本科２期９月度

解答

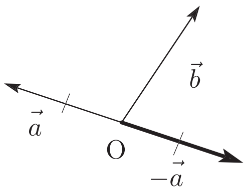
Ｚ会東大進学教室

高１難関大数学

１４章　ベクトル（１）

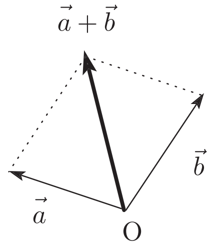
問題

【1】(1)



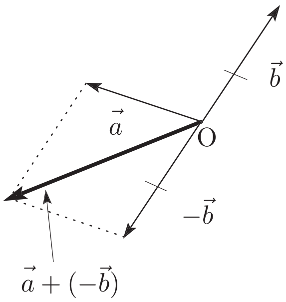
(答)

(2)



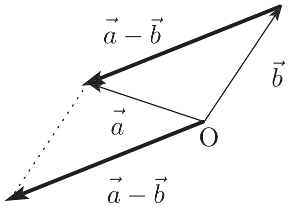
(答)

(3) ＜逆ベクトルから＞



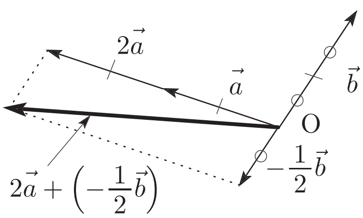
(答)

＜対角線から＞



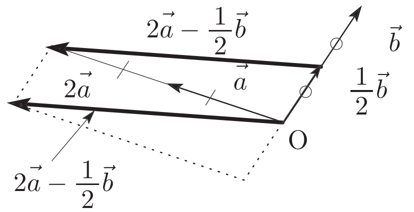
(答)

(4) ＜逆ベクトルから＞



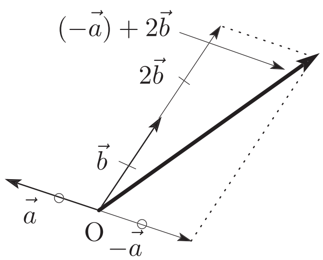
(答)

＜対角線から＞



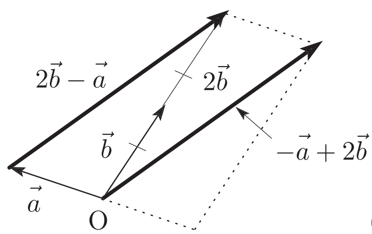
(答)

(5) ＜逆ベクトルから＞



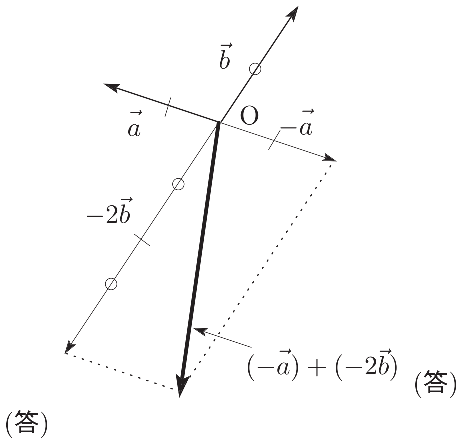
(答)

＜対角線から＞

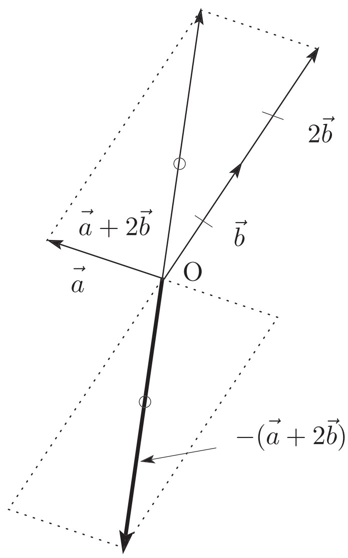


(答)

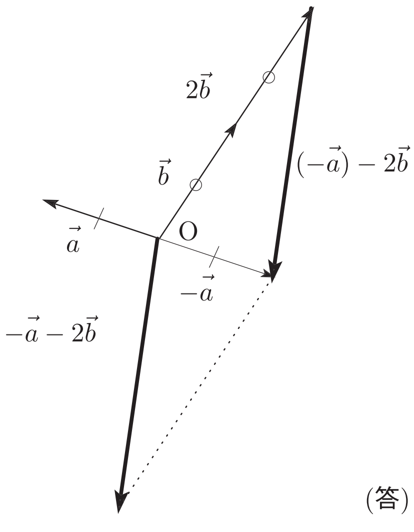
(6) ＜逆ベクトルから①＞



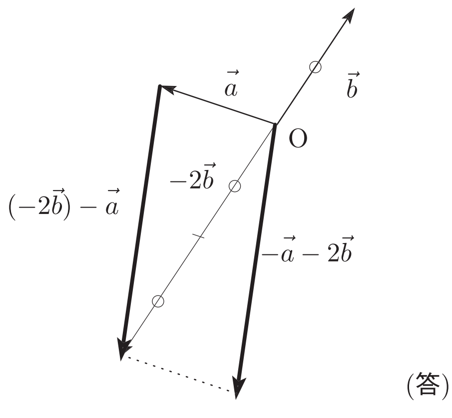
＜逆ベクトルから②＞



＜対角線から①＞



＜対角線から②＞



【2】(1) ［証明］

始点を A にそろえる．

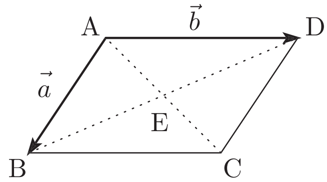
$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \vec{0} = (\text{右辺})\quad [\text{証明終}]\end{aligned}$$

(2) ［証明］

始点を A にそろえる．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = (\text{右辺})\quad [\text{証明終}]\end{aligned}$$

【3】(1)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

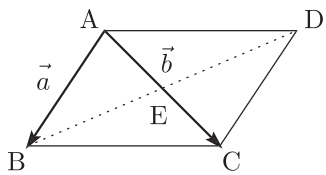
平行四辺形の 2 本の対角線の交点は，それぞれの対角線を 2 等分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad (\text{答})$$

(2)

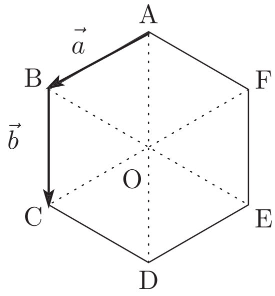


$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{a} \\ &= \boldsymbol{\vec{b} - 2\vec{a}} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

【4】正六角形の中心を O とする.

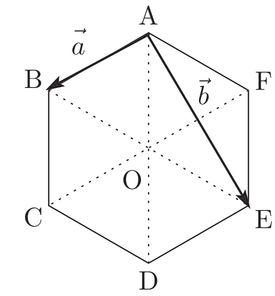
(1)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BO}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{2\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

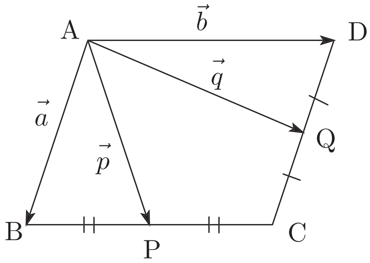
(2)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}\end{aligned}$$

【5】点 P，Q は，辺 BC，CD の中点であるから，



$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① $\times 2 -$ ② より

$$2\vec{p} - \vec{q} = \frac{3}{2}\vec{a} \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

① $-$ ② $\times 2$ より

$$\vec{p} - 2\vec{q} = -\frac{3}{2}\vec{b} \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

【6】ベクトルの成分を縦書きで表す．すなわち，$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ と表す．

(1)

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6\\6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{12}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

また，

$$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+12^2}=\boldsymbol{2\sqrt{37}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，　$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ より，
$\vec{a}$ に平行な単位ベクトルは，

$$\pm\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

$\vec{b}$ に平行な単位ベクトルは，

$$\pm\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

(3)

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2t\\3-2t\end{pmatrix}$$

であり，

$$\vec{a}+t\vec{b}\ /\!/\ \vec{c}\quad\Longleftrightarrow\quad\text{「}\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}\text{となる }0\text{ でない実数 }k\text{ が存在する」}\cdots(*)$$

ゆえに，k を実数として，

$$\begin{pmatrix}4+2t\\3-2t\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}4+2t=-2k & \cdots①\\3-2t=k & \cdots②\end{cases}$$

① + ② より，

$$-k=7\qquad\therefore\ k=-7$$

② より，

$$-2t=-7-3\qquad\therefore\ t=5$$

このとき $(*)$ はみたされるから，求める t の値は，　$\boldsymbol{t=5}$　　(答)

【7】(1)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$$

であり，

$$\begin{aligned}\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}\quad&\iff\quad\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\&\iff\quad\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\2x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

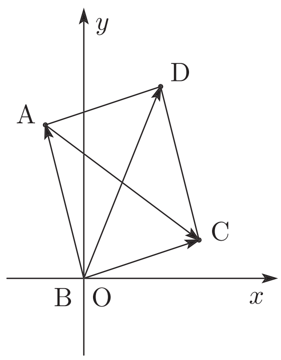
ゆえに

$$\begin{cases}11=x+2y & \cdots①\\10=2x+y & \cdots②\end{cases}$$

① × 2 − ② より，　$3y=12$　　$\therefore\ y=4$
② × 2 − ① より，　$3x=9$　　$\therefore\ x=3$
よって

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 4)}\qquad(答)$$

(2) B を原点として，平行四辺形 ABCD を図示すると右のようになる．



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\quad\cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\quad\cdots②$$

① + ② より，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\qquad(答)\end{aligned}$$

② − ① より，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}\qquad(答)\end{aligned}$$

【8】［証明］

「四角形 ABCD が平行四辺形である」 $\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$」を示す.

（$\Longrightarrow$ の証明）

与えられたベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表す.

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

（$\Longleftarrow$ の証明）

「四角形 ABCD が平行四辺形である」 $\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$」であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

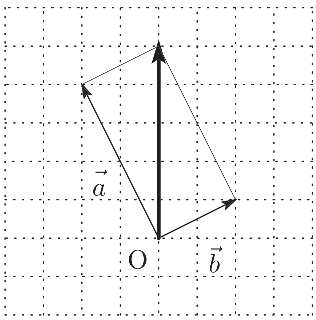
を示す.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\\iff&\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\\iff&\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\\iff&\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

以上より，題意は示された. ［証明終］

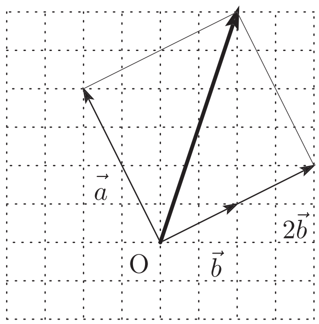
添削課題

【1】(1)



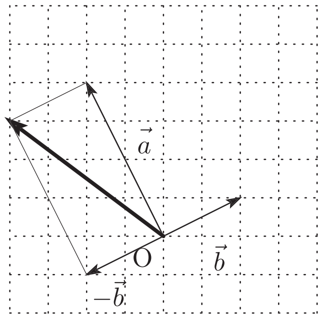
(答)

(2)



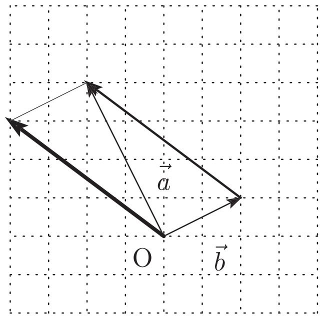
(答)

(3) 逆ベクトルから



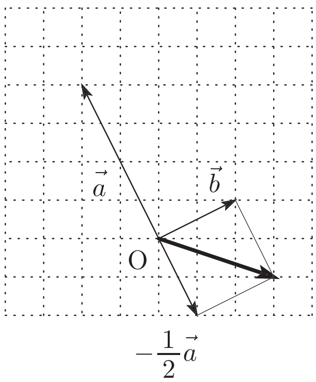
(答)

対角線から



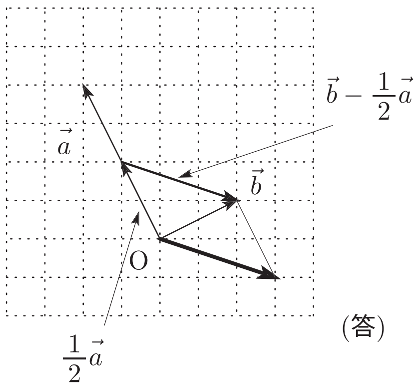
(答)

(4) 逆ベクトルから



(答)

対角線から



(答)

【2】(1) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(2\vec{a}-5\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}-4\vec{a}+10\vec{b}=\boldsymbol{-\vec{a}+4\vec{b}}$ (答)

(2)
$$\frac{1}{2}(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})+\frac{2}{3}(-\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c})$$
$$=\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{8}{3}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}+\frac{11}{6}\vec{c}}$$
(答)

【3】(1) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=2\overrightarrow{\mathrm{OF}}=2\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{-2\vec{a}}$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$ (答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

$=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}$ (答)

【4】［証明］

$$\begin{aligned}(\text{左辺})-(\text{右辺})&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}})-(\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}\\&=(\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{DB}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{DD}}=\vec{0}\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ ［証明終］

【5】(1)

$$
\begin{aligned}
3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c} &= 3\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\mathbf{8}\\\mathbf{-8}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

また，

$$
\left|3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}\right| = \sqrt{8^2+(-8)^2} = \mathbf{8\sqrt{2}} \qquad \text{(答)}
$$

(2) $k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{c}$ より，

$$
\begin{aligned}
k\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix}4k+2l\\2k-l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\\
&\iff \quad \begin{cases}4k+2l=6\\2k-l=5\end{cases}\\
&\quad\therefore \begin{cases}\boldsymbol{k=2}\\\boldsymbol{l=-1}\end{cases} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(3) m を 0 でない実数として，

$$
\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}
$$

とおけるから，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix}4+2t\\2-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6m\\5m\end{pmatrix}\\
&\iff \quad \begin{cases}4+2t=6m\\2-t=5m\end{cases}\\
&\quad\therefore \begin{cases}t=-\dfrac{1}{2}\\[2mm] m=\dfrac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}
$$

これは，$m \fallingdotseq 0$ をみたすので，$\boldsymbol{t=-\dfrac{1}{2}}$ (答)

問題

【1】 $\mathrm{AD}=2$, $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ であり，また，正六角形 ABCDEF は 1 辺の長さが 1 の 6 つの正三角形に分割される．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos 0^\circ=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\mathbf{1}$　(答)

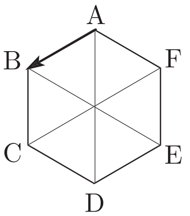
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos 30^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CF}}\right|\cos 120^\circ=2\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-2}$　(答)

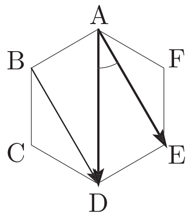
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right|\cos 120^\circ=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　(答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right|\cos 90^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot 0=\mathbf{0}$　(答)

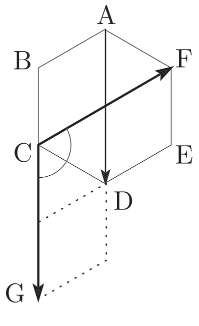
〔図 1〕



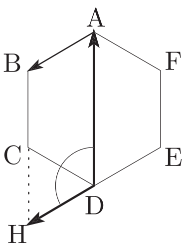
〔図 2〕



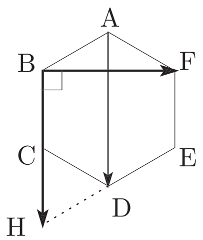
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【2】$\triangle$ABC は直角三角形であるから，$\mathrm{AC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=1$，また，$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{6}$ である．これより，$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BC}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$ (答)

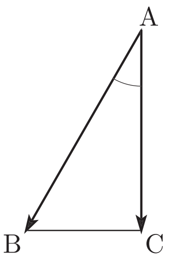
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos\dfrac{2}{3}\pi=2\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$ (答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1}$ (答)

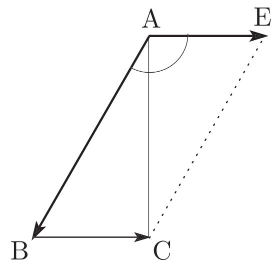
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\cos\dfrac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$ (答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot0=\mathbf{0}$ (答)

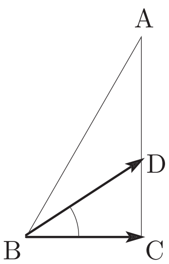
〔図 1〕



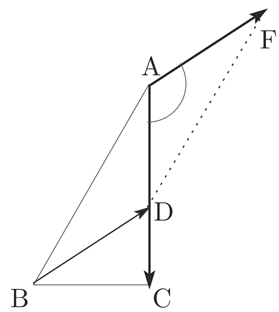
〔図 2〕



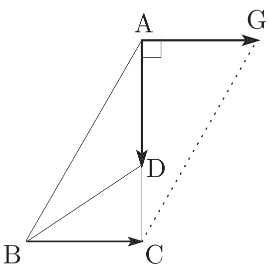
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【3】 (1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より，

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2t\\-3+t\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=(4+2t)^2+(-3+t)^2\\&=5t^2+10t+25\\&=5(t+1)^2+20\end{aligned}$$

よって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 20 をとる．このとき，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ も最小となる．

ゆえに，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は，

$\boldsymbol{t=-1}$のとき，最小値 $\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$ をとる．　　(答)

(2) (1) より $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|=\sqrt{5t^2+10t+25}$

また，

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}4+2t\\-3+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=8+4t-3+t=5t+5$$

条件より，

$$\begin{aligned}\frac{\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|}=\cos\frac{\pi}{4}\quad&\Longleftrightarrow\quad 5t+5=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{5t^2+10t+25}\sqrt{5}\right\}\\&\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}(t+1)=\sqrt{t^2+2t+5}\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，右辺は正であるから，左辺について

$$t+1>0\quad\Longleftrightarrow\quad t>-1$$

この条件のもとで ① の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}2(t+1)^2&=t^2+2t+5\\t^2+2t-3&=0\\(t+3)(t-1)&=0\end{aligned}$$

$t>-1$ を考え，

$\boldsymbol{t=1}$　　(答)

【4】(1) $\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|=4\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=32$$
$$16\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}=32$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$ より

$$24\vec{a}\cdot\vec{b}=16\cdot 2+9\cdot 8-32$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ が最小 $\iff$ $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ が最小であり，

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=\left|a\right|^2+t^2\left|b\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \cdots(*)$$

ここで，与えられた条件より $\left|\vec{a}\right|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求める．
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6$ の両辺を 2 乗して，

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=36$$
$$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=27 \quad (\because\ \left|\vec{b}\right|=3) \quad \cdots①$$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2$ の両辺を 2 乗して，

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$
$$\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-5 \quad (\because\ \left|\vec{b}\right|=3) \quad \cdots②$$

① + ② より

$$2\left|\vec{a}\right|^2=22 \qquad \therefore\ \left|\vec{a}\right|^2=11$$

① − ② より

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}=32 \qquad \therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=8$$

ゆえに $(*)$ について，

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=11+9t^2+16t$$
$$=9\left(t+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{35}{9}$$

よって，$t=-\frac{8}{9}$ のとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は最小となる．
したがって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ を最小にする t の値は，

$$\boldsymbol{t=-\frac{8}{9}} \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

ここで $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を α $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とすると,

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=-12+12=0 \qquad \therefore\ \alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(答)}$$

同様に,

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を β $(0\leqq\beta\leqq\pi)$ とすると,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=30-4=26$$

また,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{10^2+(-2)^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$
$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

であるから,

$$\cos\beta=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{26}{2\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \beta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\3+2t\end{pmatrix},\quad \vec{a}-t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\3-2t\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-t\vec{b}\right)=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2+t\\3+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-t\\3-2t\end{pmatrix}=0\\ &\Longleftrightarrow\quad 4-t^2+9-4t^2=0\\ &\Longleftrightarrow\quad 13-5t^2=0\end{aligned}$$

ゆえに

$$t=\pm\sqrt{\frac{13}{5}}=\pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【6】

ポイント

ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ である．
(2 つのベクトルの内積をとることで容易に証明できる)

(1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より，$\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．また，

$$\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

であるから，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{13}}}\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ より，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p+1=2 & \cdots ① \\ q+r=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

また，$\vec{x} /\!/ \vec{y}$ より，$\vec{x} = k\vec{y}$ となる 0 でない実数 k が存在する．ゆえに，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p=k & \cdots ③ \\ q=kr & \cdots ④ \end{cases}$$

① より $p=1$，③ より $k=1$．④ に代入して

$$q = r \quad \cdots ⑤$$

②，⑤ を連立して解いて

$$q = r = -\frac{1}{2}$$

以上より，

$$\boldsymbol{p=1,\ q=r=-\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ より，

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 2, \quad \left|\vec{y}\right| = \sqrt{1+r^2}$$

また，

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = 2r$$

であるから,

$$\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{y}\right|}=\cos 30^\circ \iff 2r=2\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\iff 2r=\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}$$

右辺は正であるから，左辺について $r>0$．この条件のもとで両辺を 2 乗して

$$4r^2=3(1+r^2) \iff r^2=3$$

$r>0$ を考え,

$$\boldsymbol{r=\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=2-1=\mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2)
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$
$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}$$

(3)
$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}} \quad (\because\ \sin\angle\mathrm{BAC}\geqq 0)$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}$$

(4)
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\angle\mathrm{BAC}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{10}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】与えられた条件は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \quad \cdots(*)$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\sqrt{2}$$

である．$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

この両辺を 2 乗して，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2&=\left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\ 4+1+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=2\\ \therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 1^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\\ &=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【9】(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad (\because\ 0<\theta<\pi\text{より}, \sin\theta>0) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \end{aligned}$$

［証明終］

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする．(1) の結果より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right| \end{aligned}$$

［証明終］

添削課題

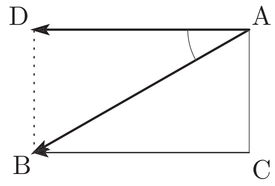
【1】 $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{BC}=\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ である.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos 30^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|\cos 90^\circ=1\cdot\sqrt{3}\cdot 0=\mathbf{0}$ (答)

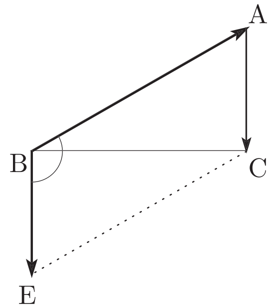
(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos 30^\circ\\&=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\mathbf{3}\quad(答)\end{aligned}$$



(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|\cos 120^\circ\\&=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\mathbf{-1}\quad(答)\end{aligned}$$



【2】 $\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形より, $\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$

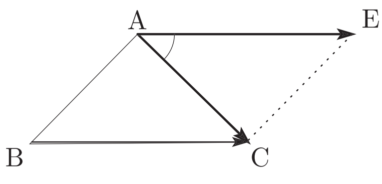
したがって, $\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{DAC}=45^\circ$ となる.

これより, $\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=\sqrt{2}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos 45^\circ=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{4}$ (答)

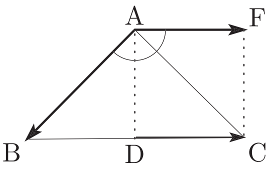
(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos 45^\circ\\&=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\mathbf{4}\quad(答)\end{aligned}$$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos 45^\circ=2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}$ (答)

(4) $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\cos 135^\circ\\&=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=\mathbf{-2}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$



【3】(1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{7}$ の両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(\sqrt{7})^2\quad&\Longleftrightarrow\quad\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=7\\&\Longleftrightarrow\quad 4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7\\&\Longleftrightarrow\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{6}\qquad(\text{答})\end{aligned}$$

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とすると,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{6}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから,

$\theta=\mathbf{30^\circ}$ (答)

(3) $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$ より,

$$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=4^2-4\cdot 6+4\cdot(\sqrt{3})^2=4$$

$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|\geqq 0$ より,

$\therefore\ \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\mathbf{2}$ (答)

【4】$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b}) = 0$ であればよいので,

$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b}) = 0 \quad &\iff \quad \left|\vec{a}\right|^2 + (2+t)\vec{a}\cdot\vec{b} + 2t\left|\vec{b}\right|^2 = 0\\ &\iff \quad 1^2 + (2+t)\cdot\frac{1}{2} + 2t\cdot 1^2 = 0\\ &\iff \quad \frac{5}{2}t + 2 = 0\\ &\qquad\ \therefore\ \boldsymbol{t = -\frac{4}{5}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 = \mathbf{5} \qquad \text{(答)}$$

また,

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}\right| &= \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}\\ \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

より,$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とおくと,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって,$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より,　$\theta = \mathbf{45^\circ}$　(答)

(2)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(\sqrt{3}-1) + (-2)\cdot(\sqrt{3}+1) = \mathbf{-4} \qquad \text{(答)}$$

また,

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}\right| &= \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}\\ \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

より,$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とおくと,

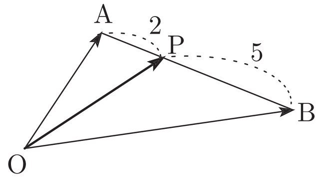
$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

よって,$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より,　$\theta = \mathbf{120^\circ}$　(答)

問題

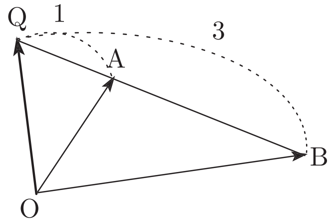
【1】位置ベクトルの基準点を O とし，求める点をそれぞれ，$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする．

(1) 右の図で AP: PB= 2: 5 より，



$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+5}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}\qquad\text{(答)}$$

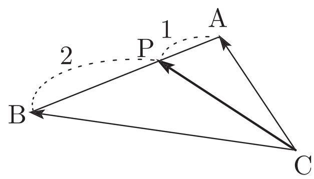
(2) 右の図で AQ: QB = 1: 3 より，



$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=\frac{(-3)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1-3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}\qquad\text{(答)}$$

【2】(1)

$$\vec{p}=\frac{2\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+2}$$

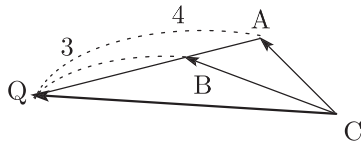


であるから，$\mathrm{P}(\vec{p})$ は

線分 AB を 1 : 2 に内分する点　(答)

(2)

$$\vec{q}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4+(-3)}$$

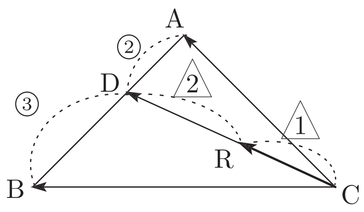


であるから，$\mathrm{Q}(\vec{q})$ は

線分 AB を 4 : 3 に外分する点　(答)

(3)

$$\vec{r}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{15}$$
$$=\frac{5}{15}\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}$$



であるから，$\mathrm{R}(\vec{r})$ は

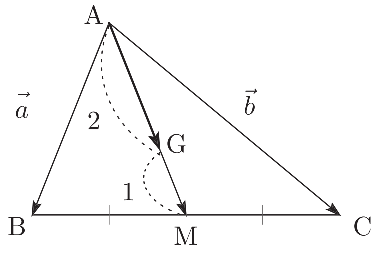
線分 AB を 2 : 3 に内分する点を D としたとき，
線分 CD を 1 : 2 に内分する点　(答)

【3】辺 BC の中点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

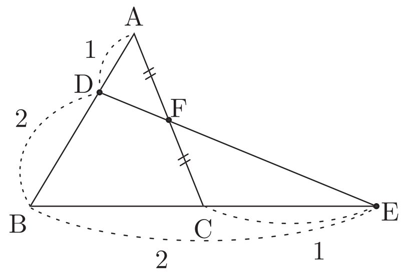
であり，また重心 G は AM を 2: 1 に内分する点であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$



【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \frac{2}{3}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BE}} = 2\vec{c}$$



であるから，

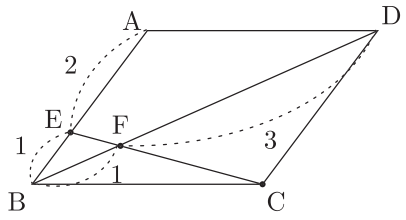
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{BE}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= 2\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BF}} - \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{6}\vec{a} \\ &= \frac{1}{4}\left(2\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 D，E，F は同一直線上にある． ［証明終］

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくと,



$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{3\vec{b}+\vec{d}}{4}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}+\vec{d}$$

よって

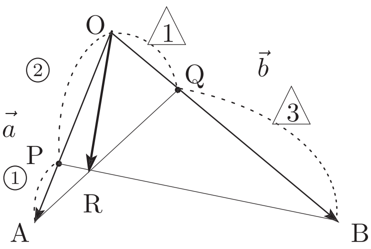
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\frac{3\vec{b}+\vec{d}}{4}-\frac{2}{3}\vec{b}\\&=\frac{1}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\vec{b}+\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{b}\\&=\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}\\&=4\left(\frac{1}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)\\&=4\overrightarrow{\mathrm{EF}}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 C, E, F は同一直線上にある. ［証明終］

【5】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とする.



3 点 P, R, B が共線であるから,

$$\mathrm{PR} : \mathrm{RB} = s : (1-s) \quad (s \text{ は実数})$$

とおくと, $\vec{p}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$ であり,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (1-s)\vec{p}+s\vec{b}\\ &= \frac{2}{3}(1-s)\vec{a}+s\vec{b} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また, 3 点 A, R, Q が共線であるから,

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RQ} = t : (1-t) \quad (t \text{ は実数})$$

とおくと, $\vec{q}=\dfrac{1}{4}\vec{b}$ であり,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (1-t)\vec{a}+t\vec{q}\\ &= (1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

ここで, $\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから, ①, ② の係数を比較して,

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}(1-s)=1-t\\ s=\dfrac{1}{4}t\end{cases}$$

これを解いて,

$$s=\frac{1}{10},\ t=\frac{2}{5}$$

② に代入して,

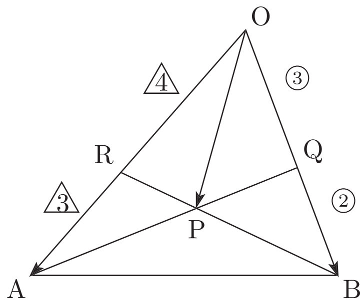
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

(2) (1) の結果より

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RQ} = t : (1-t) = \frac{2}{5} : \frac{3}{5} = \mathbf{2 : 3} \qquad (\text{答})$$

【6】 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{5}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{4}{7}\vec{a}$$



である.

3 点 A,P,Q は共線であるから,

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=s:(1-s)\quad (s \text{ は実数})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\quad \cdots①\end{aligned}$$

また, 3 点 B,P,R は共線であるから,

$$\mathrm{RP}:\mathrm{PB}=t:(1-t)\quad (t \text{ は実数})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=\frac{4}{7}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\quad \cdots②\end{aligned}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから, ①, ② の係数を比較して

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{4}{7}(1-t)\\ \dfrac{3}{5}s=t\end{cases}$$

これを解いて,

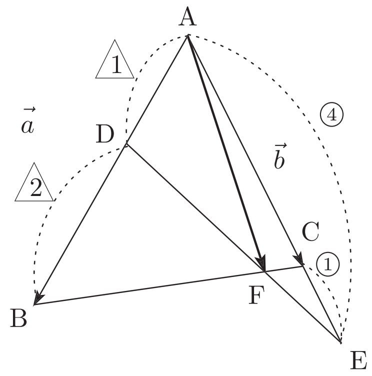
$$s=\frac{15}{23},\quad t=\frac{9}{23}$$

① に代入して,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{23}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{23}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\qquad (\text{答})$$

【7】(1) 3 点 D($\vec{d}$)，F($\vec{f}$)，E($\vec{e}$) が共線であるから，

$$\mathrm{DF} : \mathrm{FE} = t : (1-t) \qquad (t\text{ は実数})$$



とおくと，$\vec{d} = \dfrac{1}{3}\vec{a}$，$\vec{e} = \dfrac{4}{3}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{f} &= (1-t)\vec{d} + t\vec{e}\\ &= \frac{1}{3}(1-t)\vec{a} + \frac{4}{3}t\vec{b} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また，3 点 B($\vec{a}$)，F($\vec{f}$)，C($\vec{b}$) が共線であるから，

$$\frac{1}{3}(1-t) + \frac{4}{3}t = 1$$

$$\therefore\ t = \frac{2}{3}$$

① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \boldsymbol{\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

(2) (1) の結果より

$$\mathrm{DF} : \mathrm{FE} = t : (1-t) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \mathbf{2 : 1} \qquad (\text{答})$$

(3) (1) の結果より

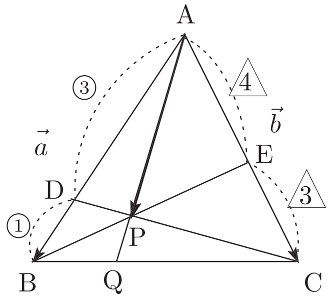
辺 BC を 8 : 1 に内分する点　　(答)

【8】3 点 D，P，C が共線であるから，

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PC} = s : (1-s) \qquad (s \text{ は実数})$$

として，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots ① \\
&= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{4}s\overrightarrow{\mathrm{AE}}
\end{aligned}$$



3 点 B，P，E が共線であるから，

$$\frac{3}{4}(1-s) + \frac{7}{4}s = 1$$

これを解いて

$$s = \frac{1}{4}$$

① に代入して

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \frac{9}{16}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}
\end{aligned}$$

また 3 点 A，P，Q が共線であるから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AQ}} &= k\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\
&= \frac{9}{16}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}
\end{aligned}$$

3 点 B，Q，C が共線であるから

$$\frac{9}{16}k + \frac{1}{4}k = 1$$

これを解いて

$$k = \frac{16}{13}$$

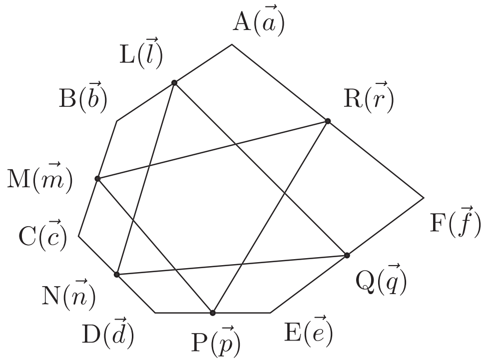
ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{13}{16}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

以上より，

点 Q は **BC を 4 : 9** に内分する点　　(答)
点 P は **AQ を 13 : 3** に内分する点　　(答)

【9】点 A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), ..., F($\vec{f}$),
点 L($\vec{l}$), M($\vec{m}$), ..., R($\vec{r}$),
G($\vec{g}$), H($\vec{h}$) とする.



$$\vec{l} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \vec{q} = \frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{\vec{l}+\vec{n}+\vec{q}}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}+\frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right)\\ &= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}\end{aligned}$$

また

$$\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{p} = \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \vec{r} = \frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \frac{\vec{m}+\vec{p}+\vec{r}}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}\right)\\ &= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}\end{aligned}$$

以上より, $\vec{g} = \vec{h}$ となり, 点 G と点 H は一致する. ［証明終］

添削課題

【1】(1) $\vec{p} = \dfrac{1 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}}{2+1} = \boldsymbol{\dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}}$ (答)

(2) $\vec{q} = \dfrac{-3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b}}{5-3} = \boldsymbol{\dfrac{-3\vec{a} + 5\vec{b}}{2}}$ (答)

【2】$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d}$ とする.

(1)

$$\vec{c} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{1+2} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

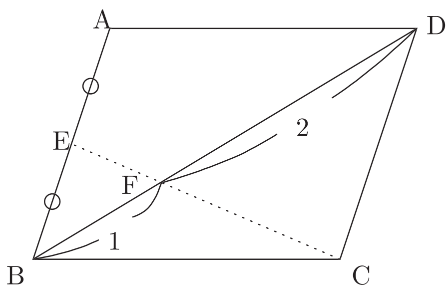
よって，$\mathbf{C(-2,\ 5)}$ (答)

(2)

$$\vec{d} = \frac{-\vec{a} + 3\vec{b}}{3-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{D\left(5,\ \dfrac{3}{2}\right)}$ (答)

【3】(1)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}} &= \overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= \frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}}{1+2} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{EC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{EF}}$$

であるから，3 点 E，F，C は同一直線上にある.　［証明終］

【4】(1) 与式より

$$\vec{a} - \vec{p} + 2\left(\vec{b} - \vec{p}\right) + 3\left(\vec{c} - \vec{p}\right) = \vec{a} - \vec{c}$$

$$\therefore\ 6\vec{p} = 2\vec{b} + 4\vec{c}$$

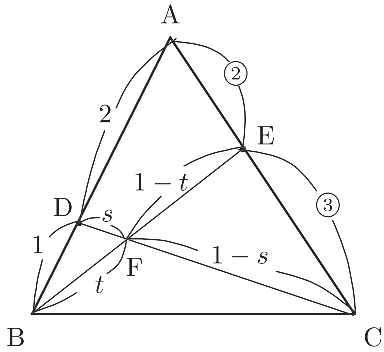
$$\therefore\ \vec{p} = \boldsymbol{\frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}} \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より，点 P は

辺 BC を 2 : 1 に内分する点　(答)

である.

【5】



$$\mathrm{DF} : \mathrm{FC} = s : (1-s)$$
$$\mathrm{BF} : \mathrm{FE} = t : (1-t)$$

とすれば，C，F，D に注目して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= (1-s)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots①\end{aligned}$$

B，F，E に注目して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots②\end{aligned}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立であることと，①，② から

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}(1-s) = 1-t & \cdots③ \\ s = \dfrac{2}{5}t & \cdots④ \end{cases}$$

③，④ を連立して解けば，$(s,\ t) = \left(\dfrac{2}{11},\ \dfrac{5}{11}\right)$

これを ② に代入して，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{6}{11}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \qquad \text{(答)}$$

M1T

高 1 難関大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	