}=3 \qquad \therefore\quad \beta=\log 3$$



すると，$\displaystyle\int_8^{27} g(x)dx$ すなわち $\displaystyle\int_8^{27} g(y)dy$ は右図の斜線部分を表すから，この面積を S とおくと

$$S=27\beta-8\alpha-\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

ここで，$t=e^x$ とすると

$$\frac{dt}{dx}=e^x \qquad \therefore\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}$$

$x:\alpha\to\beta$ のとき $t:2\to 3$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx &= \int_2^3 h(t)\cdot\frac{1}{t}dt = 12\int_2^3 \frac{t^2-3}{t^2-1}dt \\ &= 12\int_2^3\left(1-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= 12\Big[t-\log|t-1|+\log|t+1|\Big]_2^3 \\ &= 12(1+\log 2-\log 3)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_8^{27} g(x)dx &= S \\ &= 27\log 3-8\log 2-12(1+\log 2-\log 3) \\ &= \mathbf{39\log 3-20\log 2-12} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

問題

【1】1 回目に出た目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 のとき，17 をこれらで割った余りはそれぞれ 0, 1, 2, 1, 2, 5 であるから，X_1 は 0, 1, 2, 5 のみである．さらに，これらの数を 1, 2, 3, 4, 5, 6 で割った余りは 0, 1, 2, 5 の値しか取らない．よって，$X_n = 0,\ 1,\ 2,\ 5$ である．

ここで，$X_n = 0,\ 1,\ 2,\ 5$ である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とすれば，上の議論から

$$a_1 = \frac{1}{6},\quad b_1 = \frac{1}{3},\quad c_1 = \frac{1}{3},\quad d_1 = \frac{1}{6}$$

となる．また，X_n と X_{n+1} との関係を見てみると

(i) $X_n = 0$ のとき

$$X_{n+1} = 0$$

(ii) $X_n = 1$ のとき，$n+1$ 回目に

$$\begin{cases} 1\ \text{が出れば} & X_{n+1} = 0 \\ 1\ \text{以外が出れば} & X_{n+1} = 1 \end{cases}$$

(iii) $X_n = 2$ のとき，$n+1$ 回目に

$$\begin{cases} 1,\ 2\ \text{が出れば} & X_{n+1} = 0 \\ 1,\ 2\ \text{以外が出れば} & X_{n+1} = 2 \end{cases}$$

(iv) $X_n = 5$ のとき，$n+1$ 回目に

$$\begin{cases} 1,\ 5\ \text{が出れば} & X_{n+1} = 0 \\ 2,\ 4\ \text{が出れば} & X_{n+1} = 1 \\ 3\ \text{が出れば} & X_{n+1} = 2 \\ 6\ \text{が出れば} & X_{n+1} = 5 \end{cases}$$

となるから

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{1}{3}c_n + \dfrac{1}{3}d_n \\ b_{n+1} = \dfrac{5}{6}b_n + \dfrac{1}{3}d_n \qquad \cdots\cdots ① \\ c_{n+1} = \dfrac{2}{3}c_n + \dfrac{1}{6}d_n \\ d_{n+1} = \dfrac{1}{6}d_n \qquad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

という漸化式が得られる．

(1) a_1，b_1，c_1，d_1 の値とこれらの漸化式より

$$a_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

$$b_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$c_2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$d_2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

となる．よって，求める確率 a_3 は

$$a_3 = \frac{7}{18} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{36} = \frac{58}{108} = \mathbf{\frac{29}{54}} \qquad \text{(答)}$$

(2) d_n を求めればよいが，$d_1=\dfrac{1}{6}$ と②より

$$d_n=\boldsymbol{\left(\frac{1}{6}\right)^n}\qquad\text{(答)}$$

(3) b_n を求める．

(2) の結果を①に代入して

$$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3\cdot 6^n}$$

$$\iff\quad 6^{n+1}b_{n+1}=5\cdot 6^n b_n+2$$

ここで，$p_n=6^n b_n$ とおけば

$$p_{n+1}=5p_n+2\quad\iff\quad p_{n+1}+\frac{1}{2}=5\left(p_n+\frac{1}{2}\right)$$

となるから，数列 $\left\{p_n+\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 5，初項

$$p_1+\frac{1}{2}=6^1 b_1+\frac{1}{2}=6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

の等比数列となる．よって

$$p_n+\frac{1}{2}=5^{n-1}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5^n}{2}\quad\iff\quad p_n=\frac{5^n-1}{2}$$

したがって

$$b_n=\boldsymbol{\frac{5^n-1}{2\cdot 6^n}}\qquad\text{(答)}$$

【2】以下の解答では，2 項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を $\dbinom{n}{r}$ で表す．

(1) $X\leqq N+1$ は $N+1$ 以下の試合数で優勝者が決定する場合である．優勝が決定するためには少なくとも N 試合が必要であるから，

$X\leqq N+1\iff X=N$ または $X=N+1$

である．従って，次の場合を考える：

- 一方のプレイヤーが N 連勝して，N 試合で優勝が決定する場合，この確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^N$
- N 試合目までに，一方のプレイヤーが $N-1$ 勝 1 敗し，$N+1$ 試合目にそのプレイヤーが勝って優勝が決定する場合．この確率は，独立事象を反復して行う確率として

$$\binom{N}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=N\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

2 人のプレイヤーのいずれが優勝するかは対等だから

$$P(X\leqq N+1)=2\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^N+N\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\right\}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^N(2+N)}\qquad\text{(答)}$$

(2) $X=N+j$(ただし $j=0,1,2,\cdots,N-1$) となるのは，一方のプレイヤーが N 勝 j 敗して優勝が決まる場合であり，それは，

- $N+j-1$ 試合目までにそのプレイヤーが $N-1$ 勝 j 敗して，
- 次の $N+j$ 試合目に勝って優勝が決まる

場合である．

従ってその確率は，(1) と同様にして

$$\binom{N+j-1}{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\binom{N+j-1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j}$$
$$=\frac{(N+j-1)!}{(N-1)!\,j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j}$$

2 人のプレイヤーのいずれが優勝するかは対等だから，求める確率は

$$P(X=N+j)=2\cdot\frac{(N+j-1)!}{(N-1)!\,j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j}$$
$$=\boldsymbol{\frac{(N+j-1)!}{(N-1)!\,j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j-1}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $X=N,\,N+1,\,N+2,\cdots,2N-1$ のいずれかで必ず優勝が決定するから，全確率の法則より，これらの確率の総和は 1 である：

$$\sum_{j=0}^{N-1}P(X=N+j)=1 \qquad \cdots(\#)$$

(2) より，

$$P(X=N+j)=2\binom{N+j-1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j}=\binom{N+j-1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j-1}$$

であるから，(#) に代入して

$$1=\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N+j-1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+j-1} \qquad \cdots(\P)$$

$N-1=n$ とすると，

$$(\P)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+j}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}a_n$$

従って

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}a_n=1\iff a_n=\boldsymbol{2^n} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) n 回目の試行でちょうど勝負がつくためには $n-2$ 回目で同点で $n-1$ 回目，n 回目と続けてどちらかが得点するときのみである．得点が同点となるためには試行が偶数回でなければならないので，n は偶数である．　〔証明終〕

(2) 赤玉，白玉が出る確率をそれぞれ

$$p=\frac{a}{a+b},\quad q=\frac{b}{a+b}$$

とおき，ちょうど $2m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ 回で A が勝つ場合を考える．

$m \geqq 2$ において $2m-2$ 回まで勝負がつかないような玉の出方は $2k-3$ 回目，$2k-2$ 回目 $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ の組において赤白または白赤という玉の出方が続けばよいので，全部で 2^{m-1} 通りの玉の出方があり，ちょうど $2m$ 回目で A が勝つ確率は

$$2^{m-1}(pq)^{m-1}p^2=(2pq)^{m-1}p^2 \quad (m=2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，$m=1$ のとき A が勝つ確率は p^2 であるから，このときも上式を満たす．

よって，A が勝つ確率は

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2pq)^{m-1}p^2$$

ここで，

$$0<2pq=\frac{2ab}{(a+b)^2}<\frac{a^2+b^2+2ab}{(a+b)^2}=1$$

であるから，

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2pq)^{m-1}p^2=\frac{p^2}{1-2pq}=\boldsymbol{\frac{a^2}{a^2+b^2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) と同様に考えて，B の勝つ確率は

$$\sum_{m=1}^{\infty}(2pq)^{m-1}q^2=\frac{q^2}{1-2pq}=\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

よって，A が勝者となる確率と B が勝者となる確率の和が 1 であるから，この勝負はいつか決着がつくといえる．　〔証明終〕

【4】(1) 与式より

$$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$$

また，点 $\left(\frac{\pi}{2}-1,\ 1\right)$ に対応する θ の値は，連立方程式

$$\theta-\sin\theta=\frac{\pi}{2}-1\cdots\cdots①,\ 1-\cos\theta=1\cdots\cdots②$$

の解である．

②から

$$\cos\theta=0 \qquad \therefore\quad \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}$$

①をみたすのは $\theta=\frac{\pi}{2}$ で，このとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=1$$

よって，接線 l の方程式は

$$y-1=x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

すなわち

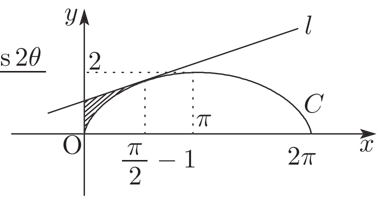
$$\boldsymbol{y=x-\frac{\pi}{2}+2} \qquad \text{(答)}$$

(2) 接線 l と y 軸および C で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \left(x - \frac{\pi}{2} + 2\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

ただし,

$$y\frac{dx}{d\theta} = (1-\cos\theta)^2 = 1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$



よって求める面積は

$$S = \left[\frac{x^2}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}-1} - \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{3\pi}{4} - 2\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{8}} \qquad \text{(答)}$$

【5】 $x = x(t),\ y = y(t)$ とおくと，$x(t) = -t + 4 - \dfrac{4}{t+1}$，$y(t) = -t^2 + 4t - 4 + \dfrac{4}{t+1}$ と変形できるので

$$x'(t) = -1 + \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(1-t)(3+t)}{(t+1)^2}$$

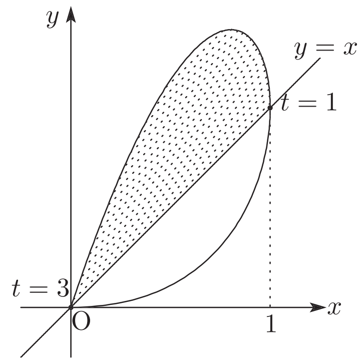
$$y'(t) = -2t + 4 - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{-2t(t^2-3)}{(t+1)^2}$$

t	0		1		$\sqrt{3}$		3
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$6\sqrt{3}-9$	$\searrow$	0

x は $t=1$ で極大かつ最大，y は $t=\sqrt{3}$ で極大かつ最大．

x，y の動く範囲は，

$\mathbf{0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq 6\sqrt{3}-9}$ （答）



次に，$y=tx$ が常に成り立つので，

$y-x=(t-1)x$

である．$x \geqq 0$ なので，$0 \leqq t \leqq 1$ で $y \leqq x$，$1 \leqq t \leqq 3$ で $y \geqq x$ である．よって

$$S=\int_0^1 (y-x)\,dx$$
$$=\int_3^1 \left(-t^2+5t-8+\frac{8}{t+1}\right)\left\{-1+\frac{4}{(t+1)^2}\right\}dt$$
$$=\int_3^1 \left\{t^2-5t+4+\frac{20}{t+1}-\frac{56}{(t+1)^2}+\frac{32}{(t+1)^3}\right\}dt$$
$$=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{5}{2}t^2+4t+20\log|t+1|+\frac{56}{t+1}-\frac{16}{(t+1)^2}\right]_3^1$$
$$=\mathbf{\frac{43}{3}-20\log 2} \quad \text{（答）}$$

【6】(1) $f(1)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ である．ここで，$t=\tan\theta$ とおくと

$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

t	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

なので

$$f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

また，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ だから，$x=1$ における接線の傾きは

$f'(1)=\dfrac{1}{2}$

よって，法線の傾きは -2 となるから，求める法線の方程式は

$y-\dfrac{\pi}{4}=-2(x-1)$ $\quad\therefore\quad \boldsymbol{y=-2x+2+\frac{\pi}{4}}$ （答）

(2) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ において, (1) と同じく $t=\tan\theta$ とおき

$$\tan\alpha = x,\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

となる実数 α をとれば

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

t	$0 \to x$
θ	$0 \to \alpha$

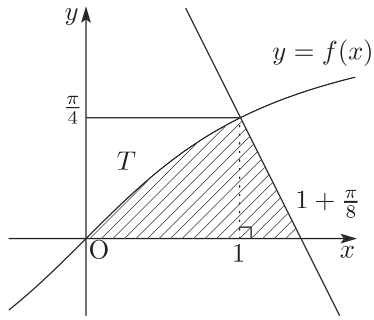
なので

$$f(x)=\int_0^\alpha d\theta=\alpha \qquad \therefore\quad \tan f(x)=\tan\alpha=x$$

よって

$$x=\tan y$$

であり, $y=f(x)$ のグラフは曲線 $y=\tan x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称移動したものだから, 題意の図形は図の斜線部分のようになる. よって,$y=f(x)$ と $y=\dfrac{\pi}{4}$ と y 軸に囲まれた部分の面積を T とすると



$$\begin{aligned}
T &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan y\,dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y}{\cos y}\,dy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{-\frac{(\cos y)'}{\cos y}\right\} dy \\
&= \Big[-\log(\cos y)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \log 1-\log\frac{1}{\sqrt{2}} \ = \ \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

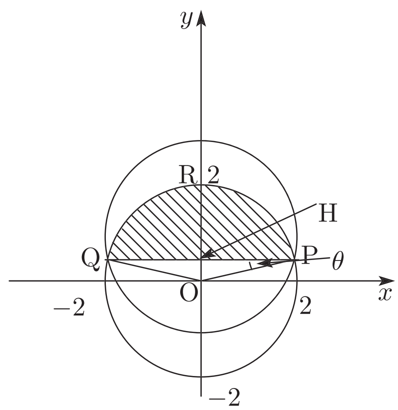
また, 法線と x 軸との交点の x 座標が

$$0=-2x+2+\frac{\pi}{4} \iff x=1+\frac{\pi}{8}$$

であることから, 求める面積を S とおけば

$$\begin{aligned}
S &= \left(1\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{8}-1\right)\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{2}\log 2} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【7】 $A:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$B:\dfrac{x^2}{4}+(y-2a)^2=1\left(\text{ただし，}a=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ とする．



短軸方向に 2 倍に拡大すれば

$x^2+y^2=4$

$x^2+(y-4a)^2=4$

となる．したがって，右図において

$$\mathrm{PH}=\sqrt{4-4a^2}$$
$$=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{12}}{4}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{OPH}=\theta$ とすれば

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{12}\qquad\qquad \therefore\quad \angle\mathrm{POQ}=\frac{5}{6}\pi$$

したがって，弓形 PQR の面積を S とすれば

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{5}{6}\pi-2a\cdot\mathrm{PH}=\frac{5}{3}\pi-1$$

であり，短軸方向の 2 倍の拡大によって面積も 2 倍になっているから，

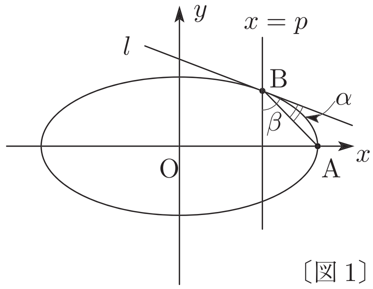
$$M=2\cdot\frac{S}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{3}\pi-1}\qquad\text{(答)}$$

問題

【1】(1) l と AB のなす角を α とする．また l と $x=p$ のなす角を β とする．

$p \geqq 0$ のとき，図1のように $\beta > \alpha$ となり，不適．

よって，$p<0$ である．

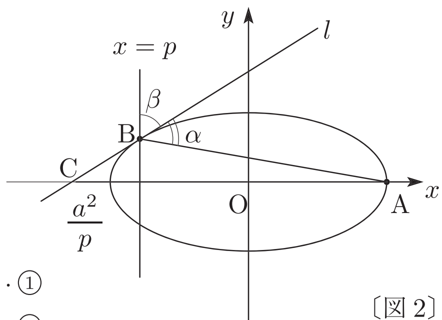


〔図1〕

B$(p,\ q)$ における接線 l は

$$\frac{p}{a^2}x + qy = 1$$

となるので，l と x 軸の交点 C は $\left(\dfrac{a^2}{p},\ 0\right)$ となる．



〔図2〕

　この条件は $\alpha=\beta=\theta$ なので，図3より，

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{p-\frac{a^2}{p}}{q} = \dfrac{p^2-a^2}{pq} & \cdots\cdots ① \\ \tan(\pi-2\theta) = \dfrac{a-p}{q} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

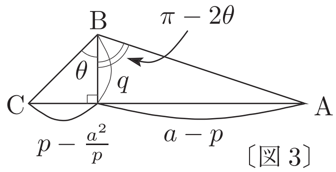
②より，

$$-\tan 2\theta = \frac{a-p}{q}$$

$$\iff \quad \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{p-a}{q}$$

$$\iff \quad 2q\tan\theta = (p-a)(1-\tan^2\theta)$$

①を代入して，



〔図3〕

$$2q\cdot\frac{p^2-a^2}{pq} = (p-a)\left\{1-\left(\frac{p^2-a^2}{pq}\right)^2\right\}$$

$$\iff \quad 2\cdot\frac{p+a}{p} = 1-\frac{(p^2-a^2)^2}{p^2q^2}$$

$$(\because \quad p \neq a)$$

$$\iff \quad 2p(p+a) = p^2 - \frac{(p^2-a^2)^2}{q^2} \quad \cdots\cdots ③$$

ここで，B$(p,\ q)$ は楕円上の点で，

$$\frac{p^2}{a^2}+q^2=1 \qquad \therefore \quad q^2 = \frac{a^2-p^2}{a^2}$$

を満たすので，③に代入して，

$$2p(p+a) = p^2-(p^2-a^2)^2\cdot\frac{a^2}{a^2-p^2}$$

$$\iff \quad 2p(p+a) = p^2+(p^2-a^2)a^2$$

$$\iff \quad (a^2-1)p^2-2ap-a^4=0$$

$$\therefore \quad p=\frac{a\pm\sqrt{a^6-a^4+a^2}}{a^2-1} \qquad (\because \quad a>1)$$

$p<0$ により，

$$p=\boldsymbol{\frac{a(1-\sqrt{a^4-a^2+1})}{a^2-1}} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$p=\frac{a\{1-(a^4-a^2+1)\}}{(a^2-1)(1+\sqrt{a^4-a^2+1})}$$
$$=\frac{-a^3(a^2-1)}{(a^2-1)(1+\sqrt{a^4-a^2+1})}$$
$$=\frac{-a^3}{1+\sqrt{a^4-a^2+1}}$$

よって，

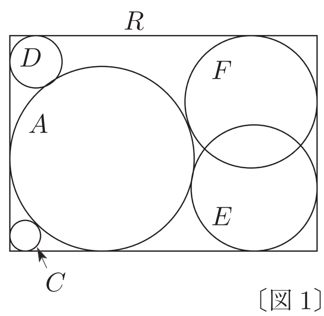
$$\lim_{a\to1}p=\frac{-1}{1+1}=-\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

また，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{-a^2}{1+\sqrt{a^4-a^2+1}}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{a^2}+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}}}=\boldsymbol{-1} \qquad \text{(答)}$$

【2】 (1) 性質 (P) をもつ円で，円 A に外接するものが 4 つ存在するならば，図 1 のようになって，その大小は，小さい順に C，D，E，F となる．

……①



〔図 1〕

A が性質 (P) をもつことにより

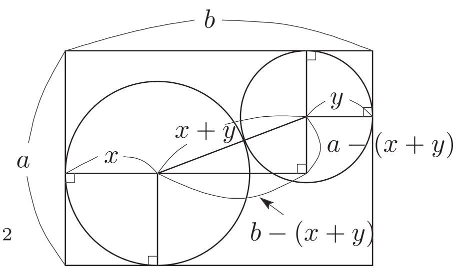
$$x<\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots②$$

が必要であり，このとき①より，F が性質 (P) をみたすこと，つまり F の半径を y としたとき

$$y<\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つことで十分である．

そこで，y を求めると，図 2 より



〔図 2〕

$$(x+y)^2=\{a-(x+y)\}^2+\{b-(x+y)\}^2$$

$$\iff \quad (x+y)^2-2(a+b)(x+y)+a^2+b^2=0$$

$$\therefore \quad x+y=a+b\pm\sqrt{2ab}$$

ここで，$x+y=a+b+\sqrt{2ab}$ とすると，$a-(x+y)<0$ となって不適であるから

$y=a+b-\sqrt{2ab}-x$

よって，③より

$a+b-\sqrt{2ab}-x<\dfrac{a}{2}$

②と合わせて

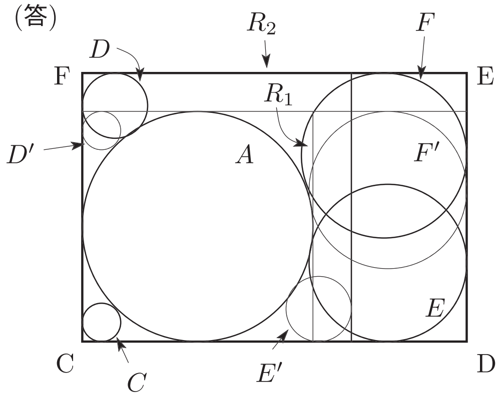
$\boldsymbol{\dfrac{a}{2}+b-\sqrt{2ab}<x<\dfrac{a}{2}}$　　**(答)**

≪注≫

「性質 (P) をもつ円で円 A に外接するものが 4 つ存在する」条件が，②かつ③になるところまでの議論は直感的である．厳密に議論するならば，次のようになる．

図 3 で R_1，R_2 は正方形である．

$2x<a$



〔図 3〕

のとき，R_1 の 2 辺と A に接する円 C，D' が存在する．このとき，C と D' は同じ大きさである．D' から辺 CF と円 A に接しながら大きくし，辺 FE に接するまでにした円 D を考えると

(円 D の直径) $<a$

でなければならない．

さらに，R_2 の 2 辺と A に接し D と半径が等しい右下の円を E' とする．ここから辺 CD と A に接しながら大きくし，辺 DE に接するまでにした円 E を考える．E が A より小さいときは E と同じ大きさで辺 DE と A に接し，E より上方にある円 F' が存在する．また，E の半径が A の半径以上であれば $F'=E$ とする．このとき

(円 E の直径) $<a$

でなければならず，これをみたすとき，(円 D の半径) $<a$ をみたす．

最後に，F' から辺 DE と A に接しながら大きくし，辺 EF に接するまでにした円 F を考えると

(円 F の直径) $<a$

でなければならず，これをみたしているとき，(円 E の直径) $<a$ をみたす．

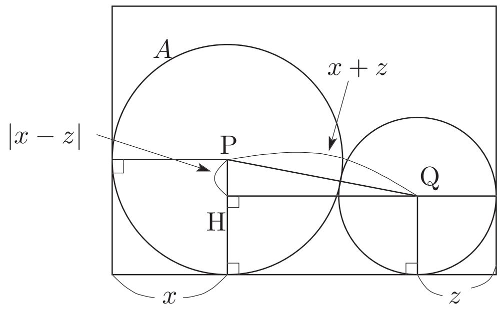
以上により，題意が成り立つ条件は，②かつ③である．

(2) $B=E$ であるから，E の半径 z を求めると，図 4 より

$$\mathrm{QH}=\sqrt{(x+z)^2-|x-z|^2}$$
$$=2\sqrt{xz}$$

であり

$$x+2\sqrt{xz}+z=b$$
$$\iff (\sqrt{x}+\sqrt{z})^2=b$$
$$\iff \sqrt{x}+\sqrt{z}=\sqrt{b}$$
$$\therefore\ z=(\sqrt{b}-\sqrt{x})^2$$



〔図 4〕

よって

$$(\text{円 } A \text{ と円 } B \text{ の面積の和})=\pi x^2+\pi z^2=\pi\{x^2+(\sqrt{b}-\sqrt{x})^4\}$$

となり，$\sqrt{x}=t$ として

$$f(t)=t^4+(\sqrt{b}-t)^4$$

とおく．このとき

$$f'(t)=4t^3-4(\sqrt{b}-t)^3=4\{t^3-(\sqrt{b}-t)^3\}$$

であるから，$f'(t)$ の符号は，$t-(\sqrt{b}-t)=2t-\sqrt{b}$ の符号と一致する．

いま，(1) と $b>a>\dfrac{b}{2}$ より

$$\sqrt{b}-\sqrt{\frac{a}{2}}<t<\sqrt{\frac{a}{2}}$$

であり，$t=\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ はこの区間の中点となっている．

したがって，$f(t)$ は $t=\dfrac{\sqrt{b}}{2}$ のとき，極小かつ最小となり，求める最小値は

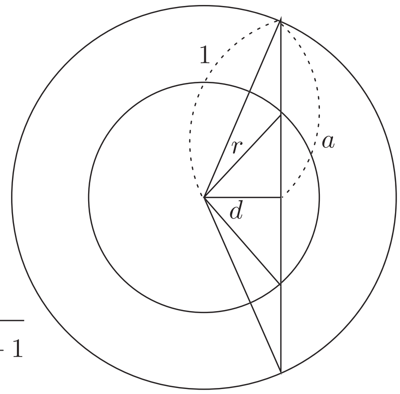
$$\pi f\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{\pi b^2}{8}}\qquad\text{(答)}$$

【3】(1) △PQR と平面 $z=t\ (0 \leqq t \leqq \sqrt{3}a)$ との交わりを L としその長さを $2l$ とすると

$$\frac{\sqrt{3}a-t}{l}=\sqrt{3} \text{ より}$$

$$l=a-\frac{t}{\sqrt{3}}$$

である．また△PQR を含む平面と z 軸との距離を d, L 上の任意の点と z 軸との距離を r とすると



$$d \leqq r \leqq \sqrt{d^2+l^2}$$

であり d の範囲は

$$0 \leqq d \leqq \sqrt{1-a^2}$$

であるから，r の範囲は

$$0 \leqq r \leqq \sqrt{1-a^2+l^2}=\sqrt{\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{\sqrt{3}}at+1}$$

である．よって，求める体積は

$$V=\int_0^{\sqrt{3}a}\pi\left(\frac{1}{3}t^2-\frac{2}{\sqrt{3}}at+1\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{9}t^3-\frac{a}{\sqrt{3}}t^2+t\right]_0^{\sqrt{3}a}$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{3}\pi\left(a-\frac{2}{3}a^3\right)} \quad \text{(答)}$$

(2)

$$\frac{dV}{da}=\sqrt{3}\pi(1-2a^2) \quad (0<a \leqq 1)$$

だから，V の増減は下のようになる．

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

よって，V は $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3}\pi}$ をとる．　(答)

【4】(1)　$\mathrm{AM}=\sqrt{3}$ より，

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{OA}^2}$$
$$=\sqrt{2}$$

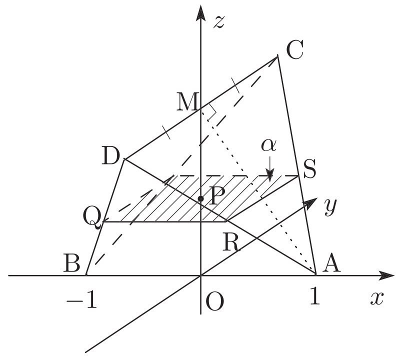
また，$\mathrm{CM}\perp\mathrm{AM}$，$\mathrm{CM}\perp\mathrm{BM}$ より，
$\mathrm{CD}\perp$平面 AMB だから，

CD $/\!/$ y 軸

よって，

$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，　$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$

(答)



(2)　α $/\!/$ AB，α $/\!/$ CD だから，題意の切り口は AB と CD に平行な辺をもつ長方形となり，α と z 軸との交点を P とおき，図のように点 Q〜S をとると，

$$\frac{\mathrm{RS}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OM}}=t,\quad \frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MO}}=1-t$$

より，2 辺の長さは

$\mathrm{RS}=2t$，　$\mathrm{QR}=2(1-t)$

以上により，**2 辺の長さが $2t$，$2(1-t)$ である長方形である．**　　(答)

(3)　OM を $s:1-s$ に内分する点を $(0,\ 0,\ u)$ とすると，$\mathrm{M}(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ より，$u=\sqrt{2}s$.
ここで平面 $z=\sqrt{2}s$ での切り口の長方形の面積は，

$2s\cdot 2(1-s)=4(s-s^2)$

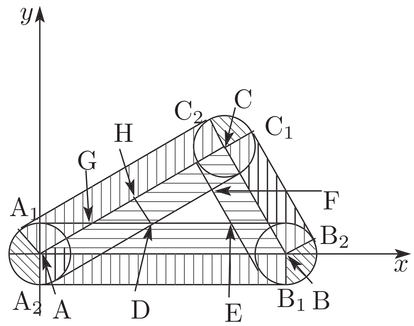
であるから，求める体積 V は，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}t}4(s-s^2)dz=4\sqrt{2}\int_0^t(s-s^2)ds=4\sqrt{2}\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_0^t$$
$$=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}t^2(3-2t)}$$

(答)

【5】

(1) K を平面 $z=0$ で切った切り口は A，B，C を中心とする半径 1 の円とそれらの共通外接線からなる右のような図形である．



題意より，$\mathrm{AB}=8,\ \mathrm{BC}=4,\ \mathrm{CA}=4\sqrt{3}$ であり，さらに

$\angle\mathrm{BAC}=30^\circ,\quad \angle\mathrm{ABC}=60^\circ,$

$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

よって，右図のように点を定めると，

$$S_1 = \text{長方形}\,\mathrm{ABB_1A_2} + \text{長方形}\,\mathrm{BCC_1B_2} + \text{長方形}\,\mathrm{CAA_1C_2} = (8+4+4\sqrt{3})\times 1 = 12+4\sqrt{3}$$

$$S_2 = \text{扇形}\,\mathrm{AA_1A_2} + \text{扇形}\,\mathrm{BB_1B_2} + \text{扇形}\,\mathrm{CC_1C_2} = \pi\times 1^2 = \pi$$

$$\triangle\,\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

また，2 直線 AC，DE の交点を G，D から AC に下ろした垂線の足を H とすれば，$\mathrm{DH}=1,\ \angle\mathrm{DGH}=30^\circ$ であるから

$$\mathrm{AH}=\mathrm{AG}+\mathrm{GH}=\mathrm{GD}+\mathrm{GH}=2+\sqrt{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{DF}=\mathrm{AC}-\mathrm{AH}-1=3\sqrt{3}-3$$

$$\therefore\quad \triangle\,\mathrm{DEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{DF}^2}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}-9$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2+\triangle\,\mathrm{ABC}-\triangle\,\mathrm{DEF} \\ &= 12+4\sqrt{3}+\pi+8\sqrt{3}-(6\sqrt{3}-9) \\ &= \mathbf{21+6\sqrt{3}+\pi} \qquad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) K を平面 $z=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの切り口は，(1) の円の半径 r を

$$r=\sqrt{1-t^2}\quad\cdots\cdots①$$

としたものに等しい．よって，切り口の面積を $S(t)$ とすれば，(1) と同様にして

$$\mathrm{AH}=2r+\sqrt{3}r$$

$$\therefore\quad \mathrm{DF}=4\sqrt{3}-(3+\sqrt{3})r$$

となるから，

$$\begin{aligned} S(t) &= \text{長方形の面積の和}+\text{扇形の面積の和}+\triangle\,\mathrm{ABC}-\triangle\,\mathrm{DEF} \\ &= (12+4\sqrt{3})r+\pi r^2+8\sqrt{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\{4\sqrt{3}-(3+\sqrt{3})r\}^2 \\ &= (24+8\sqrt{3})r-(2\sqrt{3}+3-\pi)r^2 \quad\cdots\cdots② \end{aligned}$$

よって，求める体積を V とすれば，① を代入して

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)dt$$

$$= (24+8\sqrt{3})\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt - (2\sqrt{3}+3-\pi)\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$ は半径 1 の半円の面積 $\dfrac{\pi}{2}$ に等しいから

$$V = (12+4\sqrt{3})\pi - 2(2\sqrt{3}+3-\pi)\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \boldsymbol{\left(\frac{40}{3}+4\sqrt{3}\right)\pi - \frac{8\sqrt{3}}{3} - 4} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1)

$$a = \frac{yz}{x+z},\quad b = x+z,\quad c = \frac{xy}{x+z}$$

したがって，求める立体は

$$\begin{cases} 1 \leqq \dfrac{yz}{x+z} \leqq 2 \\ 1 \leqq x+z \leqq 2 \\ 1 \leqq \dfrac{xy}{x+z} \leqq 2 \end{cases}$$

$x,\ y,\ z > 0$ なので

$$\begin{cases} x+z \leqq yz \leqq 2(x+z) \\ 1 \leqq x+z \leqq 2 \\ x+z \leqq xy \leqq 2(x+z) \end{cases} \quad \cdots①$$

ここで $y=t$ とし, ①を整理すると

$$\begin{cases} \dfrac{t-2}{2}z \leqq x \leqq (t-1)z \\ \dfrac{t-2}{2}x \leqq z \leqq (t-1)x \\ -x+1 \leqq z \leqq -x+2 \end{cases} \quad \cdots②$$

また $t=y=a+c$ より

$2 \leqq t \leqq 4$

であり $\dfrac{1}{t-1} \geqq \dfrac{t-2}{2}$ となるのは, $2 \geqq (t-1)(t-2)$ より

$2 \leqq t \leqq 3$

のとき,

$\dfrac{1}{t-1} \leqq \dfrac{t-2}{2}$ となるのは, $2 \leqq (t-1)(t-2)$ より

$3 \leqq t \leqq 4$

のときであるから

(イ) $2 \leqq t \leqq 3$ のとき, 条件 ②で表される領域を図示すると図 1 のようになる.

この領域の面積 S_1 は

$$\therefore\quad S_1 = 3\times\frac{1}{2}\left|\left(\frac{t-1}{t}\right)^2 - \left(\frac{1}{t}\right)^2\right|$$

$$= \boldsymbol{\frac{3(t-2)}{2t}} \qquad \text{(答)}$$

(ロ) $3 \leqq t \leqq 4$ のとき, 条件 ②で表される領域を図示すると図 2 のようになる.

この領域の面積 S_2 は

$$\therefore \quad S_2 = 3 \times \frac{1}{2} \left| \left(\frac{t-2}{t} \right)^2 - \left(\frac{2}{t} \right)^2 \right|$$

$$= \boldsymbol{\frac{3(4-t)}{2t}} \qquad (\text{答})$$

図 1

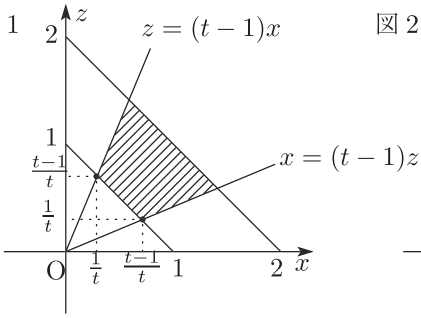
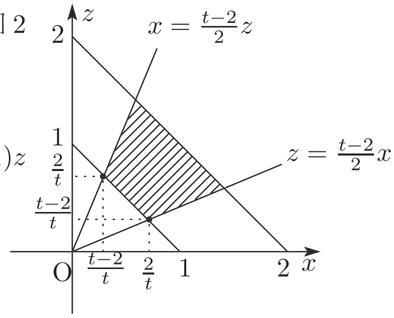


図 2



(2) 求める体積 V は

$$V = \int_2^3 \frac{3}{2} \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt + \int_3^4 \frac{3}{2} \left(\frac{4}{t} - 1\right) dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_2^3 dt - 3 \int_2^3 \frac{1}{t} dt + 6 \int_3^4 \frac{1}{t} dt - \frac{3}{2} \int_3^4 dt$$

$$= \frac{3}{2} - 3(\log 3 - \log 2) + 6(\log 4 - \log 3) - \frac{3}{2}$$

$$= \mathbf{15 \log 2 - 9 \log 3} \qquad (\text{答})$$

【7】一般性を失わずに, $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$ として良い．このとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\gamma,\ |\vec{b}|=1$$

より

$$\vec{b}=(\cos\gamma,\ \sin\gamma,\ 0)$$

また, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\cos\beta$ より

$$\vec{c}=(\cos\beta,\ t,\ u)$$

として良い．このときさらに

$|\vec{c}|=1$　より　$\cos^2\beta+t^2+u^2=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\cos\alpha$　より　$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+t\sin\gamma$

である．

いま，問題の式から文字を減らすように変形を行う．

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=(\cos\beta\cos\gamma+t\sin\gamma)^2+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2(\cos\beta\cos\gamma+t\sin\gamma)\cos\beta\cos\gamma\\
&=\cos^2\beta+\cos^2\gamma-\cos^2\beta\cos^2\gamma+t^2\sin^2\gamma\\
&=1-t^2\cos^2\gamma-\cos^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\gamma-u^2\\
&=1+(1-t^2-\cos^2\beta)\cos^2\gamma-u^2\\
&=1+u^2\cos^2\gamma-u^2\\
&=1-u^2\sin^2\gamma
\end{aligned}$$

$u^2=1-t^2-\cos^2\beta$ より

$$0\leqq u^2\leqq 1$$

よって

$$0\leqq\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqq 1$$

が示された．

左側の等号は

$$u^2\sin^2\gamma=1\quad\Longleftrightarrow\quad u=\pm1\ \text{かつ}\ \sin\gamma=\pm1$$

このとき, $t=0,\ \cos\beta=0$ となるので

$$\vec{b}=(0,\ \pm1,\ 0),\ \vec{c}=(0,\ 0,\ \pm1)\quad(\text{複号任意})$$

つまり, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が互いに直交するときである．

右側の等号は

$$u^2\sin^2\gamma=0\quad\Longleftrightarrow\quad u=0\ \text{または}\ \sin\gamma=0$$

のときである．ここで, $u=0$ なら, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が同一平面上にあることを意味する．また,

$\sin\gamma=0$ のとき

$$\vec{b}=(\pm1,\ 0,\ 0)=\pm\vec{a}$$

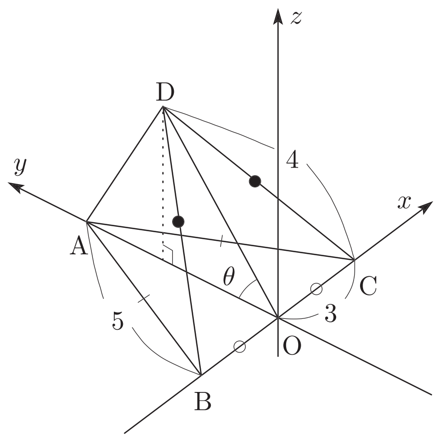
となり，やはり, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が同一平面上にある．

すなわち, $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が同一平面上のときである．　〔証明終〕

５章　実戦演習５

問題

【1】右図のように座標を導入すると，B$(-3,\ 0,\ 0)$，C$(3,\ 0,\ 0)$ であり，OB $=3$，AB $=5$ より，OA $=4$ となるので，A$(0,\ 4,\ 0)$ である．



また，$\angle \mathrm{AOD}=\theta$ とおくと，$0<\theta<\pi$ であり，OD $=\sqrt{7}$ なので

$\mathrm{D}(0,\ \sqrt{7}\cos\theta,\ \sqrt{7}\sin\theta)$

とおける．

ここで，外心 P は対称性より yz 平面上にあるから，$\mathrm{P}(0,\ y,\ z)$ とおくと

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PD}$

より

$$\begin{cases}(y-4)^2+z^2=(-3)^2+y^2+z^2 & \cdots\cdots ① \\ (-3)^2+y^2+z^2=(y-\sqrt{7}\cos\theta)^2+(z-\sqrt{7}\sin\theta)^2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

①より

$$y^2-8y+16+z^2=9+y^2+z^2$$

$$\therefore\quad y=\frac{7}{8}$$

②より

$$9+y^2+z^2=y^2-2\sqrt{7}y\cos\theta+7\cos^2\theta+z^2-2\sqrt{7}z\sin\theta+7\sin^2\theta$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{7}z\sin\theta=-2(\sqrt{7}y\cos\theta+1)$$

$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ だから

$$z=-\frac{1}{\sqrt{7}\sin\theta}\left(\frac{7\sqrt{7}}{8}\cos\theta+1\right)=-\frac{1}{8\sqrt{7}}\cdot\frac{7\sqrt{7}\cos\theta+8}{\sin\theta}$$

ここで，外接円の半径を r とすると

$$r^2=\mathrm{PA}^2=\left(\frac{25}{8}\right)^2+z^2$$

となるから，z^2 が最小，さらには $(-8\sqrt{7}z)^2$ が最小であればよい．

そこで

$$f(\theta)=\left(\frac{7\sqrt{7}\cos\theta+8}{\sin\theta}\right)^2$$

とおくと

$$f'(\theta)=2\cdot\frac{7\sqrt{7}\cos\theta+8}{\sin\theta}\cdot\frac{-7\sqrt{7}\sin\theta\cdot\sin\theta-(7\sqrt{7}\cos\theta+8)\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=2\cdot\frac{-(7\sqrt{7}\cos\theta+8)(7\sqrt{7}+8\cos\theta)}{\sin^3\theta}$$

$7\sqrt{7}+8\cos\theta>0$ であるから，$f'(\theta)=0$ となるとき

$$\cos\theta=-\frac{8}{7\sqrt{7}}$$

となる．

$0 < \theta < \pi$ におけるこの θ の値を α とすると，増減表は下表のようになり，$\theta = \alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる．

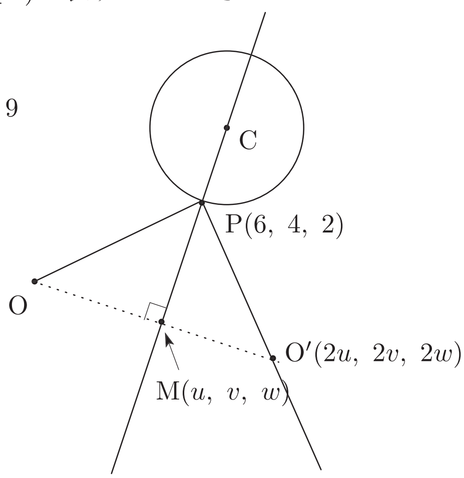
θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，このときの AD の長さを求めると，
余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{AD}^2 &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OD}^2 - 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OD} \cos\alpha \\ &= 16 + 7 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{7} \cdot \left(-\frac{8}{7\sqrt{7}}\right) \\ &= 23 + \frac{64}{7} = \frac{225}{7} = \frac{15^2}{7} \end{aligned}$$

$\therefore \quad \mathrm{AD} = \boldsymbol{\frac{15}{7}\sqrt{7}}$ 　　(答)

【2】光が球面で反射する点は，$\mathrm{P}(3t,\ 2t,\ t)\ (t \geqq 0)$ と表すことができる．



P が中心 $\mathrm{C}(7,\ 6,\ 4)$，半径 3 の球面上にあるとき

$$(3t-7)^2 + (2t-6)^2 + (t-4)^2 = 9$$

$$\iff 7t^2 - 37t + 46 = 0$$

$$\iff (7t-23)(t-2) = 0$$

$$\therefore \quad t = \frac{23}{7},\ 2$$

ここで，$t\ (\geqq 0)$ が増加するほど原点から遠くなるので，題意より

$\mathrm{P}(\boldsymbol{6,\ 4,\ 2})$ 　　(答)

また，直線 CP に関して原点 O と対称な位置にある点を $\mathrm{O}'(2u,\ 2v,\ 2w)$ とする．

対称であるための条件を考えると，まず，OO' の中点を $\mathrm{M}(u,\ v,\ w)$ とすれば

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = k\overrightarrow{\mathrm{PC}} \quad (k \text{ は実数})$$

$$\iff \begin{pmatrix} u-6 \\ v-4 \\ w-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$$

k を消去して

$$u - 6 = \frac{v-4}{2} = \frac{w-2}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \perp \overrightarrow{\mathrm{PC}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OO}'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0$$

$$\iff 2u + 4v + 4w = 0$$

$$\therefore \quad u + 2v + 2w = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

よって，①, ②より

$u + 2(2u-8) + 2(2u-10) = 0$ 　　　$\therefore \quad u = 4$

となり，さらに $v = 0,\ w = -2$ を得るので

$\mathrm{O}'(8,\ 0,\ -4)$

反射光線は，P を端点とする半直線 PO$'$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + l\overrightarrow{\mathrm{PO'}} = \begin{pmatrix} 2l+6 \\ -4l+4 \\ -6l+2 \end{pmatrix} \quad (l \geqq 0)$$

と表される．ここで，$z=0$ とすると，$l=\dfrac{1}{3}$ となるから

$$x=\frac{20}{3},\quad y=\frac{8}{3}$$

したがって，光が xy 平面と交わる点は

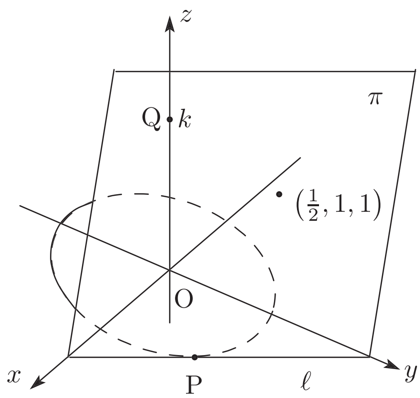
$$\left(\boldsymbol{\frac{20}{3},\ \frac{8}{3},\ 0}\right) \qquad \text{(答)}$$

【3】楕円上の点を $\mathrm{P}(\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，P における接線 ℓ は

$$x\cos\theta + \frac{2\sin\theta}{4}y = 1,\ z=0$$

と表され，ℓ の方向ベクトルは $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．ここで, $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\cos\theta \\ 1-2\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$



となるので，平面 π は実数 α, β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \alpha\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\cos\theta \\ 1-2\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2}\sin\theta + \frac{\beta}{2} - \beta\cos\theta + \cos\theta \\ -\alpha\cos\theta + \beta - 2\beta\sin\theta + 2\sin\theta \\ \beta \end{pmatrix}$$

と表される．

$\beta = k$ とすると，題意より

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}\sin\theta + \dfrac{k}{2} - k\cos\theta + \cos\theta = 0 \\ -\alpha\cos\theta + k - 2k\sin\theta + 2\sin\theta = 0 \end{cases}$$

が成り立つので，α を消去して

$$\frac{k}{2}(1-2\sin\theta)\sin\theta + k\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 0$$

$$\iff \quad k \cdot \frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta - 2) = -1$$

$$\therefore \quad k = \frac{2}{2-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

となる．よって，k の範囲は

$$\frac{2}{2+\sqrt{2}} \leqq k \leqq \frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{2-\sqrt{2} \leqq k \leqq 2+\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\begin{pmatrix}1-a\\-b\\-c\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\begin{pmatrix}-a\\1-b\\-c\end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$ より

$$(1-a)^2+b^2+c^2=a^2+(1-b)^2+c^2 \qquad \therefore\quad a=b$$

したがって，$\mathrm{P}(t,\ t,\ c)$ とおくと

$$r^2\left|\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right|^2=r^2(t^2+t^2+c^2)$$

よって

$$r^2(2t^2+c^2)=(1-t)^2+t^2+c^2$$

となる $t,\ c$ がとれるような r の値の範囲を求めればよい．

$$2t^2(1-r^2)-2t+1=(r^2-1)c^2$$

$r^2-1<0$ より　　$(r^2-1)c^2\leqq 0$

よって

$$2{t_0}^2(1-r^2)-2t_0+1\leqq 0$$

となる t_0 がとれれば，そのときの t_0，r の値に対し

$$c^2=\frac{2{t_0}^2(1-r^2)-2t_0+1}{r^2-1}$$

で c をとることができる．

$f(t)=2(1-r^2)t^2-2t+1$ とおくと，$1-r^2>0$ であるから，$f(t)=0$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}\geqq 0$ が必要十分条件である．よって

$$1-2(1-r^2)\geqq 0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq r<1} \qquad (答)$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=2(1-t)(-t)+c^2\\&=2t^2-2t+\frac{2t^2(1-r^2)-2t+1}{r^2-1}\\&=\frac{2r^2}{1-r^2}t-\frac{1}{1-r^2}\end{aligned}$$

t の変域は $f(t)\leqq 0$ より

$$\frac{1-\sqrt{1-2(1-r^2)}}{2(1-r^2)}\leqq t\leqq\frac{1+\sqrt{1-2(1-r^2)}}{2(1-r^2)}$$

よって，$\dfrac{2r^2}{1-r^2}>0$ より

$$M(r)=\frac{1}{1-r^2}\left\{2\cdot\frac{1+\sqrt{1-2(1-r^2)}}{2(1-r^2)}\cdot r^2-1\right\}$$

$$m(r)=\frac{1}{1-r^2}\left\{2\cdot\frac{1-\sqrt{1-2(1-r^2)}}{2(1-r^2)}\cdot r^2-1\right\}$$

$$\therefore\quad M(r)-m(r)=\frac{2\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}\cdot r^2$$

よって

$$\lim_{r\to1-0}(1-r)^2\{M(r)-m(r)\}=\lim_{r\to1-0}\frac{2\sqrt{2r^2-1}\cdot r^2}{(1+r)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad (答)$$

【5】余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ \iff a^2=b^2+c^2+bc$$
$$\iff a^2=(b+c)^2-bc$$
$$\iff bc=(b+c)^2-a^2$$
$$\iff bc=(b+c+a)(b+c-a)$$

今, $b \leqq c$ のときを考える.

$b,\ c$ はともに素数であり, また, $b+c+a>c \geqq b \geqq 2$ より

$b+c+a=bc \quad \cdots$① かつ $b+c-a=1 \quad \cdots$②

① + ② より

$$2(b+c)=bc+1 \iff bc-2(b+c)+1=0$$
$$\iff (b-2)(c-2)=3$$

ここで, $b-2,\ c-2$ は $0 \leqq b-2 \leqq c-2$ をみたす整数であるから

$$(b-2,\ c-2)=(1,\ 3)$$
$$\iff (b,\ c)=(3,\ 5)$$ (これは $b,\ c$ が素数をみたしている)

これを, ②に代入することにより

$a=7$

以上より

$(a,\ b,\ c)=(7,\ 3,\ 5)$

$c \leqq b$ のときも同様にして

$(a,\ b,\ c)=(7,\ 5,\ 3)$

が得られる. よって

$(a,\ b,\ c)=$ **(7, 3, 5), (7, 5, 3)** (答)

【6】$f(a),\ f(b)$ のうち大きくないほうを, $\min\{f(a),\ f(b)\}$, 小さくないほうを $\max\{f(a)$, $f(b)\}$ とすると

$$m \leqq f(a) \leqq M,\ m \leqq f(b) \leqq M$$

より

$$m \leqq \min\{f(a),\ f(b)\},\ \max\{f(a),\ f(b)\} \leqq M \cdots\cdots①$$

ここで, $y=Ax+B$ について $a \leqq x \leqq b$ で

$$\min\{f(a),\ f(b)\} \leqq Ax+B \leqq \max\{f(a),\ f(b)\}$$

だから, これと ① より

$$m \leqq Ax+B \leqq M$$

$\therefore \quad -M \leqq -(Ax+B) \leqq -m$

これと $m \leqq f(x) \leqq M$ を加えると

$$-M+m \leqq f(x)-(Ax+B) \leqq M-m$$

$\therefore \quad -(M-m) \leqq f(x)-(Ax+B) \leqq M-m$

$\therefore \quad |f(x)-(Ax+B)| \leqq M-m$ 〔証明終〕

【7】(1) A, B を往復していればよいから,

$$p_n = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} \quad \text{(答)}$$

(2) A, C のみを訪れている確率は p_n と等しい.

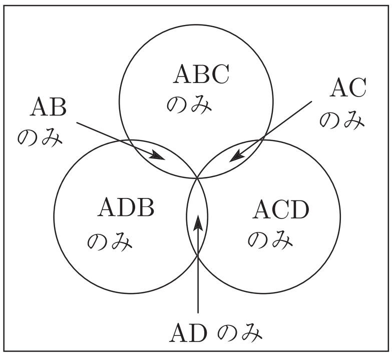
つまり, 求める確率は, A, B, C のみを訪れている場合から A, B のみ, および A, C のみを訪れている場合を除けばよいから,

$$q_n = \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} - \mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} \quad \text{(答)}$$

(3) 図 1 より,

$$r_n = \mathbf{1} - \mathbf{3}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} + \mathbf{3}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\boldsymbol{n}} \quad \text{(答)}$$

図 1



M3JSA/M3JA/M3TA

選抜東大・医学部理系数学

東大理系数学

難関大理系数学 T

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製