M2T

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学

問題

【1】(1)

$$2^{x+2y}=64=2^6 \qquad \therefore\quad x+2y=6$$
$$3^{x-y}=27=3^3 \qquad \therefore\quad x-y=3$$

これを解いて，$x=4$，$y=1$　　(答)

(2) $2^{-\frac{x}{2}}$ を t とおくと，

$$2^{1-x}=2\cdot(2^{-\frac{x}{2}})^2=2t^2,\ 2^{-1-\frac{x}{2}}=2^{-1}\cdot 2^{-\frac{x}{2}}=\frac{t}{2}$$

であるから，与式は，

$$2t^2-\frac{9}{2}t+1=0$$
$$\therefore\quad 4t^2-9t+2=0 \qquad \therefore\quad (4t-1)(t-2)=0$$
$$\therefore\quad t=2^{-\frac{x}{2}}=2,\ t=2^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}=2^{-2}$$
$$\therefore\quad x=-2,\ x=4 \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数は正だから，

$$x-1>0,\ x+1>0,\ 7-2x>0 \qquad \therefore\quad 1<x<\frac{7}{2} \quad \cdots ①$$

与式を整理して，

$$\log_a(x-1)(x+1)>\log_a(7-2x)$$

ここで底 a に注意する．

(i) $a>1$ のときは，

$$(x-1)(x+1)>7-2x \qquad \therefore\quad x^2+2x-8=(x+4)(x-2)>0$$

これと ① より，$2<x<\dfrac{7}{2}$

(ii) $1>a>0$ のときは，不等号の向きが逆になり，$1<x<2$

まとめて，

$$a>1:\quad 2<x<\frac{7}{2}$$
$$1>a>0:\quad 1<x<2 \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 題意より

$$f(x)=6\left(2^x+2^{-x}\right)-2\left(4^x+4^{-x}\right)$$

において

$$2^x+2^{-x}=t \quad \cdots ①$$

とおくと

$$4^x+4^{-x}=\left(2^x+2^{-x}\right)^2-2=t^2-2$$

となるので

$$f(x)=6t-2\left(t^2-2\right)=-2t^2+6t+4 \quad \cdots ② \qquad \text{(答)}$$

(2) ①において，$2^x>0,\ 2^{-x}>0$ だから,「相加・相乗平均の関係」より

$$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

等号成立は

$$2^x=2^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2x}=1$$

$$\therefore \quad x=0$$

のときだから

$$t\geqq 2 \qquad \text{(答)}$$

(3) ②より

$$g(t)=-2t^2+6t+4=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$$

とおくと，(2) より，$t\geqq 2$ だから

$$(f(x)\ \text{の最大値})=g(2)=8 \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\log_2 x = t$ とおくと

$$\log_2 8x = \log_2 2^3 + \log_2 x = t+3$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x} = -\frac{1}{2}\log_2 2x = -\frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 x) = -\frac{1}{2}(t+1)$$

と表されることから

$$\begin{aligned} g(x) &= (t+3)^2 - 2\left\{-\frac{1}{2}(t+1)\right\} \\ &= t^2+7t+10 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) あらためて

$$g(x) = f(t) = t^2+7t+10$$

とおく．ここで

$$\frac{1}{16} \leqq x \leqq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leqq \log_2 x \leqq 0$$

であるから，$g(x)$ のとり得る値の範囲は，
$f(t)$ の $-4 \leqq t \leqq 0$ における値域に一致する．

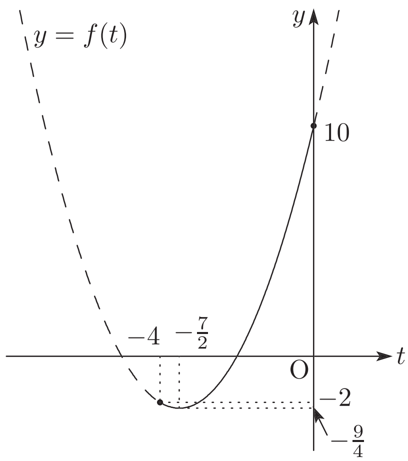
$$f(t) = \left(t+\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \quad (-4 \leqq t \leqq 0)$$

と変形されることから

$$-\frac{9}{4} \leqq f(t) \leqq 10$$

よって

$$-\frac{9}{4} \leqq g(x) \leqq 10 \qquad \text{(答)}$$



【4】(1) $N = 2^{40}$ とおく.

$$\log_{10} N = 40 \times \log_{10} 2 = 40 \times 0.3010 = 12.04$$

$$\therefore \quad 10^{12} \leqq 2^{40} < 10^{13}$$

よって

13 桁　　(答)

(2)

$$\log 6^{-10} = -10(\log 2 + \log 3) = -7.781 = -8 + 0.218$$

よって，小数第 8 位にはじめて 0 でない数字があらわれる.　　(答)

【5】a，b，c は正であるから，条件式の各辺の常用対数をとり，

$$\log a = A,\ \log b = B,\ \log c = C$$

とおくと，$\log 1 = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0 \quad \cdots ① \\ Ay + Bz + Cx &= 0 \quad \cdots ② \\ Az + Bx + Cy &= 0 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

ところで,「a，b，c のうち少なくとも 1 つは 1 ではない」ということは,「A，B，C のうち少なくとも 1 つは 0 ではない」ということで，$a \neq 1$ すなわち $A \neq 0$ としておこう ($B \neq 0$，$C \neq 0$ としても同様).
① + ② + ③ より，

$$(x+y+z)(A+B+C) = 0 \qquad \therefore \quad x+y+z = 0 \text{ または } A+B+C = 0$$

したがって，$(A+B+C=0) \Rightarrow (x=y=z)$ がいえればよい．

$$A+B+C = 0 \Rightarrow C = -(A+B)$$

これを ①，② に入れて，

$$\begin{aligned} ①: A(x-z) + B(y-z) &= 0 \quad \cdots ④ \\ ②: A(x-y) + B(x-z) &= 0 \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

④ $\times (x-z) -$ ⑤ $\times (y-z)$ より，

$$A\{(x-z)^2 - (x-y)(y-z)\} = 0$$

$A \neq 0$ としてあるから，

$$(x-z)^2 - (x-y)(y-z) = 0 \qquad \therefore \quad x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy = 0$$

これを変形して，

$$\frac{1}{2}\{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2\} = 0$$

x，y，z は実数であるから $(y-z)^2 \geqq 0$，$(z-x)^2 \geqq 0$，$(x-y)^2 \geqq 0$ で，上の等式が成立するのは，

$$x = y = z$$

のとき．$B \neq 0$ または $C \neq 0$ としても同様にして $x=y=z$ が得られる．

【6】真数と底の条件より,

$$x > 0,\ x \neq 1,\ y > 0,\ xy \neq 1 \quad \cdots ①$$

両辺を常用対数になおして, $\log x = X$, $\log y = Y$ とおくと,

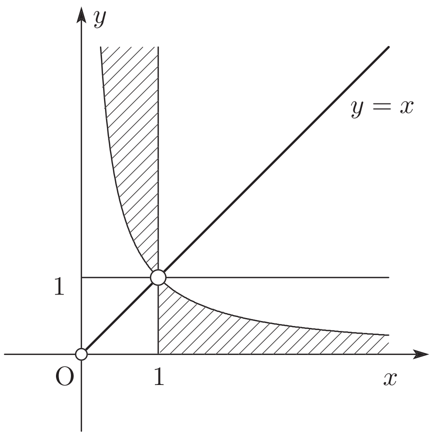
$$\frac{X+Y}{X} \leqq \frac{4Y}{X+Y} \qquad \therefore \quad \frac{(X-Y)^2}{X(X+Y)} \leqq 0$$

(i) $X = Y$ のときは, $x = y$

(ii) $X \neq Y (x \neq y)$ のときは, $(X-Y)^2 > 0$ であるから,

$$X(X+Y) = (\log x)(\log xy) < 0$$
$$\therefore \quad (0 < x < 1,\ 1 < xy) \text{ または } (1 < x,\ 0 < xy < 1)$$

で, (i), (ii) と ① より点 (x, y) の存在範囲は図の斜線部分 (境界は除く) と, 半直線 $y = x (x > 0,\ x \neq 1)$ である.　　　(答)



問題

【1】(1) 重心は,

$$\left(\frac{0-4+2}{3}, \frac{3+0+0}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) $\triangle$ABC の各辺の長さは,

$$\mathrm{AB}=5, \quad \mathrm{BC}=6, \quad \mathrm{CA}=\sqrt{13}$$

$\triangle$ABC の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 9$$

である．内接円の半径を r とおくと,

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}(5+6+\sqrt{13})r = 9 \quad \therefore \quad r = \frac{11-\sqrt{13}}{6} \quad \cdots ①$$

$\angle$ABC の二等分線と AC の交点を D とおくと，$\triangle$BAC において

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DC} = \mathrm{BA}:\mathrm{BC} = 5:6$$

よって，D は AC を 5:6 に内分する点であるから,

$$\mathrm{D}\left(\frac{10}{11}, \frac{18}{11}\right)$$

となり，直線 BD は,

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad \cdots ②$$

①，② より，求める内心は直線 BD 上で $y = \dfrac{11-\sqrt{13}}{6}$ となる点なので,

$$\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{11-\sqrt{13}}{6}\right) \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 直線 OA の方程式は

$$y = \frac{1}{3}x \quad \cdots ①$$

点 B の対称点を $\mathrm{B}'(a,\ b)$ とおくと (図 1)

$$\mathrm{BB}' \perp \mathrm{OA}$$

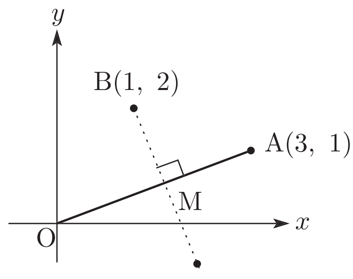


図 1

よって，垂直条件より

$$\frac{2-b}{1-a} \cdot \frac{1}{3} = -1 \qquad \therefore \quad 3a + b = 5 \quad \cdots ②$$

BB' の中点を M とおくと，M の座標は

$$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$$

であり，M は直線 OA 上にあるので，①に代入して

$$\frac{b+2}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a - 3b = 5 \quad \cdots ③$$

②, ③より

$$a = 2,\ b = -1$$

よって, 求める座標は

$(2,\ -1)$ 　　(答)

(2) $\angle$AOB の二等分線と AB の交点を C とおく (図 2).
$\triangle$ OAB において

$$\begin{aligned} \mathrm{AC : BC} &= \mathrm{OA : OB} \\ &= \sqrt{3^2+1^2} : \sqrt{1^2+2^2} \\ &= \sqrt{2} : 1 \end{aligned}$$

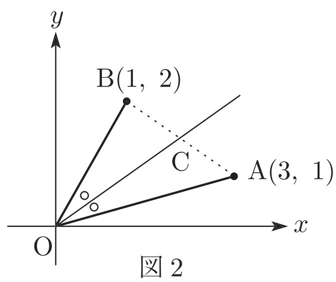


図 2

これより，点 C は AB を $\sqrt{2} : 1$ に内分する点であるから

$$\mathrm{C}\left(\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1},\ \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)$$

よって，OC の傾きは

$$\frac{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}}{\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{5\sqrt{2}-1}{7} \qquad \text{(答)}$$

【3】外心を $\mathrm{O}(a,\ b)$ とおくと，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ より

$$(8-a)^2+(4-b)^2=(3-a)^2+(-1-b)^2=(6-a)^2+(8-b)^2$$

これより

$$\begin{cases} a^2-16a+64+b^2-8b+16=a^2-6a+9+b^2+2b+1 \\ a^2-16a+64+b^2-8b+16=a^2-12a+36+b^2-16b+64 \end{cases}$$

整理して

$$\begin{cases} 10a+10b=70 \\ 4a-8b=-20 \end{cases}$$

よって

$$a=3,\ b=4 \qquad \therefore\ \ 外心\ (3,\ 4)$$

外接円の半径 OA (=OB=OC) を求めると

$$\mathrm{OA}=\sqrt{(8-3)^2+(4-4)^2}=5$$
$$\therefore\ \ 外接円の方程式 : (x-3)^2+(y-4)^2=25$$

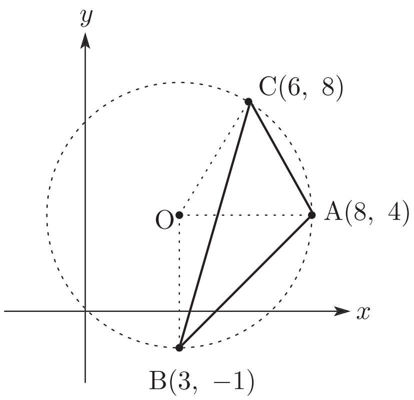


図 1

＜別解＞

AC の中点を M，AB の中点を N とおくと

$$\mathrm{M}:\left(\frac{8+6}{2},\ \frac{4+8}{2}\right)=(7,\ 6)$$
$$\mathrm{N}:\left(\frac{8+3}{2},\ \frac{4-1}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

ここで，AC の傾きは

$$\frac{4-8}{8-6}=-2$$

であるから，M を通り，AC に垂直な直線は

$$y-6=\frac{1}{2}(x-7) \qquad \therefore\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \quad \cdots①$$

また，AB の傾きは

$$\frac{4+1}{8-3}=1$$

であるから，N を通り，AB に垂直な直線は

$$y-\frac{3}{2}=-\left(x-\frac{11}{2}\right)$$

$$\therefore\quad y=-x+7 \quad \cdots②$$

①，②の交点が△ ABC の外心なので (図 2)

$$\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=-x+7$$
$$\therefore\quad x=3,\ y=4 \qquad \therefore\quad 外心\ (3,\ 4)$$

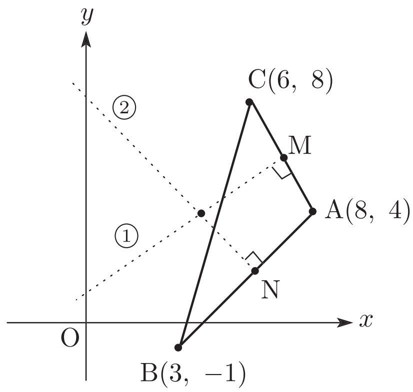


図 2

以下，解答と同様.

【4】 $x+3y-2=0 \quad \cdots ①,\ x+y=0 \quad \cdots ②,\ ax-2y+4=0 \quad \cdots ③$

とおく. 題意を満たす条件は,
(i) 少なくとも 2 直線が平行, または一致するとき
(ii)3 直線が一点で交わるとき
の 2 通りが考えられる.

(i) 少なくとも 2 直線が平行または, 一致するとき, ①, ②は平行な直線ではない.
①と③の傾きが等しいとき,

$$-\frac{1}{3}=\frac{a}{2} \qquad \therefore \quad a=-\frac{2}{3}$$

②と③の傾きが等しいとき,

$$-1=\frac{a}{2} \qquad \therefore \quad a=-2$$

(ii) 3 直線が一点で交わるとき, ① と ② の交点は,

① − ②より $y=1$ なので,$(-1,1)$

この交点を ③ が通るので,

$$a\cdot(-1)-2\cdot 1+4=0 \qquad \therefore \quad a=2$$

以上より,

$$a=2, \quad -\frac{2}{3}, \quad -2 \qquad \text{(答)}$$

【5】(1) $(*)$ より

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-6x-10y+k=0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-3)^2+(y-5)^2=34-k \end{aligned}$$

となるので，題意をみたすためには

$$34-k \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \leqq 34 \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) より

(i) $k=34$ のとき

$(*)$ より

$$(x-3)^2+(y-5)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3,\ y=5$$

となり，点 $(3,\ 5)$ を表すので，題意をみたす.

(ii) $k<34$ のとき

$(*)$ は

中心 $(3,\ 5)$，半径$\sqrt{34-k}$の円

を表すので，題意をみたすための条件は

$$0<\sqrt{34-k}<3$$

だから，両辺を 2 乗して

$$0<34-k<9 \quad \Leftrightarrow \quad 25<k<34$$

よって，(i)，(ii) より

$$25<k \leqq 34 \qquad \text{(答)}$$

添削課題

【1】(1) 半径を r , 中心の座標を t を媒介変数として $(t,\ 2t+1)$ とすると

$$(x-t)^2+(y-2t-1)^2=r^2$$

これが, 原点および $(4,\ 1)$ を通るので

$$(-t)^2+(-2t-1)^2=r^2 \qquad \cdots ①$$
$$(4-t)^2+(1-2t-1)^2=r^2 \qquad \cdots ②$$

①, ②より

$$5t^2+4t+1=5t^2-8t+16 \qquad \therefore \quad t=\frac{5}{4}$$

よって

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}-1\right)^2=\left(-\frac{5}{4}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}-1\right)^2$$
$$\therefore \quad \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{221}{16} \qquad \text{(答)}$$

(2) 曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 上の点は $\left(t,\ \dfrac{1}{3}t^2\right)$ と表せる. この点を中心とした円が両軸に接するのだから (図 1)

$$\frac{1}{3}t^2=|t| \qquad \therefore \quad t^2=\pm 3t$$

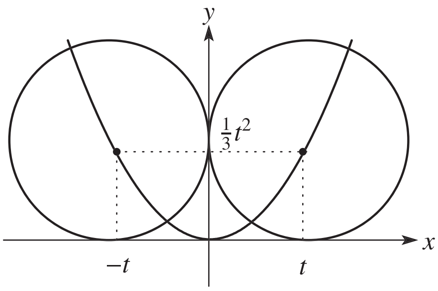


図 1

$t=0$ は題意に適さないので

$$t=\pm 3$$

よって, 求める円の方程式は

$$(y-3)^2+(x\pm 3)^2=9 \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】(1) 条件より

$$y-1=m(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad y=mx-(3m-1) \quad \cdots ① \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より，円 C は

原点を中心とする半径$\sqrt{5}$の円

であり

$$① \quad \Leftrightarrow \quad mx-y-(3m-1)=0$$

となるので，直線 l が円 C と接するための条件は

$$\frac{|-(3m-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad |-3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

このとき，両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} |-3m+1|^2=5(m^2+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2m^2-3m-2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2m+1)(m-2)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad m=-\frac{1}{2},\ 2 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 直線 l が円 C と異なる 2 点で交わるための条件は

$$\frac{|-(3m-1)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}<\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad |-3m+1|<\sqrt{5(m^2+1)}$$

このとき，両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} |-3m+1|^2<5(m^2+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2m^2-3m-2<0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2m+1)(m-2)<0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}<m<2 \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】円の中心は，$x^2+y^2-2x-2y-2=(x-1)^2+(y-1)^2-4=0$ より

$$(1,\ 1)$$

これを，A とする．また，B$(0,\ 0)$ とすると，B は円の内部にある．

B を通る円の弦を PQ とする．A から PQ への垂線の足を H とする．

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PH}=2\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2}=2\sqrt{4-\mathrm{AH}^2}$$

したがって，PQ が最小になるのは AH が最大のときである．

$$\mathrm{AB} \geqq \mathrm{AH}$$

なので，AH が最大になるのは $\mathrm{H}=\mathrm{B}$ のときである．
よって，PQ の最小値は

$$2\sqrt{4-\mathrm{AB}^2}=2\sqrt{4-(1^2+1^2)}=2\sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) t を消去する. $t=1-x$ なので,

$$\begin{aligned} y &= -(1-x)^2+2(1-x)+1 \\ &= -(1-2x+x^2)+2-2x+1 \\ &= -x^2+2 \end{aligned}$$

x はすべての実数をとりうるので, 求める図形は,

放物線 : $y=-x^2+2$ の全体　　(答)

(2)

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1+\frac{2}{1+t^2}$$
$$\therefore\quad x+1=\frac{2}{1+t^2}$$

$x+1>0$ なので, $y=\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{2}{1+t^2}\cdot t$ より,

$$\frac{y}{x+1}=t$$

よって,

$$x+1=\frac{2}{1+\left(\dfrac{y}{x+1}\right)^2}=\frac{2(x+1)^2}{(x+1)^2+y^2}$$

$x+1\neq 0$ より,

$$(x+1)^2+y^2=2(x+1)$$
$$x^2+1+y^2=2$$
$$\therefore\quad \text{円}: x^2+y^2=1$$

ただし, $x+1>0$ つまり $x>-1$ より, $(x,\ y)=(-1,\ 0)$ を除く.　　(答)

【4】線分 PQ を $3:2$ に外分する点が $\mathrm{R}(X,\ Y)$ だから,

$$\begin{aligned} X &= \frac{-2x+6}{3-2} = -2x+6 \quad \cdots ① \\ Y &= \frac{-2y+6}{3-2} = -2y+6 \\ &= -2(x^2-2x+4)+6 \qquad \because y = x^2-2x+4 \\ &= -2x^2+4x-2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①, ②より, x を消去する.
①より,

$$x = -\frac{1}{2}X+3$$

②に代入して,

$$\begin{aligned} Y &= -2\left(-\frac{1}{2}X+3\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}X+3\right)-2 \\ &= -\frac{1}{2}X^2+4X-8 \end{aligned}$$

$X,\ Y$ を $x,\ y$ に置き換えて, 求める軌跡の方程式は,

$$y = -\frac{1}{2}x^2+4x-8 \qquad \text{(答)}$$

【5】2 つの円

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x^2+y^2-2x-4y-8=0 \end{cases}$$

の交点を通る円の方程式は

$$(x^2+y^2-16)+h(x^2+y^2-2x-4y-8)=0$$

と表せるので，原点を通るとき

$$-16-8h=0 \quad \Leftrightarrow \quad h=-2$$

これより，円 C の方程式は

$$\begin{aligned} & (x^2+y^2-16)-2(x^2+y^2-2x-4y-8)=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2+y^2-4x-8y=0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2+(y-4)^2=20 \end{aligned}$$

となるので，直線

$$y=x+k \quad \Leftrightarrow \quad x-y+k=0$$

と接するための条件は

$$\begin{aligned} \frac{|2-4+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5} \quad & \Leftrightarrow \quad |k-2|=2\sqrt{10} \\ & \Leftrightarrow \quad k=2\pm 2\sqrt{10} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【6】

$$\begin{cases} ax - y = -4 & \cdots ① \\ x + ay = 8 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

(i) $x = 0$ のとき

$$y = 4$$

これを②に代入して

$$0 + 4a = 8 \qquad \therefore \quad a = 2$$

これより, $(0,\ 4)$ は交点の軌跡に含まれる.

(ii) $x \neq 0$ のとき, ①より

$$a = \frac{-4+y}{x}$$

これを②に代入すると

$$\begin{aligned} x + \frac{y(y-4)}{x} = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + y^2 - 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで, $x = 0$ のとき, ③は

$$(-4)^2 + (y-2)^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0,\ 4$$

これより, $(0,\ 0)$, $(0,\ 4)$ を除く.

以上, (i), (ii) より, 求める軌跡は

$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 20$ (ただし, $(0,\ 0)$ を除く)　　(答)

M2T

高２難関大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	