M3MB

冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大文系数学M

問題

【1】題意の共通解を α とおくと

$$\begin{cases} \alpha^2-2a\alpha-b=0 & \cdots ① \\ \alpha^3-(2a^2+b)\alpha-4ab=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② − ①×α より

$$2a\alpha^2-2a^2\alpha-4ab=0 \iff 2a(\alpha^2-a\alpha-2b)=0$$

ここで，$a=0$ とすると，①，②はそれぞれ

$$\alpha^2-b=0,\quad \alpha(\alpha^2-b)=0$$

であり，$b>0$ なので，①をみたす $\alpha=\pm\sqrt{b}$ がともに②をみたすことになり，不適である．ゆえに

$$\alpha^2-a\alpha-2b=0 \quad \cdots ③$$

③ − ① より

$$a\alpha-b=0 \qquad \therefore \quad \alpha=\frac{b}{a}\ (\because \quad a\neq 0)$$

これを③に代入すると

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2-a\cdot\frac{b}{a}-2b=0 \iff b(b-3a^2)=0$$

$b>0$ なので

$$b=3a^2$$

$b>0$ だから，$a\neq 0$ はこの条件に含まれる．このとき，①，②はそれぞれ

$$\alpha^2-2a\alpha-3a^2=0 \iff (\alpha+a)(\alpha-3a)=0$$
$$\alpha^3-5a^2\alpha-12a^3=0 \iff (\alpha-3a)(\alpha^2+3a\alpha+4a^2)=0$$

$a\neq 0$ だから

$$3a\neq -a$$
$$\alpha^2+3a\alpha+4a^2=\left(\alpha+\frac{3}{2}a\right)^2+\frac{7}{4}a^2>0$$

よって，$\alpha=3a$ だけが解となり，条件をみたす．したがって，求める条件は

$\boldsymbol{b=3a^2}$　　(答)

そして，このときの共通解は，$\boldsymbol{x=3a}$　　(答)

【2】(1) 合成して，

$$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)\quad(\text{図 }1)$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq \sin(\theta+45^\circ)\leqq 1\quad(\text{図 }2)$$

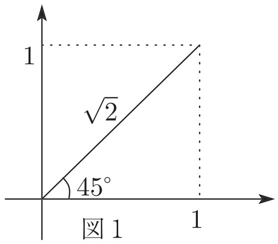


図 1

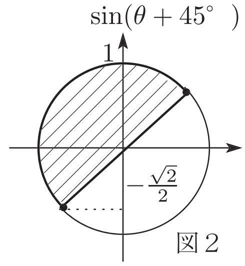


図 2

$$\therefore\quad \boldsymbol{-1\leqq t\leqq \sqrt{2}}\qquad(\text{答})$$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方して，

$$\begin{aligned}t^2&=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\\&=1+2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(t^2-1)\quad\cdots①$$

①より

$$\begin{aligned}f(\theta)&=2\sin\theta\cos\theta-2a(\sin\theta+\cos\theta)+1\\&=t^2-1-2at+1\\&=\boldsymbol{t^2-2at}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

(3) $f(\theta)=g(t)=t^2-2at=(t-a)^2-a^2$

とおくと，$y=g(t)$ のグラフは

軸： $t=a$

である下に凸の放物線であり，t のとりうる値の範囲が $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ であることと，-1 と $\sqrt{2}$ の中間は $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ であることから，$a>0$ であることも考えて，以下のように場合分けを行う．

(i) $\boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ のとき

$$\begin{cases}\text{最大値: } g(\sqrt{2})=\boldsymbol{2-2\sqrt{2}a}\\ \text{最小値: } g(a)=\boldsymbol{-a^2}\end{cases}\quad(\text{答})$$

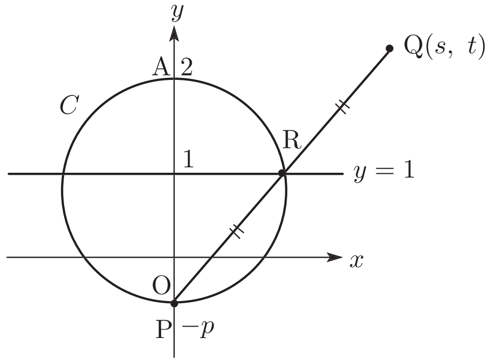
(ii) $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}<a\leqq\sqrt{2}}$ のとき

$$\begin{cases}\text{最大値: } g(-1)=\boldsymbol{1+2a}\\ \text{最小値: } g(a)=\boldsymbol{-a^2}\end{cases}\quad(\text{答})$$

(iii) $\boldsymbol{a>\sqrt{2}}$ のとき

$$\begin{cases}\text{最大値: } g(-1)=\boldsymbol{1+2a}\\ \text{最小値: } g(\sqrt{2})=\boldsymbol{2-2\sqrt{2}a}\end{cases}\quad(\text{答})$$

【3】(1) まず, 円 C の方程式を求める.



線分 AP の中点が C の中心で, その座標は,

$$\left(0,\ \frac{2-p}{2}\right)$$

C の半径は, A, P の y 座標に注目して,

$$\frac{2-(-p)}{2}=\frac{2+p}{2}$$

よって, C の方程式は,

$$x^2+\left(y-\frac{2-p}{2}\right)^2=\left(\frac{2+p}{2}\right)^2 \quad \cdots(*)$$

ところで, 線分 PQ の中点 R の座標は,

$$\mathrm{R}\left(\frac{s}{2},\ \frac{t-p}{2}\right)$$

であるが, 一方で R は直線 $y=1$ 上の点であるから,

$$\frac{t-p}{2}=1$$

$$\therefore\quad t=\boldsymbol{2+p} \qquad \text{(答)}\ \cdots①$$

このとき,

$$\mathrm{R}\left(\frac{s}{2},\ 1\right)$$

で, R は円 C 上にあるから, これを $(*)$ に代入して,

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2+\left(1-\frac{2-p}{2}\right)^2=\left(\frac{2+p}{2}\right)^2$$

これを整理して,

$$s^2=4(1+p)$$

$s \geqq 0$ だから,

$$s=\boldsymbol{2\sqrt{1+p}} \qquad \text{(答)}\cdots②$$

(2) ①より,

$$p=t-2$$

これを②に代入して,

$$s=2\sqrt{1+p}=2\sqrt{t-1}$$

$$\therefore\quad s^2=4(t-1)$$

$$\therefore\quad t=\frac{s^2}{4}+1$$

ここで, $p>0$ だから, ②より,

$s > 2\sqrt{1+0} = 2$

以上から, 点 Q の描く曲線は,

放物線 $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{4} + 1}$ の $\boldsymbol{x > 2}$ の部分　　(答)

【4】(1) $y = |x|$ と $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$ の交点の x 座標は

$$x^2 = |x|^2$$

に注意すると

$|x| = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$

$\iff \quad |x|^2 + 2|x| - 6 = 0$

$\iff \quad |x| = -1 + \sqrt{7} \quad (\because |x| \geqq 0)$

より, $x = -1+\sqrt{7},\ 1-\sqrt{7}$ である.

よって, **D は図 1 の斜線部で境界を含む.**

(答)

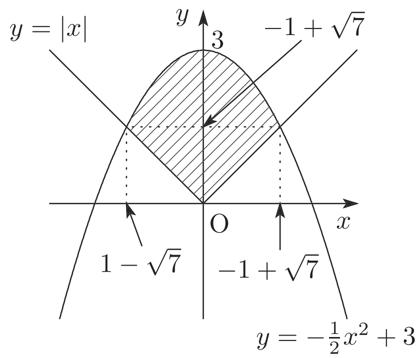


図 1

(2) $\mathrm{B}\left(\alpha,\ -\dfrac{1}{2}\alpha^2 + 3\right)$　(ただし, $1-\sqrt{7} \leqq \alpha \leqq -1+\sqrt{7}$)

とおくと, B における $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3$ の接線の方程式は, $y' = -x$ より

$y - \left(-\dfrac{1}{2}\alpha^2 + 3\right) = -\alpha(x - \alpha)$

A を通るので

$0 - \left(-\dfrac{1}{2}\alpha^2 + 3\right) = -\alpha\left(-\dfrac{7}{2} - \alpha\right) \quad \iff \quad \alpha^2 + 7\alpha + 6 = 0$

$1-\sqrt{7} \leqq \alpha \leqq -1+\sqrt{7}$ より

$$\alpha = -1 \qquad \therefore \quad \mathrm{B}\left(-1,\ \frac{5}{2}\right)$$

このとき, 接線の傾きは, $-(-1) = 1$ であるから

$$\mathrm{AB} \mathbin{/\!/} (\text{直線 } y = x)$$

よって, $\triangle$ ABP の面積は, P が $y = x$ $(0 \leqq x \leqq -1+\sqrt{7})$ 上にあるとき最大となるから, $\mathrm{P} = \mathrm{O}$ のときを考えて, 求める最大値は

$$\frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} = \boldsymbol{\frac{35}{8}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\dfrac{y}{x + \dfrac{7}{2}} = \dfrac{y - 0}{x - \left(-\dfrac{7}{2}\right)}$ であるから, $\dfrac{y}{x + \dfrac{7}{2}}$ は, 点 A と D 内の点 $(x,\ y)$ を結ぶ直線の傾きを表す. よって, (2) の考察より

$$\boldsymbol{0 \leqq \frac{y}{x + \frac{7}{2}} \leqq 1} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】自然数を 6 で割った余りで分類すると

$$6k-5,\quad 6k-4,\quad 6k-3,\quad 6k-2,\quad 6k-1,\quad 6k$$

(ただし $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

2 でも 3 でも割り切れない数は $6k-5$, $6k-1$ に限り，

$$6k-5<6k-1$$

なので，

$$a_{2k-1}=6k-5\quad\cdots①,\quad a_{2k}=6k-1\quad\cdots②$$

と表すことができる．

(1) $$1003=6\cdot167+1=6\cdot167+6-5$$
$$=6\cdot168-5$$

①より

$$a_{2\cdot168-1}=6\cdot168-5$$

よって

$a_{335}=1003$　　∴　**第 335 項**　　(答)

(2) ②より

$a_{2000}=a_{2\cdot1000}=6\cdot1000-1=\mathbf{5999}$　　(答)

(3) $$\sum_{n=1}^{2m}a_n=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{m}\{(6k-5)+(6k-1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$$
$$=6\cdot2\cdot\frac{m(m+1)}{2}-6m=\boldsymbol{6m^2}$$　　(答)

【2】(1) 自然数 a, b がともに 2 以上であるとすると

$$\frac{1}{a}\leqq\frac{1}{2},\ \frac{1}{b}\leqq\frac{1}{2}$$

すなわち

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqq1$$

となり，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$ をみたさない．

したがって，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>1$ をみたす自然数 a, b の少なくとも一方は 1 である．

(証終)

(2) $a=1$ のとき $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$ は成立しないので，$a\geqq2$ として考える．

(i) $a=2$ のとき

$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}<1$　　∴　$b>2$ すなわち $b\geqq3$

であるから

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

(ii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\left(<\frac{5}{6}\right)$$

以上より，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ は $a=2$，$b=3$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{6}$$

である． （証終）

(3) $a=1$ のとき

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$$

となり，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ をみたさないので，$a \geqq 2$ として考える．

(i) $a=2$ のとき

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{2}$$

また，$b \geqq 3$ であるから

（ア）$b=3$ のとき

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{c}<\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad c>6 \text{ すなわち } c \geqq 7$$

であるから

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$$

（イ）$b \geqq 4$ のとき，$c \geqq 5$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{38}{40}\left(<\frac{41}{42}\right)$$

(ii) $a \geqq 3$ のとき，$b \geqq 4$，$c \geqq 5$ であり

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}\left(<\frac{41}{42}\right)$$

以上より，$\dfrac{41}{42}>\dfrac{38}{40}>\dfrac{47}{60}$ であるから，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ は $a=2$，$b=3$，$c=7$ のとき最大で，最大値は

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{41}{42}$$

である． （証終）

【3】 $\begin{cases} 3\text{の倍数の目}\quad 3,\ 6 & \rightarrow \quad 4\text{点} \\ \text{その他の目}\quad 1,\ 2,\ 4,\ 5 & \rightarrow \quad 1\text{点} \end{cases}$

8 回のうち, 3 の倍数の目が x 回, 得点を T とすると, $x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ で正の整数 k を用いて, T は,

$$T = 4x + (8 - x) = 4k \iff 3x = 4(k - 2) \quad \cdots ①$$

①から, x は 4 の倍数だから, $x = 0,\ 4,\ 8$ の場合に限られる.

各場合は排反だから, 求める確率は,

$$_8\mathrm{C}_0 \left(\frac{2}{3}\right)^8 + {}_8\mathrm{C}_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_8\mathrm{C}_8 \left(\frac{1}{3}\right)^8$$

$$= \frac{1}{3^8}(2^8 + 70 \cdot 2^4 + 1) = \mathbf{\frac{17}{81}} \qquad (\text{答})$$

【4】(1) a_nは 3 で割り切れるが, b_nは 3 で割り切れない $\cdots(*)$

$(*)$ が $n \geqq 3$ で成り立つことを数学的帰納法で示す.

i) $n = 3$ のとき, 条件から

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a_3 = 12 \\ b_3 = 17 \end{cases}$$

であり, このとき $(*)$ は成立する.

ii) $n = k(k \geqq 3)$ のとき $(*)$ の成立を仮定すると, 整数 $m,\ l$ を用いて

$$a_k = 3m,\ b_k = 3l \pm 1$$

とかける.

ここで

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k b_k & \cdots ① \\ b_{k+1} = 2{a_k}^2 + {b_k}^2 & \cdots ② \end{cases}$$

であり, ①より

$$a_{k+1} = 3 \cdot 2m(3l \pm 1)$$

よって, a_{k+1} は 3 で割り切れる.

また, ②より

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 2 \cdot 9m^2 + (3l \pm 1)^2 \\ &= 18m^2 + 9l^2 \pm 6l + 1 \\ &= 3(6m^2 + 3l^2 \pm 2l) + 1 \end{aligned}$$

よって, b_{k+1} は 3 で割り切れない.

以上から, $n = k + 1$ のとき $(*)$ は成立する.

i), ii) より, $n \geqq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れない. (証終)

(2) (1) より

$b_n(n \geqq 3)$ は 3 で割り切れない

また, (1) と同様の議論により

$b_n(n \geqq 1)$ は 2 で割り切れない $\cdots(*)'$

さて, ここで 2 以上の自然数 m について a_m と b_m が公約数をもつと仮定する.

このとき，$a_m{}'$，$b_m{}'$ を自然数として

$$\begin{cases} a_m = pa_m{}' \\ b_m = pb_m{}' \end{cases}$$

なる奇素数 p が存在する．($(*)'$ より公約数は奇数)

このとき

$$\begin{cases} pa_m{}' = 2a_{m-1}b_{m-1} & \cdots ③ \\ pb_m{}' = 2{a_{m-1}}^2 + {b_{m-1}}^2 & \cdots ④ \end{cases}$$

であり，③より a_{m-1} または b_{m-1} が p で割り切れる．

いま，a_{m-1} が p で割り切れるとするとき，整数 l を用いて $a_{m-1} = lp$ とおけて，④より

$${b_{m-1}}^2 = pb_m{}' - 2l^2p^2 = p(b_m{}' - 2l^2p)$$

となり，b_{m-1} も p で割り切れる．

同様に，b_{m-1} が p で割り切れるとき，整数 k を用いて $b_{m-1} = kp$ とおけて，④より

$$2{a_{m-1}}^2 = pb_m{}' - k^2p^2 = p(b_m{}' - k^2p)$$

p は奇素数であるので，a_{m-1} は p で割り切れる．以上より，

　a_mと b_mが互いに素でないとき，a_{m-1}と b_{m-1}も互いに素でない

が成り立つ．これを繰り返し用いることにより

　a_mと b_mが互いに素でないとき，a_2と b_2も互いに素でない

が成り立つが，これは $a_2 = 2$，$b_2 = 3$ であることに反する．

よって，a_m と b_m は互いに素である．

すなわち，$n \geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素である．　(証終)

問題

【1】　$C_1 : y = f(x) = x^3 - a^2x,\ C_2 : y = g(x) = k(x^2 - a^2)$

だから

$f'(x) = 3x^2 - a^2,\ g'(x) = 2kx$

(1) C_1 と C_2 が $(a,\ 0)$ において共通の接線を持つので,

$f(a) = g(a) = 0 \quad \cdots$①かつ $f'(a) = g'(a) \quad \cdots$②

①は常にみたされるので,

② $\iff 2a^2 = 2ka \iff k = a \quad (\because a > 0) \quad \cdots$③

$(-a,\ 0)$ で 2 接線が直交するので,

$$f'(-a)g'(-a) = -1 \iff 2a^2 \cdot (-2ka) = -1$$
$$\iff 4ka^3 = 1 \quad \cdots④$$

③, ④と $a > 0$ より,

$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$　(答)　$\cdots$⑤

(2) ⑤ より,

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x,\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

ここで, $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= 3x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{2} \\ &= 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \end{aligned}$$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ での $h(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0

よって,

$\boldsymbol{x = -\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{8}{27}\sqrt{2}}$　(答)

【2】 $\alpha \leqq \beta,\ \alpha \neq 0,\ \beta > 0 \qquad \cdots ①$

$f(x) = \dfrac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \cdots ②$

$F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt \qquad \cdots ③$

とおく.

(1) α の正負で場合分けする.

(i) $\alpha < 0$ のとき (図 1 参照);

$\dfrac{3}{\alpha\beta} < 0$ より, $0 \leqq x \leqq \beta$ において

$$|f(x)| = f(x)$$

$$\therefore \int_0^\beta |f(x)|dx = \int_0^\beta f(x)dx = F(\beta)$$

(ii) $\alpha > 0$ のとき (図 2 参照);

$\dfrac{3}{\alpha\beta} > 0$ より, $0 \leqq x \leqq \beta$ において

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (0 \leqq x \leqq \alpha) \\ -f(x) & (\alpha \leqq x \leqq \beta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \int_0^\beta |f(x)|dx &= \int_0^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta \{-f(x)\}dx \\ &= F(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)dx \\ &= F(\alpha) - \left\{\int_0^\beta f(x)dx - \int_0^\alpha f(x)dx\right\} \\ &= 2F(\alpha) - F(\beta) \end{aligned}$$

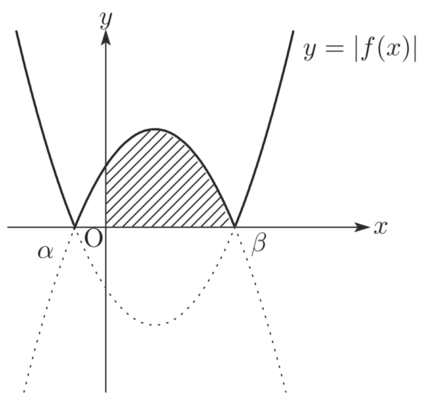


図 1

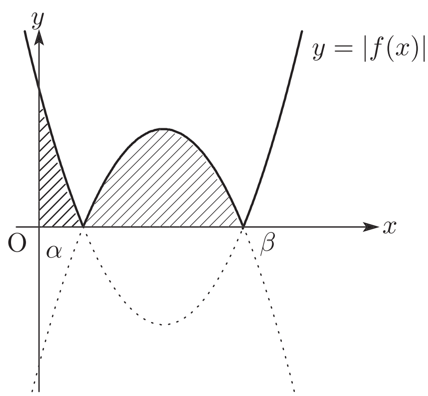


図 2

(i), (ii) より

$$\int_0^\beta |f(x)|dx = \begin{cases} \boldsymbol{F(\beta)} & (\boldsymbol{\alpha < 0} \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{2F(\alpha) - F(\beta)} & (\boldsymbol{\alpha > 0} \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{(答)}$$

(2)　$\alpha = \beta^2 \quad \cdots ④$

とおく. ①, ④ より,

$$\beta^2 \leqq \beta \quad \iff \quad 0 < \beta \leqq 1 \quad \cdots ⑤$$

また, ①, ④ より, $\alpha > 0$ なので, (1) の結果と④より,

$$\int_0^\beta |f(x)|dx = 2F(\alpha) - F(\beta) = 2F(\beta^2) - F(\beta) \quad \cdots ⑥$$

ここで,

$$\begin{aligned}
F(\beta) &= \frac{3}{\alpha\beta}\int_0^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\
&= \frac{3}{\beta^3}\int_0^\beta (x-\beta^2)(x-\beta)dx \\
&= \frac{3}{\beta^3}\int_0^\beta \{x^2 - (\beta^2+\beta)x + \beta^3\}dx \\
&= \frac{3}{\beta^3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\beta^2+\beta)x^2 + \beta^3 x\right]_0^\beta \\
&= \frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2} \quad \cdots ⑦
\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}
F(\beta^2) &= \frac{3}{\beta^3}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\beta^2+\beta)x^2 + \beta^3 x\right]_0^{\beta^2} \\
&= -\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 \quad \cdots ⑧
\end{aligned}$$

⑥, ⑦, ⑧より,

$$\begin{aligned}
\int_0^\beta |f(x)|dx &= 2\left(-\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2\right) - \left(\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\beta^3 + 3\beta^2 - \frac{3}{2}\beta + \frac{1}{2} \\
&= g(\beta)
\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
g'(\beta) &= -3\beta^2 + 6\beta - \frac{3}{2} \\
&= -3\left(\beta - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(\beta - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

ここで, $0 < \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} < 1 < \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ より, 次の増減表を得る.

β	0	$\cdots$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$g'(\beta)$		$-$	0	$+$	
$g(\beta)$		↘	最小	↗	

これより, 求める β の値は,

$$\boldsymbol{\beta = \frac{2-\sqrt{2}}{2}} \qquad (答)$$

【3】(1)

$2x-1 \geqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

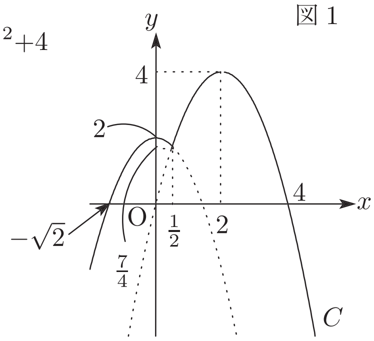
$$y=(2x-1)-x^2+2x+1=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$$

$2x-1 \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$y=-(2x-1)-x^2+2x+1=-x^2+2$$

なので, **C の概形は図 1 のようになる.** (答)

図 1



(2) $y=-x^2+4x$ 上の点 $(t,\ -t^2+4t)$ における接線の方程式は, $y'=-2x+4$ より

$$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y=(4-2t)x+t^2 \quad \cdots ①$$

これが, $y=-x^2+2$ に接するとき, x の 2 次方程式

$$-x^2+2=(4-2t)x+t^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2+2(2-t)x+(t^2-2)=0 \quad \cdots ②$$

は重解をもつので

$$(2-t)^2-(t^2-2)=6-4t=0 \qquad \therefore \quad t=\frac{3}{2}\left(\geqq \frac{1}{2}\right)$$

また, このとき②は

$$x^2+x+\frac{1}{4}=0 \qquad \therefore \quad x=-\frac{1}{2}\left(\leqq \frac{1}{2}\right)$$

となるから, このときの①は確かに C と相異なる 2 点で接している.

したがって, $a,\ b$ の値は, ①に $t=\dfrac{3}{2}$ を代入して

$$a=4-2\times\frac{3}{2}=\mathbf{1}, \quad b=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\mathbf{\frac{9}{4}} \qquad (答)$$

(3) (2) の考察より

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x+\frac{9}{4}\right)-(-x^2+2)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{\left(x+\frac{9}{4}\right)-(-x^2+4x)\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{2}{3}} \qquad (答)$$

【4】(1) 点 P, Q の x 座標を $p, q\ (p<q)$ とすると, $y'=2x$ より, 点 P, Q における接線の式は,

$$y=2p(x-p)+p^2=2px-p^2 \quad \cdots ①$$
$$y=2q(x-q)+q^2=2qx-q^2 \quad \cdots ②$$

①, ②より, y を消去すると,

$$2(p-q)x=p^2-q^2$$
$$\therefore \quad x=\frac{p+q}{2} \qquad (\because p\neq q)$$

①, ②の交点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)$ だから, 条件より,

$$\begin{cases} \dfrac{p+q}{2}=a \\ pq=a-1 \end{cases} \qquad \cdots ③$$

p, q は, t の 2 次方程式 $t^2-2at+a-1=0 \quad \cdots ④$ の 2 解であり,

④の判別式を D とすると, $\dfrac{D}{4}=a^2-(a-1)=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ なので, 任意の実数 a に対して異なる実数 p, q が存在する.

直線 PQ の式は,

$$y=\frac{q^2-p^2}{q-p}(x-p)+p^2=(p+q)x-pq$$

図 1 より,

$$S_1=\int_p^q\left\{(p+q)x-pq-x^2\right\}dx$$
$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx$$
$$=\frac{1}{6}(q-p)^3$$

③より,

$$(q-p)^2=(q+p)^2-4pq$$
$$=4(a^2-a+1)$$

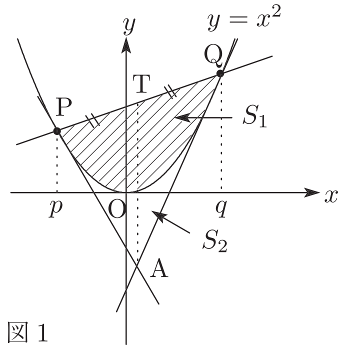


図 1

$$\therefore \quad S_1=\frac{1}{6}\{4(a^2-a+1)\}^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{4}{3}(a^2-a+1)^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 直線 $x=\dfrac{p+q}{2}$ と直線 PQ との交点 T とすると,

$$\mathrm{T}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

$$\triangle\,\mathrm{APQ}\text{ の面積}=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times\mathrm{AT}\times(q-p)$$
$$=\frac{1}{4}(q-p)^3 \qquad \left(\because \mathrm{AT}=\left|\frac{1}{2}(p^2+q^2)-pq\right|=\frac{1}{2}(q-p)^2\right)$$

$S_1=\dfrac{1}{6}(q-p)^3$ より, $S_2=\dfrac{1}{12}(q-p)^3$

$$\therefore \quad \frac{S_2}{S_1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (1) の考察より，a は任意の実数をとることができ，

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4}$$

$$S_1 \geqq \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ S_1の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ $\left(a = \dfrac{1}{2}\text{のとき}\right)$ (答)

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$ だから，k を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

と表すことができる．そして，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{k}{2}\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{s} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{t}\right)$$

であるが，ここで R は直線 PQ 上にあるから，

$$\frac{k}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right) = 1 \qquad \therefore \quad \frac{k}{2} \cdot 3 = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{2}{3}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}})} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \sin \angle \mathrm{AOB}$$

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| \sin \angle \mathrm{AOB}$$

$$= \frac{1}{2} s\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| t\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \sin \angle \mathrm{AOB}$$

$\triangle$ OAB=2 $\triangle$ OPQ に代入すると，

$$1 = 2st \qquad \therefore \quad st = \frac{1}{2}$$

また，$\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{t} = 3$ より，

$$\frac{t+s}{st} = 3 \qquad \therefore \quad s + t = \frac{3}{2}$$

よって，s，t を 2 解とする 2 次方程式は，

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

だから，これより

$$(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \therefore \quad x = 1,\ \frac{1}{2}$$

よって

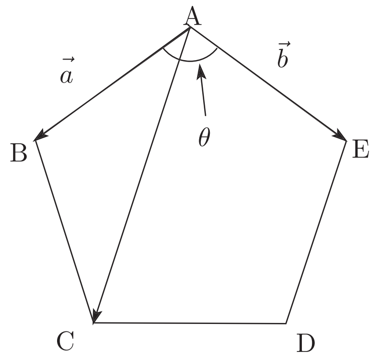
$$(s,\ t) = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(1,\ \frac{1}{2}\right)} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 正五角形の内角の和は

$180° \times (5-2) = 540°$

よって，求める θ は

$\theta = \dfrac{540°}{5} = \mathbf{108°}$　　(答)



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EC}}$

であり，正五角形の対称性より，

AB の中点と D を結ぶ直線に関して，

AB，EC はともに対称だから，

AB // EC

よって x を実数として，

$\overrightarrow{\mathrm{EC}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

と表せる．

ここで，△ CDE について余弦定理より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{ED}}\right|\cos\angle\mathrm{CDE} = \left|\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right|^2$$

$$\Longleftrightarrow \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{a}\right|^2\cos\theta = x^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{a}\right| \fallingdotseq 0$ だから，

$2(1-\cos\theta) = x^2$

$x > 0$ より，

$x = \sqrt{2(1-k)}$

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = x\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$

$= \boldsymbol{\sqrt{2(1-k)}\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}$　　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left|\overrightarrow{a}\right|^2\cos(180° - \theta)$

$= -\left|\overrightarrow{a}\right|^2 k$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ だから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$= \overrightarrow{a} \cdot \{(\sqrt{2(1-k)} - 1)\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\}$

$= (\sqrt{2(1-k)} - 1)\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$

$= (\sqrt{2(1-k)} - 1)\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 k$

よって，

$$-\left|\overrightarrow{a}\right|^2 k = (\sqrt{2(1-k)} - 1)\left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 k$$

$\therefore\ -k = (\sqrt{2(1-k)} - 1) + k$

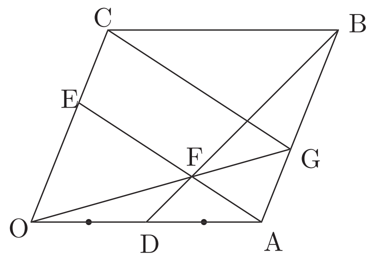
これより，

$4k^2 - 4k + 1 = 2(1-k)$　　$\therefore\ 4k^2 - 2k - 1 = 0$　　$\therefore\ k = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\cos 108° < 0$ だから

$k = \boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}$　　(答)

【3】(1) F は AE 上の点であるから，s を実数として



$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$
$$= s\overrightarrow{a} + \alpha(1-s)\overrightarrow{b} \quad \cdots①$$

とかける．一方，F は BD 上の点でもあるから，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\overrightarrow{\mathrm{OD}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{t}{2}\overrightarrow{a} + (1-t)(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$$
$$= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} \quad \cdots②$$

とかける．そして，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立なので，①，②より

$$s = 1 - \frac{t}{2}, \quad \alpha(1-s) = 1-t$$

2 式より s を消去すると

$$\alpha\left\{1 - \left(1 - \frac{t}{2}\right)\right\} = 1 - t \qquad \therefore \quad \left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)t = 1$$

よって, $t = \dfrac{2}{\alpha+2}$ となるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \boldsymbol{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\overrightarrow{a} + \frac{\alpha}{\alpha+2}\overrightarrow{b}} \qquad (答)$$

(2) G は OF 上の点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{k(\alpha+1)}{\alpha+2}\overrightarrow{a} + \frac{k\alpha}{\alpha+2}\overrightarrow{b} \quad \cdots③$$

と書ける．一方，G は AB 上の点でもあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{a} + u\overrightarrow{b} \quad \cdots④$$

そして，$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ は 1 次独立であるから，③，④より

$$\frac{k(\alpha+1)}{\alpha+2} = 1 \qquad \therefore \quad k = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

よって

$$u = \frac{\alpha}{\alpha+1} \qquad \therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{b}$$

次に

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}} = (1-\alpha)\overrightarrow{b}$$

すると, AG // EC であるから, AE // CG であることと，四角形 AGCE は平行四辺形となることは同値であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{EC}} \qquad \therefore \quad \frac{\alpha}{\alpha+1} = 1 - \alpha$$

これより

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となるが, $0 < \alpha < 1$ なので

$$\alpha = \boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad (答)$$

【4】 $\overrightarrow{a} = (\sin\theta,\ 0,\ 0)$
$\overrightarrow{b} = (0,\ \cos\theta,\ 0)$
$\overrightarrow{c} = (0,\ 0,\ 1)$
とする．$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，
$\sin\theta > 0,\ \cos\theta > 0$

(1) 点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{p})$ は平面 α 上にあるので，

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{c} + x\overrightarrow{\mathrm{CA}} + y\overrightarrow{\mathrm{CB}} \quad (x,\ y \text{ は実数})$$

とおけて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + (1-x-y)\overrightarrow{c} \quad \cdots(*)\\ &= (x\sin\theta,\ y\cos\theta,\ 1-x-y)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{p} \perp$ 平面 $\alpha \iff \overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ かつ $\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (\sin\theta,\ 0,\ -1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0,\ \cos\theta,\ -1)$$

より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = x\sin^2\theta - 1 + x + y = 0 & \cdots①\\ \overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = y\cos^2\theta - 1 + x + y = 0 & \cdots②\end{cases}$$

① − ② より，

$$x\sin^2\theta = y\cos^2\theta \iff y = x\tan^2\theta \quad \cdots③$$

③を①に代入して，

$$x\sin^2\theta - 1 + x + x\tan^2\theta = 0$$
$$\iff x = \frac{1}{1+\sin^2\theta+\tan^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1+\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad \cdots④$$

④を③に代入して，

$$y = \frac{\tan^2\theta}{1+\sin^2\theta+\tan^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta\sin^2\theta} \quad \cdots⑤$$

(∗), ④, ⑤ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}(\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{a} + \sin^2\theta\cdot\overrightarrow{b} + \sin^2\theta\cos^2\theta\cdot\overrightarrow{c})} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) (1) と，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} = 0,\ |\overrightarrow{a}| = \sin\theta,\ |\overrightarrow{b}| = \cos\theta,\ |\overrightarrow{c}| = 1$ より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 &= \frac{1}{(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)^2}(\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta + \sin^4\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta)\\ &= \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)^2}\cdot(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)\\ &= \boldsymbol{\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}} \quad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最大 $\iff$ $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ が最大だから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta} = 1 - \frac{1}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

よって，
$\sin^2\theta\cos^2\theta$ が最大のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ が最大である．

$\sin^2\theta\cos^2\theta = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\theta,\ 0^\circ < \theta < 90^\circ$ より,

$$\sin 2\theta = 1 \iff 2\theta = 90^\circ$$

$\iff \theta = 45^\circ$ のとき, $\sin^2\theta\cos^2\theta$ は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる.

最大値は $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{5}$ より,

$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$ **($\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$のとき)**　　(答)

問題

【1】$a,\ b,\ c$ は, 正の実数であるから, 相加・相乗平均の関係より

$$\frac{ab+1}{2} \geqq \sqrt{ab \cdot 1},\quad \frac{bc+1}{2} \geqq \sqrt{bc \cdot 1},\quad \frac{ca+1}{2} \geqq \sqrt{ca \cdot 1} \quad \cdots (*)$$

$$\therefore \quad ab+1 \geqq 2\sqrt{ab},\quad bc+1 \geqq 2\sqrt{bc},\quad ca+1 \geqq 2\sqrt{ca}$$

そして, 辺々の値はすべて正なので, 辺々の積をとると

$$(ab+1)(bc+1)(ca+1) \geqq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}$$

$$\therefore \quad (ab+1)(bc+1)(ca+1) \geqq 8abc$$

$$\therefore \quad \frac{abc}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)} \leqq \frac{1}{8}$$

また, $(*)$ の等号は

$ab=1$ かつ $bc=1$ かつ $ca=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=b=c=1$

のときに成り立つ.　(証終)

＜研究＞

等号成立条件

$ab=1$ かつ $bc=1$ かつ $ca=1 \quad \Longleftrightarrow \quad a=b=c=1$

はすぐにわかると思うが, 丁寧に求めると以下のようになる.

$$\begin{cases} ab=1 & \cdots ① \\ bc=1 & \cdots ② \\ ca=1 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ②の辺々をかけると

$ab^2c=1$

で, ③と合わせて

$b^2=1 \qquad \therefore \quad b=1 \quad (\because b>0)$

これと①, ②から

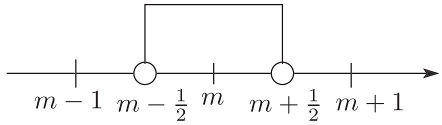
$a=1,\ c=1$

を得る.

【2】(1) 正の整数 m に対して,

$$\left(m \pm \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 \pm m + \frac{1}{4} \fallingdotseq (\text{整数})$$

である.



ゆえに, $a_k = m$ となるための条件は

$$m - \frac{1}{2} < \sqrt{k} < m + \frac{1}{2}$$

辺々 2 乗して

$$m^2 - m + \frac{1}{4} < k < m^2 + m + \frac{1}{4}$$

この範囲にある正の整数 k は

$$k = m^2 - m + 1,\ m^2 - m + 2,\ \cdots,\ m^2 + m$$

の

$$(m^2 + m) - (m^2 - m + 1) + 1 = 2m\ (\text{個})$$

ある. これより

$m = 1$ のとき, $k = 1,\ 2$
$m = 2$ のとき, $k = 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$m = 3$ のとき, $k = 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12$

すなわち

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2$$
$$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$$

となるから

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 = \mathbf{28} \qquad (\text{答})$$

(2) a_{2000} の値を求める. $a_{2000} = N$ とすると

$$2 + 4 + \cdots + 2(N-1) < 2000 \leqq 2 + 4 + \cdots + 2N$$
$$\iff (N-1)N < 2000 \leqq N(N+1)$$

であるが

$$44 \times 45 = 1980,\ 45 \times 46 = 2070$$

なので

$$N = 45$$

したがって, a_{2000} までの各項の分布は以下のようになる.

$$\underbrace{1\ 1}_{2\ 個}\,|\,\underbrace{2\ 2\ 2\ 2}_{4\ 個}\,|\ \cdots\,|\,\underbrace{44\ 44\ \cdots\ 44}_{88\ 個}\,|\ \underbrace{45\ 45\ \cdots\ 45}_{2000-1980=20\ 個}$$

これより

$$\sum_{k=1}^{2000} a_k = \sum_{m=1}^{44} m \cdot 2m + 45 \cdot 20$$
$$= \frac{1}{3} \times 44 \times 45 \times 89 + 45 \times 20 = \mathbf{59640} \qquad (\text{答})$$

【3】 $y=ax^2+bx+c \quad \cdots ①$

①が 2 点 A(1, 2), B(−2, 5) を通るから,

$2=a+b+c$
$5=4a-2b+c$

この 2 式から, b, c を a で表して,

$b=a-1,\ c=-2a+3$

よって, ①は,

$y=ax^2+(a-1)x-2a+3$

これを変形して,

$a(x^2+x-2)=x+y-3 \quad \cdots ②$

いま, ①は放物線を表しているから,

$a \neq 0$

で, この実数に対して, ②が成り立たないための条件は, 次の (i) または (ii) である.

(i) $x^2+x-2=0$ かつ $x+y-3 \neq 0$
(ii) $x^2+x-2 \neq 0$ かつ $x+y-3=0$

(i) のとき

$x^2+x-2=0 \iff (x+2)(x-1)=0$
$\therefore \quad x=-2,\ 1$

これと $y \neq -x+3$ から,

$x=-2$ のとき, $y \neq 5$
$x=1$ のとき, $y \neq 2$

つまり, まとめると,

直線 $x=-2$ [ただし, 点 (−2, 5) を除く]
直線 $x=1$ [ただし, 点 (1, 2) を除く]

(ii) のとき

直線 $y=-x+3$ [ただし, 点 (−2, 5), (1, 2) を除く]

以上から, 求める図形は,

$$\begin{cases} \textbf{3 直線 } \boldsymbol{x=-2,\ x=1,\ y=-x+3} \\ \textbf{ただし, 点 } \boldsymbol{(-2,\ 5),\ (1,\ 2)} \textbf{ は除く} \end{cases} \quad (答)$$

<参考>

本問は, "図示せよ"という問題ではないので作図の必要は特にないが, 結果を図示すれば, 図 1 の太線部分のようになる.

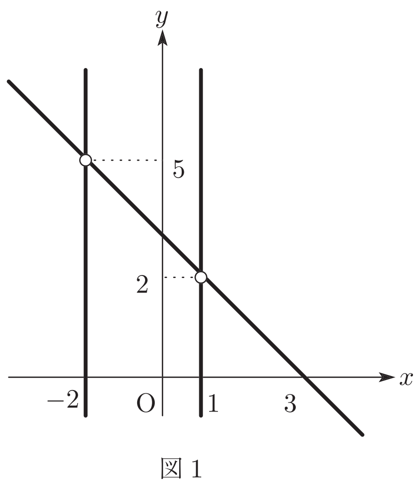


図 1

【4】(1) 先に 1 個ずつ各箱に入れると残った球は $h-k$ 個であり, これらは各箱に自由に入れることができる．この入れ方は k 種類のものから重複を許して $h-k$ 個取り出す重複組合せの数に一致するので, 求める入れ方の数は

$${}_k\mathrm{H}_{h-k}={}_{h-1}\mathrm{C}_{h-k}=\boldsymbol{\frac{(h-1)!}{(k-1)!(h-k)!}}\textbf{(通り)}\qquad\text{(答)}$$

(2) b の連の個数は 5 以下であり, また, a の連の個数と b の連の個数の差は 1 以下である．したがって, b の連の個数は以下のようになる．

$$\begin{cases}\boldsymbol{p=1}\text{のとき,}\ \mathbf{1,\ 2}\\ \boldsymbol{p=2}\text{のとき,}\ \mathbf{1,\ 2,\ 3}\\ \boldsymbol{p=3}\text{のとき,}\ \mathbf{2,\ 3,\ 4}\\ \boldsymbol{p=4}\text{のとき,}\ \mathbf{3,\ 4,\ 5}\\ \boldsymbol{p=5}\text{のとき,}\ \mathbf{4,\ 5}\\ \boldsymbol{p=6}\text{のとき,}\ \mathbf{5}\end{cases}\quad\text{(答)}$$

(3) まず, 順列は全体で

$$\frac{12!}{7!5!}=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792(\text{通り})$$

ある．このとき, 連の個数の和が 4 になるのは (2) の結果より a の連, b の連がともに 2 個となる場合である．そして, a の 1 つの連, b の 1 つの連をそれぞれ文字 A, B で置き換えると, これらは

ABAB,　BABA

の各場合となる．ここで, ABAB となる並べ方は, まず A については 7 個の同じ球を空箱が生じないように 2 つの箱に入れる方法の数なので, (1) より

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-2}={}_6\mathrm{C}_5=6(\text{通り})$$

B についても同様に

$${}_{5-1}\mathrm{C}_{5-2}={}_4\mathrm{C}_3=4(\text{通り})$$

あるので, ABAB となる並べ方は

$$6\cdot4=24(\text{通り})$$

BABA となる場合も同じなので, 連の個数の和が 4 となる確率は

$$\frac{24\cdot2}{792}=\mathbf{\frac{2}{33}}\qquad\text{(答)}$$

同様に, 連の個数の和が 7 になるのは

(a の連の個数, b の連の個数) $=(4,\ 3),\ (3,\ 4)$

すなわち

ABABABA,　BABABAB

の各場合である．よって, まず ABABABA となる並べ方の数は

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-4}\cdot{}_{5-1}\mathrm{C}_{5-3}={}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_2=20\cdot6=120(\text{通り})$$

また, BABABAB となる並べ方の数は

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-3}\cdot{}_{5-1}\mathrm{C}_{5-4}={}_6\mathrm{C}_4\cdot{}_4\mathrm{C}_1=15\cdot4=60(\text{通り})$$

よって, 連の個数の和が 7 となる確率は

$$\frac{120+60}{792}=\mathbf{\frac{5}{22}}\qquad\text{(答)}$$

また, 連の個数の和が 11 になるのは

$(a$ の連の個数, b の連の個数$) = (6,\ 5)$

すなわち, ABABABABABA となる場合となる. よって, この並べ方の数は

$${}_{7-1}\mathrm{C}_{7-6} \cdot {}_{5-1}\mathrm{C}_{5-5} = {}_{6}\mathrm{C}_{1} \cdot {}_{4}\mathrm{C}_{0} = 6 \cdot 1 = 6(\text{通り})$$

なので, 連の個数の和が 11 となる確率は

$$\frac{6}{792} = \boldsymbol{\frac{1}{132}} \qquad \text{(答)}$$

M3MB
難関大数学ⅠＡⅡＢ
難関大文系数学M

Z-KAI

会員番号		氏　名	

不許複製