M2TK

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２難関大数学Ｋ

問題

【1】求める数列の初項を a, 公差を d, 一般項を a_n, 初項から第 n 項までの和を S_n とおく.

(1) 一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)\cdot 2 \\ &= 2n + a - 2 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$a_5 = 7$ より

$$a_5 = 2\cdot 5 + a - 2 = 7$$
$$\therefore \quad a = -1$$

ゆえに $(*)$ より求める一般項は $a_n = \boldsymbol{2n-3}$ (答)

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\,(-1 + 2n - 3) \\ &= \boldsymbol{n(n-2)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot (a + a_5) \\ &= \frac{5}{2}(2a + 4d) = 20 \end{aligned}$$
$$\therefore \quad a + 2d = 4 \quad \cdots ①$$
$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot (a + a_{10}) \\ &= 5(2a + 9d) = -10 \end{aligned}$$
$$\therefore \quad 2a + 9d = -2 \quad \cdots ②$$

① $\times 2 -$ ② より

$$-5d = 10 \qquad \therefore \quad d = -2$$

① に代入して

$$a = 4 - 2\cdot(-2) = 8$$

よって求める一般項は

$$a_n = 8 + (n-1)\cdot(-2) = \boldsymbol{-2n+10} \quad \text{(答)}$$

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\,\{8 + (-2n + 10)\} \\ &= \boldsymbol{n(9-n)} \quad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 条件より

$$a_5 = a + 4d = 7 \quad \cdots ①$$

また第 5 項から第 10 項までの和を T とすると，T は初項 a_5，末項 a_{10}，公差 d，項数 $10 - 5 + 1 = 6$ の等差数列の和であるから

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (a_5 + a_{10}) \\ &= 3(7 + a + 9d) = 27 \quad (\because \quad a_5 = 7) \\ &\therefore \quad a + 9d = 2 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

① − ② より

$$-5d = 5 \qquad \therefore \quad d = -1$$

① に代入して

$$a = 7 - 4d = 7 - 4 \cdot (-1) = 11$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n = 11 + (n-1) \cdot (-1) = \boldsymbol{-n + 12} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} n \{11 + (-n + 12)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2} n(23 - n)} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【2】求める数列の初項を a，公比を r，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とする．

(1) 条件より

$$S_5 = \frac{a\left\{1-(-2)^5\right\}}{1-(-2)} = 33$$

ゆえに

$$a(1+32) = 3 \cdot 33$$
$$\therefore \quad a = 3$$

よって一般項は

$$a_n = \mathbf{3 \cdot (-2)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

また和は

$$S_n = \frac{3\left\{1-(-2)^n\right\}}{1-(-2)} = \mathbf{1-(-2)^n} \qquad \text{(答)}$$

(2) 条件より

$$a_3 = a \cdot r^2 = 18 \quad \cdots ①$$
$$a_5 = a \cdot r^4 = 162 \quad \cdots ②$$

② ÷ ① より

$$r^2 = 9 \qquad \therefore \quad r = \pm 3$$

① に代入して $a = 2$.

(i) $r = 3$ のとき．一般項は

$$a_n = \mathbf{2 \cdot 3^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{2\left(3^n - 1\right)}{3-1} = \mathbf{3^n - 1} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $r = -3$ のとき．一般項は

$$a_n = \mathbf{2 \cdot (-3)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{2\left\{1-(-3)^n\right\}}{1-(-3)} = \mathbf{\frac{1}{2}\left\{1-(-3)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

(3) 条件より

$$a_2 = ar = -52 \quad \cdots ①$$

よって $r \fallingdotseq 0$. また $r=1$ とすると

$$S_3 = 3 \cdot a_2 = -156 \fallingdotseq 169$$

ゆえに $r \fallingdotseq 1$. よって

$$S_3 = \frac{a\left(1-r^3\right)}{1-r} = a\left(1+r+r^2\right) = 169 \quad \cdots ②$$

① より $a = -\dfrac{52}{r}$. ② に代入して

$$\begin{aligned}
-\frac{52}{r}\left(1+r+r^2\right) &= 169 \\
4r^2+4r+4 &= -13r \\
4r^2+17r+4 &= 0 \\
(r+4)(4r+1) &= 0 \\
r &= -4,\quad -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

よって

(i) $r=-4$ のとき.

① より $a=13$. 一般項は

$$a_n = \boldsymbol{13\cdot(-4)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{13\left\{1-(-4)^n\right\}}{1-(-4)} = \boldsymbol{\frac{13}{5}\left\{1-(-4)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

(ii) $r=-\dfrac{1}{4}$ のとき.

① より $a=208$. 一般項は

$$a_n = \boldsymbol{208\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \qquad \text{(答)}$$

和は

$$S_n = \frac{208\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \boldsymbol{\frac{832}{5}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 3 つの数を $a-d$，a，$a+d$ とすると，これらの和が 21 であるから

$$(a-d)+a+(a+d)=21 \qquad \therefore \quad a=7$$

また平方の和が 179 であるから

$$\begin{aligned}(a-d)^2+a^2+(a+d)^2&=179\\ 3a^2+2d^2&=179\\ 2d^2&=179-3\cdot 7^2=32\\ d^2&=16\\ d&=\pm 4\end{aligned}$$

ゆえにいずれの場合も，求める 3 数は

3，7，11　　(答)

(2) 3 つの数を $\dfrac{a}{r}$，a，ar とすると，積が -1728 であるから

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}\cdot a\cdot ar&=-1728\\ a^3&=-1728=-2^6\cdot 3^3\\ \therefore \quad a&=-12\end{aligned}$$

また和が 18 であるから

$$\begin{aligned}\frac{a}{r}+a+ar&=18\\ -12\cdot\left(\frac{1}{r}+1+r\right)&=18\\ 2r^2+5r+2&=0\\ (2r+1)(r+2)&=0\\ r&=-\frac{1}{2},\ -2\end{aligned}$$

ゆえにいずれの場合も，求める 3 数は

6，−12，24　　(答)

【4】1 から 100 までの自然数の和は，初項 1 ，公差 1，末項 100 ，項数 100 の等差数列の和であるから

$$\frac{100}{2}\times(1+100)=5050$$

(1) 4 で割り切れる数は

$$4\times1,\ 4\times2,\ 4\times3,\ \cdots,\ 4\times25$$

であり，その和は，初項 4 ，公差 4，末項 100 ，項数 25 の等差数列の和だから

$$\frac{25}{2}\times(4+100)=\mathbf{1300}\qquad\text{(答)}$$

(2) 6 で割り切れる数は

$$6\times1,\ 6\times2,\ 6\times3,\ \cdots,\ 6\times16$$

であり，その和は，初項 6 ，公差 6，末項 96 ，項数 16 の等差数列の和と考えて

$$\frac{16}{2}\times(6+96)=816$$

よって， 6 で割り切れない数の和は

$$5050-816=\mathbf{4234}\qquad\text{(答)}$$

(3) 4 で割り切れる数， 6 で割り切れる数にともに含まれる数は,

$$12\times1,\ 12\times2,\ 12\times3,\ \cdots,\ 12\times8$$

であり，その和は，初項 12 ，公差 12，末項 96 ，項数 8 の等差数列の和と考えて

$$\frac{8}{2}\times(12+96)=432$$

これと，(1)(2) の結果より， 4 または 6 で割り切れる数の総和は

$$1300+816-432=1684$$

以上より， 4 でも 6 でも割り切れない数の総和は

$$5050-1684=\mathbf{3366}\qquad\text{(答)}$$

【5】(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，条件より

$$a_{10} = a + 9d = 30 \quad \cdots ①$$

また

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (a_1 + a_5) = 220$$
$$\therefore \quad a + 2d = 44 \quad \cdots ②$$

① − ② より

$$7d = -14 \qquad \therefore \quad d = -2$$

② に代入して

$$a = 44 - 2 \cdot (-2) = 48$$

ゆえに求める一般項は

$$a_n = 48 + (n-1) \cdot (-2) = \boldsymbol{-2n + 50} \qquad \text{(答)}$$

(2) 不等式

$$a_n \geqq 0$$

を解くと

$$-2n + 50 \geqq 0 \qquad \therefore \quad n \leqq 25$$

ゆえに，公差 $d = -2 < 0$ であることを考えると

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{24} > a_{25} = 0 > a_{26} > \cdots$$

であるから，S_n が最大になるのは

$n = 24$ または $n = 25$　　(答)

のとき．求める最大値は

$$\begin{aligned} S_{24} = S_{25} &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (a_1 + a_{25}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 48 \\ &= \boldsymbol{600} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

(3) 求める和は，初項 48，公差 $2d = -4$，項数 50 の等差数列の和である．第 50 項は

$$48 + (50 - 1) \cdot (-4) = -148$$

であるから，求める和を S_n とすると

$$S_n = \frac{50}{2} \cdot \{48 + (-148)\} = \boldsymbol{-2500} \qquad \text{(答)}$$

【6】初項 3，公比 2 の等比数列の一般項は

$$3 \cdot 2^{n-1}$$

であるから，

$$3 \cdot 2^{n-1} > 1500$$

となる最小の整数 n を求める．これを整理すると

$$2^{n-1} > 500$$

となり，$2^8 = 256$，$2^9 = 512$ であるから

$$n - 1 \geqq 9 \qquad \therefore \quad n \geqq 10$$

よって，**第 10 項** ではじめて 1500 を超える．　　(答)

【7】初項 2，公比 2 の等比数列の第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

であるから

$$2^{n+1} - 2 > 510$$

をみたす最小の整数 n を求める．

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &> 512 = 2^9 \\ n + 1 &> 9 \\ n &> 8 \end{aligned}$$

よって，求める n は，

9　　(答)

【8】毎年はじめの積み立て額を x 円，年利率を r $(0 < r < 1)$ とする．
それぞれの年の積み立て額に対して，n 年後の金額は表のようになる．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1\text{ 年後} & 2\text{ 年後} & & (n-2)\text{ 年後} & (n-1)\text{ 年後} & n\text{ 年後} \\
\hline
x & x(1+r) & x(1+r)^2 & \cdots\cdots & x(1+r)^{n-2} & x(1+r)^{n-1} & x(1+r)^n \\
 & x & x(1+r) & \cdots\cdots & x(1+r)^{n-3} & x(1+r)^{n-2} & x(1+r)^{n-1} \\
 & & x & \cdots\cdots & x(1+r)^{n-4} & x(1+r)^{n-3} & x(1+r)^{n-2} \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & x & x(1+r) & x(1+r)^2 \\
 & & & & & x & x(1+r)
\end{array}
$$

n 年後の元利合計 S_n は，初項 $x(1+r)$，公比 $1+r$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから，

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{x(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r)-1} \\
&= \frac{x(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}
\end{aligned}
$$

である．

ここで $r = 0.04$，$n = 10$ とすると 10 年後の元利合計額は

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{x(1+0.04)\{(1+0.04)^{10} - 1\}}{(1+0.04)-1} \\
&= \frac{x \cdot 1.04 \cdot (1.48 - 1)}{0.04} = 12.48x
\end{aligned}
$$

これを 100 万円としたいから

$$
\begin{aligned}
&12.48x = 1000000 \\
&\therefore \quad x = \frac{1000000}{12.48} = 80128.20\ldots
\end{aligned}
$$

したがって，必要な積み立て額は，

80129 円　　(答)

【9】初項 1，公差 3 の等差数列を $\{a_n\}$ とすると，一般項は

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

また初項 1，公差 2 の等差数列を $\{b_n\}$ とすると，一般項は

$$b_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

$\{a_n\}$ の第 n 項 a_n と，$\{b_n\}$ の第 m 項 b_m が等しいとすると

$$3n - 2 = 2m - 1$$
$$\therefore \quad 3n = 2m + 1$$

$2m+1$ は奇数より，n は奇数でなければならない．すなわち k を整数として

$$n = 2k - 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

とおける．
この k $(k = 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，$\{a_n\}$ と $\{b_m\}$ の共通項 $\{c_k\}$ が決定される．
したがって，$\{c_k\}$ の一般項は

$$c_k = 3 \cdot (2k-1) - 2 = 6k - 5$$

よって

$$c_n = \boldsymbol{6n - 5} \qquad \text{(答)}$$

■別解

初項 0，公差 3 の等差数列を $\{A_n\}$ とすると，

$$\{A_n\} : \ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ \cdots$$

初項 0，公差 2 の等差数列を $\{B_n\}$ とすると，

$$\{B_n\} : \ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ \cdots$$

その共通項を順に並べたものを $\{C_n\}$ とすると，

$$\{C_n\} : \ 0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ \cdots$$

$\{A_n\}$ は 3 の倍数の列，$\{B_n\}$ は 2 の倍数の列であるから，$\{C_n\}$ は 2 と 3 の最小公倍数である 6 の倍数の列である．それぞれの一般項は

$$A_n = 3n - 3,\ \ B_n = 2n - 2,\ \ C_n = 6n - 6$$

となる．
ここで，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ は，$\{A_n\}$，$\{B_n\}$，$\{C_n\}$ の各項にそれぞれ 1 ずつ加えた数列であるから，その一般項は

$$a_n = 3n - 2,\ b_n = 2n - 1,\ c_n = \boldsymbol{6n - 5} \qquad \text{(答)}$$

【10】等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると，条件 (i) より

$$\begin{aligned} |a_1| &= |a_{2k-1}| \\ |a| &= |a+(2k-1-1)d| \\ |a| &= |a+2(k-1)d| \end{aligned}$$

$$a+2(k-1)d=\pm a$$

$$\therefore \quad (k-1)d=0,\ \ -a \quad \cdots ①$$

また条件 (ii) より，和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2k-1)(a_1+a_{2k-1}) \\ &= (2k-1)\{a+(k-1)d\}=0 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

ここで

(I) $(k-1)d=0$ のとき．

これが k によらず成り立つから $d=0$．② に代入して，$a=0$．ゆえに

$$a_k=0+(k-1)\cdot 0=0$$

(II) $(k-1)d=-a$ のとき．

これは ② をみたすから

$$a_k=a+(k-1)d=a-a=0$$

以上より，求める第 k 項は，$a_k=\mathbf{0}$　　(答)

【11】(1) 条件より $a_{n+2}=a_n+4$．ゆえに

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1+4=2+4=\mathbf{6} \qquad (答)\\
a_4 &= a_2+4=3+4=\mathbf{7} \qquad (答)\\
a_5 &= a_3+4=6+4=\mathbf{10} \qquad (答)\\
a_6 &= a_4+4=7+4=\mathbf{11} \qquad (答)
\end{aligned}$$

(2) 数列 $\{a_n\}$ の奇数番目の項は，初項 2，公差 4 の等差数列．偶数番目の項は，初項 3，公差 4 の等差数列．

(i) n が奇数，すなわち $n=2k-1$ （k は正整数） のとき．

$$n=2k-1 \quad \Longleftrightarrow \quad k=\frac{n+1}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned}
a_{2k-1} &= 2+(k-1)\cdot 4\\
&= 4k-2\\
&= 4\left(\frac{n+1}{2}\right)-2=2n
\end{aligned}$$

(ii) n が偶数，すなわち $n=2k$ （k は正整数） のとき．

$$n=2k \quad \Longleftrightarrow \quad k=\frac{n}{2}$$

このとき

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= 3+(k-1)\cdot 4\\
&= 4k-1\\
&= 4\left(\frac{n}{2}\right)-1=2n-1
\end{aligned}$$

以上より，

$$a_n=\begin{cases} \mathbf{2n} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が奇数のとき})\\ \mathbf{2n-1} & (\boldsymbol{n}\ \textbf{が偶数のとき})\end{cases} \qquad (答)$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の，初項から第 n 項までの和を S_n，数列 $\{a_{2k-1}\}$ の，初項から第 $2k-1$ 項までの和を T_k，数列 $\{a_{2k}\}$ の，初項から第 $2k$ 項までの和を U_k とおく．

(i) n が奇数のとき，すなわち $n=2k-1$ のとき．

$$\begin{aligned}
S_n &= T_k+U_{k-1}\\
&= \frac{1}{2}\cdot k\cdot\{2+(4k-2)\}+\frac{1}{2}\cdot(k-1)\cdot\{3+4(k-1)-1\}\\
&= 2k^2+(k-1)(2k-1)\\
&= 2\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)(n+1-1)\\
&= \frac{1}{2}\left(n^2+2n+1\right)+\frac{n^2-n}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(2n^2+n+1\right)
\end{aligned}$$

(ii) n が偶数のとき，すなわち $n=2k$ のとき．

$$\begin{aligned}S_n &= T_k + U_k\\ &= \frac{1}{2}\cdot k\cdot\{2+(4k-2)\}+\frac{1}{2}\cdot k\cdot(3+4k-1)\\ &= 2k^2+k(2k+1)\\ &= 2\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n}{2}(n+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(2n^2+n\right)\\ &= \frac{1}{2}n(2n+1)\end{aligned}$$

以上より，求める和は

$$S_n=\begin{cases}\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(2n^2+n+1\right)} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\textbf{ が奇数のとき)}\\ \boldsymbol{\frac{1}{2}n\left(2n+1\right)} & \textbf{(}\boldsymbol{n}\textbf{ が偶数のとき)}\end{cases}\qquad(\text{答})$$

【12】$a_n=pn+q \quad \cdots$① より，n を $n+1$ で置き換えて

$$a_{n+1}=p(n+1)+q \quad \cdots ②$$

② − ① より

$$a_{n+1}-a_n=p(n+1)+q-(pn+q)=p$$

p は定数であるから，数列 $\{a_n\}$ は公差 p の等差数列である． 〔証明終〕

＜コメント＞

等差数列の一般項は，n の 1 次以下の式になる．逆に，一般項が n の 1 次以下の式で表される数列は等差数列となる．

１５章　数列（２）－和の記号 ∑ －

問題

【1】(1)

$$\sum_{k=1}^{5} a_{k+1} = \boldsymbol{a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{5} a_{2k-1} = \boldsymbol{a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\sum_{k=3}^{8} a_k = \boldsymbol{a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(a_{k+1} - a_k) &= (\cancel{a_2} - a_1) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + (\cancel{a_4} - \cancel{a_3}) + (\cancel{a_5} - \cancel{a_4}) + (a_6 - \cancel{a_5}) \\ &= \boldsymbol{-a_1 + a_6} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= \boldsymbol{n^2} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 3k(2k-1) &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(4n+2-3) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)(4n-1)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^3 - k) &= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n-1)(n+2)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2 \cdot (2^n - 1)}{2-1} = \boldsymbol{2^{n+1} - 2} \qquad \text{(答)}$$

(5)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 3\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}\\ &= \mathbf{2-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\boldsymbol{n}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2 &= \sum_{k=1}^{5}\left(k^2+2k+1\right)\\ &= \sum_{k=1}^{5}k^2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1\\ &= \frac{1}{6}\cdot 5\cdot 6\cdot 11+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6+5\\ &= \mathbf{90} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜別解＞

$l=k+1$ とおくと

k	1	$\longrightarrow$	5
l	2	$\longrightarrow$	6

より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k+1)^2 &= \sum_{l=2}^{6}l^2\\ &= \sum_{l=1}^{6}l^2-\sum_{l=1}^{1}l^2\\ &= \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 7\cdot 13-1^2\\ &= \mathbf{90} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【3】

$$S_n = 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)x^{k-1}$$

とおく.

(i) $x = 1$ のとき.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n = n^2$$

(ii) $x \neq 1$ のとき.

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + 3x + 5x^2 + \cdots\cdots + (2n-1)x^{n-1} \\ -)\ xS_n = & \qquad\ \ x + 3x^2 + \cdots\cdots + (2n-3)x^{n-1} + (2n-1)x^n \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} (1-x)S_n &= 1 + 2(x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1}) - (2n-1)x^n \\ &= 1 + 2\cdot\frac{x\cdot(1-x^{n-1})}{1-x} - (2n-1)x^n \\ &= \frac{(1-x) + 2x(1-x^{n-1}) - (1-x)(2n-1)x^n}{1-x} \\ &= \frac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

以上より，求める和は

$$S_n = \begin{cases} \boldsymbol{n^2} & (\boldsymbol{x = 1}\ \textbf{のとき}) \\ \boldsymbol{\dfrac{1 + x - (2n+1)x^n + (2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}} & (\boldsymbol{x \neq 1}\ \textbf{のとき}) \end{cases} \qquad (答)$$

【4】問題の数列の第 k 項は

$$(2k-1)\cdot(n-k+1)$$

と表される．項数は n であるから，求める和を S_n とすると

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot(n-k+1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\right\}\\
&= -2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(2n+3)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(n+1)\cdot n\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)(k+2) &= (0+1)(0+2)+\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\\ &= 1\cdot 2+\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\\ &= \frac{1}{6}\{12+n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)+12n\}\\ &= \frac{1}{6}\{n(n+1)(2n+1)+9n(n+1)+12(n+1)\}\\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+10n+12\right)\\ &= \frac{1}{3}(n+1)\left(n^2+5n+6\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜コメント＞

$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ である.

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 &= 4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\\ &= \frac{1}{3}n\left(4n^2+6n+2-6n-6+3\right)\\ &= \frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n^2}k &= \sum_{k=1}^{2n^2}k-\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2n^2\cdot\left(2n^2+1\right)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{2}n\left\{2n\left(2n^2+1\right)-(n+1)\right\}\\ &= \frac{1}{2}n\left(4n^3+2n-n-1\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}n\left(4n^3+n-1\right)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)} \qquad (答)\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2) \\ &= \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{l}m^3 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{l}m^2 + \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{l}m \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}l^2(l+1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}l(l+1)(2l+1) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l(l+1) \\ &= \frac{1}{24}l(l+1)\{l(l+1)+2(2l+1)+4\} \\ &= \frac{1}{24}l(l+1)\left(l^2+5l+6\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)} \qquad (答)\end{aligned}$$

＜コメント＞

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ を用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{m=1}^{l}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m(m+1)(m+2) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}l(l+1)(l+2)(l+3) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{24}l(l+1)(l+2)(l+3)} \qquad (答)\end{aligned}$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} ki\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left\{i\left(\sum_{k=1}^{i} k\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\{i \cdot \frac{1}{2} i(i+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{24} n(n+1)\{3n(n+1) + 2(2n+1)\} \\
&= \frac{1}{24} n(n+1)\left(3n^2 + 7n + 2\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【6】(1) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots\cdots+$(第 n 項)

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\
&=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)+2(2n+1)+4\}=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+5n+6)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) 第 k 項は

$$
\begin{aligned}
&1\cdot10^{k-1}+1\cdot10^{k-2}+\cdots+1\cdot10^{0}\\
&=\sum_{i=1}^{k}10^{i-1}\\
&=\frac{1\cdot(10^k-1)}{10-1}\\
&=\frac{10^k-1}{9}
\end{aligned}
$$

と表される．よって，求める和は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9}&=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}1\\
&=\frac{1}{9}\cdot\frac{10\cdot(10^n-1)}{10-1}-\frac{1}{9}n\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【7】(1)

$$S_n = 1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) + \cdots + (\text{第 } n \text{ 項})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k$$

とおくと

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \cdot n \\ -)\ -S_n = & \quad (-1) + 2 + (-3) + 4 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \cdot (n-1) + (-1)^n \cdot n \\ \hline 2S_n = & \{1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\} - (-1)^n \cdot n \end{array}$$

ここで

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}$$

は初項 1，公比 -1 の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned} 2S_n &= \frac{1 \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} - (-1)^n \cdot n \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{2} - (-1)^n \cdot n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{2} \cdot (-1)^n \end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_n = \boldsymbol{\frac{1}{4} - \frac{2n+1}{4} \cdot (-1)^n} \qquad (\text{答})$$

(2)

$$S_n = 1^2 \cdot 3^0 + 2^2 \cdot 3^1 + 3^2 \cdot 3^2 + \cdots\cdots + n^2 \cdot 3^{n-1}$$

とおくと

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1^2 \cdot 3^0 + 2^2 \cdot 3^1 + 3^2 \cdot 3^2 + \cdots\cdots + n^2 \cdot 3^{n-1} \\ -)\ 3S_n = & \qquad\quad 1^2 \cdot 3^1 + 2^2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + \cdots\cdots + n^2 \cdot 3^n \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} -2S_n &= 1^2 \cdot 3^0 + (2^2 - 1^2) \cdot 3^1 + (3^2 - 2^2) \cdot 3^2 \\ &\qquad + \cdots + \left\{n^2 - (n-1)^2\right\} \cdot 3^{n-1} - n^2 \cdot 3^n \\ &= 1 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1} - n^2 \cdot 3^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot 3^{k-1} - n^2 \cdot 3^n \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n^2 \cdot 3^n \end{aligned}$$

ここで

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 3^{k-1} = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdot \cdot + n \cdot 3^{n-1}$$

とおくと，

$$\begin{array}{rl} T_n = & 1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1 + 3\cdot 3^2 + \cdots\cdots + n\cdot 3^{n-1} \\ -)\ 3T_n = & \qquad\qquad 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots\cdots + n\cdot 3^n \\ \hline -2T_n = & 1\cdot 3^0 + 1\cdot 3^1 + 1\cdot 3^2 + \cdots\cdots + 1\cdot 3^{n-1} - n\cdot 3^n \end{array}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\{k-(k-1)\}\cdot 3^{k-1} - n\cdot 3^n$$

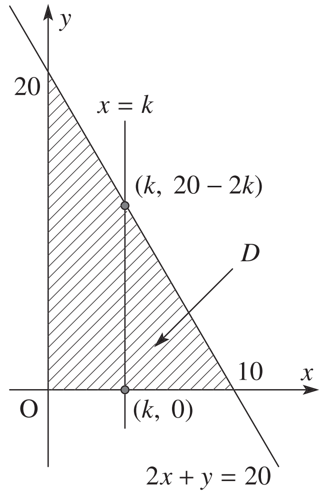
$$= \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n\cdot 3^n$$

ゆえに

$$\begin{aligned} -2S_n &= -\left(\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n\cdot 3^n\right) - \sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - n^2\cdot 3^n \\ &= -2\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} - (n^2-n)\cdot 3^n \\ &= -2\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1} - (n^2-n)\cdot 3^n \\ &= -(n^2-n+1)\cdot 3^n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_n = \boldsymbol{\frac{(n^2-n+1)\cdot 3^n - 1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 問題の領域は図のようになる．この領域を D とおく．



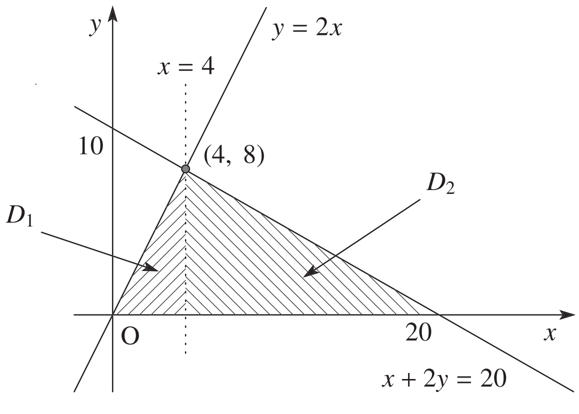
D 内に含まれる格子点のうち，直線 $x = k\ \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ 上にあるものは

$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ -2k+20)$$

の $-2k+20+1 = -2k+21$ 個．
ゆえに求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{10}(-2k+21) &= 21+\sum_{k=1}^{10}(-2k+21)\\ &= 21-2\sum_{k=1}^{10}k+21\sum_{k=1}^{10}1\\ &= 21-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11+21\cdot 10\\ &= \textbf{121}\ \textbf{個}\qquad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) 問題の領域は図のようになる．



この領域を D とし，領域 D を以下のように 2 つの領域 D_1，D_2 に分ける．

$$D_1:\ y \geqq 0,\ \ 0 \leqq x < 4,\ \ y \leqq 2x$$
$$D_2:\ y \geqq 0,\ \ 4 \leqq x \leqq 20,\ \ x+2y \leqq 20$$

また D_1，D_2 に含まれる格子点の個数をそれぞれ N_1，N_2 とする．
D_1 内の格子点のうち，直線 $x = k\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 上にあるものは

$$(k,\ 0),\ (k,\ 1),\ (k,\ 2),\ \cdots,\ (k,\ 2k)$$

の $2k+1$ 個．ゆえに

$$\begin{aligned}N_1 &= \sum_{k=0}^{3}(2k+1)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{3}(2k+1)\\ &= 1+2\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}1\\ &= 1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4+3 = 16\ \text{個}\end{aligned}$$

また D_2 内の格子点のうち，直線 $y=k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,8)$ 上にあるものは

$$(4,\ k),\ (5,\ k),\ (6,\ k),\ \cdots,\ (-2k+20,\ k)$$

の $(-2k+20)-4+1=-2k+17$ 個．ゆえに

$$\begin{aligned}N_2 &= \sum_{k=0}^{8}(-2k+17)\\ &= 17+\sum_{k=1}^{8}(-2k+17)\\ &= 17-2\sum_{k=1}^{8}k+17\sum_{k=1}^{8}1\\ &= 17-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9+17\cdot 8 = 81\ \text{個}\end{aligned}$$

よって求める個数は

$$N_1+N_2 = 16+81 = \mathbf{97}\ \text{個} \qquad \text{(答)}$$

【9】 $C:\ y=x^2$

$l:\ y=mx$

とおく．C と l の交点は

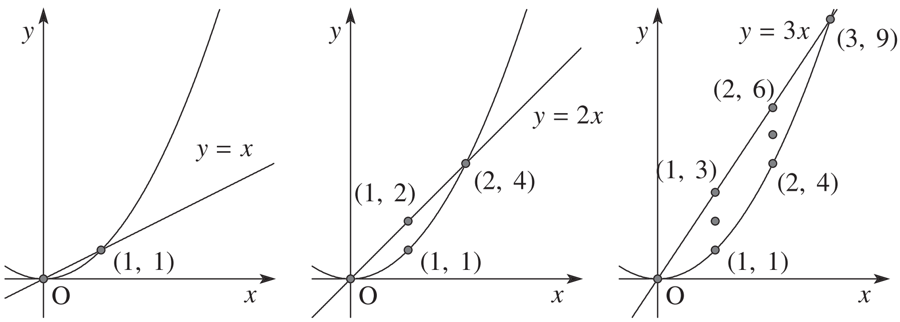
$$x^2=mx \iff x=0,\ m$$

(1) 図より

$d_1=\mathbf{2}$ (答)

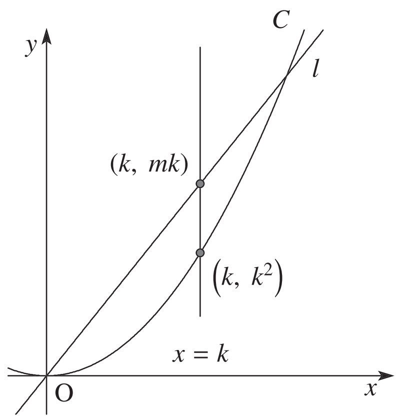
$d_2=\mathbf{4}$ (答)

$d_3=\mathbf{8}$ (答)



(2) 図より

$\boldsymbol{mk-k^2+1}$ **個** (答)



(3) 求める格子点の個数は，(2) の結果の $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$ にわたる和をとって

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\left(mk-k^2+1\right) &= -\sum_{k=0}^{m}k^2+m\sum_{k=0}^{m}k+\sum_{k=0}^{m}1\\ &= -\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+m\cdot\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)\\ &= \frac{1}{6}(m+1)\left\{-m(2m+1)+3m^2+6\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(m+1)\left(m^2-m+6\right)} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【10】上から k 段目，左から第 i 項の数は

$$k \cdot i$$

であるから，k 段目にある n 個の数の和は

$$\sum_{i=1}^{n} k \cdot i = k \sum_{i=1}^{n} i = k \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

よって，1 段目から n 段目までの n^2 個の数の和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{2} n(n+1) &= \frac{1}{2} n(n+1) \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2} \qquad (\text{答})\end{aligned}$$

＜コメント＞

左上から対角線上にある各項は，k^2 $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ の形で表される．

$$\begin{array}{cccccccc} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 & \cdots\cdots & 1 \cdot k & \cdots\cdots & 1 \cdot n \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & \cdots\cdots & 2 \cdot k & \cdots\cdots & 2 \cdot n \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & \cdots\cdots & 3 \cdot k & \cdots\cdots & 3 \cdot n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot 1 & k \cdot 2 & k \cdot 3 & \cdots\cdots & k \cdot k & \cdots\cdots & k \cdot n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ n \cdot 1 & n \cdot 2 & n \cdot 3 & \cdots\cdots & n \cdot k & \cdots\cdots & n \cdot n \end{array}$$

その k にしたがって放射状に広がるまとまりを考えると，k 番目のまとまりの和は

$$\begin{aligned}&2 \cdot \{k \cdot 1 + k \cdot 2 + k \cdot 3 + \cdots\cdots + k \cdot (k-1)\} + k \cdot k \\ &= 2k \sum_{i=1}^{k-1} i + k^2 \\ &= 2k \cdot \frac{(k-1) \cdot k}{2} + k^2 \\ &= (k^3 - k^2) + k^2 \\ &= k^3\end{aligned}$$

となる．ゆえに求める和は，

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boldsymbol{\frac{1}{4} n^2 (n+1)^2} \qquad (\text{答})$$

となる．

【11】求める和は

$$
\begin{aligned}
&1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+\cdots+1\cdot n\\
&\qquad +2\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+2\cdot n\\
&\qquad\qquad +3\cdot 4+\cdots+3\cdot n\\
&\qquad\qquad\qquad +\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad +(n-1)n
\end{aligned}
$$

である．これを S とおく．ここで

$$(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n)$$

を展開すると，異なる 2 つの数の積が 2 個ずつ，同じ数の積が 1 個ずつ現れるから，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n)-(1\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+n\cdot n)\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)\left(3n^2-n-2\right)\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

添削課題

【1】(1)　初項 1，公差 3 の等差数列だから，一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = \mathbf{3n-2} \qquad (答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{(3k-2)} \qquad (答)$$

(2) 初項 2，公比 -3 の等比数列だから，一般項 a_n は

$$a_n = \mathbf{2\cdot(-3)^{n-1}} \qquad (答)$$

また，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{2\cdot(-3)^{k-1}} \qquad (答)$$

(3)　$\sum_{k=1}^{5} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}(k^2+1) &= (1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)\\ &= 2+5+10+17+26\\ &= \mathbf{60} \qquad (答)\end{aligned}$$

【2】(1) ① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k} + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{b_k}$　　(答)

② $\sum_{k=1}^{n} ca_k = \boldsymbol{c}\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a_k}$　　(答)

(2) ① $\sum_{k=1}^{n} c = \boldsymbol{cn}$　　(答)

② $\sum_{k=1}^{n} k = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)}$　　(答)

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$　　(答)

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}$　　(答)

⑤ $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \boldsymbol{\frac{a(r^n-1)}{r-1}}$　　(答)

【3】(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}2$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 2n$$

$$= \frac{3n^2-n}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}n(3n-1)} \quad \text{（答）}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^3 + \sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)} \quad \text{（答）}$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}k = \sum_{k=1}^{2n}k - \sum_{k=1}^{n}k$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= n(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}n\{2(2n+1)-(n+1)\} = \mathbf{\frac{1}{2}n(3n+1)} \quad \text{（答）}$$

【4】一般項 $a_n = n(n+1) = n^2+n$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$$= \sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)} \quad \text{（答）}$$

【5】$S = 2 + (-4) + 6 + (-8) + 10 + \cdots\cdots + 2n \cdot (-1)^{n-1}$ とおくと，

$$\begin{array}{rrll}
S = & 2+ & (-4) + 6 + (-8) + 10 + \cdots\cdots + 2n \cdot (-1)^{n-1} & \\
-)\ -S = & & (-2) + 4 + (-6) + 8 + \cdots\cdots + 2(n-1) \cdot (-1)^{n-1} & +2n \cdot (-1)^n \\
\hline
2S = & 2+ & (-2) + 2 + (-2) + 2 + \cdots\cdots + 2 \cdot (-1)^{n-1} & -2n \cdot (-1)^n
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (-1)^{k-1} - 2n \cdot (-1)^n \\
&= 2 \cdot \frac{1 \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} - 2n \cdot (-1)^n \\
&= 1 - (-1)^n - 2n \cdot (-1)^n \\
&= 1 - (2n + 1) \cdot (-1)^n \\
S &= \boldsymbol{\frac{1 - (2n + 1) \cdot (-1)^n}{2}}
\end{aligned}$$

（答）

問題

【1】(1) 恒等式

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{2(n+2)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(2) 恒等式

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(1 - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right)\right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{3n^2 + 5n}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(3) 恒等式

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

より

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \cancel{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}} - \cancel{\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}}\right) + \cdots \right. \\
&\left. + \left\{\cancel{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-6}{6(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \boldsymbol{\frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(4) 与式は

$$\frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \cdots + (\text{第 } n \text{ 項}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

であり,

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$

であるから, 求める和は

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots \right. \\
&\left. + \left(\cancel{\frac{1}{2n-1}} - \cancel{\frac{1}{2n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{3(2n+3)}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

(5) 与式より

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)}\\
&=-\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right)\\
&=-\left\{\left(\sqrt{1}-\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\sqrt{n-1}}-\cancel{\sqrt{n}}\right)+\left(\cancel{\sqrt{n}}-\sqrt{n+1}\right)\right\}\\
&=-\left(\sqrt{1}-\sqrt{n+1}\right)\\
&=\boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}\qquad(\text{答})
\end{aligned}$$

(6) 恒等式

$$\log_2\frac{k+1}{k}=\log_2(k+1)-\log_2 k$$

より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k}&=\sum_{k=1}^{n}\{\log_2(k+1)-\log_2 k\}\\
&=(\cancel{\log_2 2}-\log_2 1)+(\cancel{\log_2 3}-\cancel{\log_2 2})\\
&\qquad+\cdots+\{\cancel{\log_2 n}-\cancel{\log_2(n-1)}\}+\{\log_2(n+1)-\cancel{\log_2 n}\}\\
&=\log_2(n+1)-\log_2 1\\
&=\boldsymbol{\log_2(n+1)}\qquad(\text{答})
\end{aligned}$$

【2】(1) 問題の数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$\{a_n\}$： $-1,\ 0,\ 4,\ 11,\ 21,\ 34,\ \cdots$
$\{b_n\}$： $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots$

$\{b_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから

$$b_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k-2) \\ &= -1 + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1) \cdot n - 2(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 2) \\ &= \frac{1}{2}(n-2)(3n-1) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 2 = -1 = a_1$$

より，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}(n-2)(3n-1)} \qquad \text{(答)}$$

(2) 問題の数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$\{a_n\}$： $1,\ 4,\ 13,\ 40,\ 121,\ 364,\ \cdots$
$\{b_n\}$： $3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \cdots$

$\{b_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3 - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(3^n - 3) = \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{aligned}$$

$n = 1$ とすると

$$\frac{1}{2} \cdot (3 - 1) = 1 = a_1$$

より，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}(3^n - 1)} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) 条件より

$$S_n = 2n^2 + 2n = 2n(n+1) \quad \cdots ①$$

(i) $n = 1$ のとき.

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき.

① で n を $n-1$ としたものとの差をとって

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n(n+1) - 2(n-1)n \\ &= 4n \end{aligned}$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ.

よって求める一般項は

$$a_n = \mathbf{4}\boldsymbol{n} \qquad (答)$$

(2) 条件より

$$S_n = n^2 + 3 \quad \cdots ②$$

(i) $n = 1$ のとき.

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 = 4$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき.

② で n を $n-1$ としたものとの差をとって

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2+3) - \{(n-1)^2 + 3\} \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のとき成立しない.

よって求める一般項は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{4} & (\boldsymbol{n} = \mathbf{1}) \\ \mathbf{2}\boldsymbol{n} - \mathbf{1} & (\boldsymbol{n} \geqq \mathbf{2}) \end{cases} \qquad (答)$$

(3) 条件より

$$S_n = n \cdot 2^{n+1} + 1 \quad \cdots ③$$

(i) $n = 1$ のとき.

$$a_1 = S_1 = 1 \cdot 2^{1+1} + 1 = 5$$

(ii) $n \geqq 2$ のとき.

③ で n を $n-1$ としたものとの差をとって

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n \cdot 2^{n+1} + 1 - \{(n-1) \cdot 2^n + 1\} \\ &= n \cdot 2^{n+1} - n \cdot 2^n + 2^n \\ &= (n+1) \cdot 2^n \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のとき成立しない.

よって求める一般項は

$$a_n = \begin{cases} \mathbf{5} & (\boldsymbol{n = 1}) \\ \boldsymbol{(n+1) \cdot 2^n} & (\boldsymbol{n \geqq 2}) \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) 恒等式

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\}$$

を用いて,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) \\
&\quad = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)\} \\
&\quad = \frac{1}{5}[(\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - 0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) + (\cancel{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}) + \cdots \\
&\quad + \{\cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)} - \cancel{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}\} \\
&\quad + \{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - \cancel{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}\}] \\
&\quad = \boldsymbol{\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \qquad (答)
\end{aligned}$$

＜コメント＞

一般に,正整数 p に対して,次のことが成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+p) = \frac{1}{p+2}k(k+1)(k+2)\cdot\cdots\cdot(k+p+1)$$

(2) 恒等式

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$$

より

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)! - k!\} \\
&= (\cancel{2!} - 1!) + (\cancel{3!} - \cancel{2!}) + \cdots\cdots + \{(n+1)! - \cancel{n!}\} \\
&= \boldsymbol{(n+1)! - 1} \qquad (答)
\end{aligned}$$

(3) 与えられた式は

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

である.ここで

$$\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{a}{(2k-1)^2} + \frac{b}{(2k+1)^2}$$

をみたす定数 a, b を求める.通分して

$$\frac{a}{(2k-1)^2} + \frac{b}{(2k+1)^2} = \frac{4(a+b)k^2 + 4(a-b)k + (a+b)}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

上式と比較して

$$a+b=0,\quad a-b=\frac{1}{2}$$

これを解いて

$$a=\frac{1}{4},\quad b=-\frac{1}{4}$$

すなわち

$$\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$

であるから，求める和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}\\
&\quad=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}\\
&\quad=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{1^2}-\cancel{\frac{1}{3^2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3^2}}-\cancel{\frac{1}{5^2}}\right)+\cdots+\left\{\cancel{\frac{1}{(2n-1)^2}}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right]\\
&\quad=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\\
&\quad=\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}}\qquad(答)
\end{aligned}$$

(4) 与えられた式は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

であり，恒等式

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

を用いて

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{5}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2)-2(n+2)-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}\\
&=\frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)}=\boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}\qquad(答)
\end{aligned}$$

(5) 一般項の分母は

$$
\begin{aligned}
&1^2+3^2+\cdots\cdots+(2k-1)^2\\
&\quad=\sum_{m=1}^{k}(2m-1)^2=\sum_{m=1}^{k}(4m^2-4m+1)\\
&\quad=4\cdot\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)-4\cdot\frac{1}{2}k(k+1)+k\\
&\quad=\frac{1}{3}k\cdot\{2(k+1)(2k+1)-6(k+1)+3\}\\
&\quad=\frac{1}{3}k(4k^2-1)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1^2+3^2+\cdots+(2k-1)^2}\\
&\quad=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\frac{1}{3}k(4k^2-1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4k^2-1}\\
&\quad=3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}\\
&\quad=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\
&\quad=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\
&\quad=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&\quad=\boldsymbol{\frac{3n}{2n+1}}\qquad\text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】問題の数列を $\{a_n\}$，$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\{a_n\}:\ -10,\ -4,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 10,\ \cdots$$
$$\{b_n\}:\ 6,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ \cdots$$

また $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると

$$\{c_n\}:\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$\{c_n\}$ は初項 -3，公差 1 の等差数列であるから

$$c_n = -3 + (n-1)\cdot 1 = n - 4$$

$\{b_n\}$ の一般項は，$n \geqq 2$ として

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 6 + \sum_{k=1}^{n-1}(k-4) \\ &= 6 + \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot n - 4(n-1) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - 9n + 20) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$\frac{1}{2}\cdot(1 - 9 + 20) = 6 = b_1$$

であるから，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．
また $\{a_n\}$ の一般項は，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -10 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2 - 9k + 20) \\ &= -10 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot(n-1)\cdot n\{2(n-1)+1\} \\ &\quad - \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}\cdot 20(n-1) \\ &= \frac{1}{12}(2n^3 - 30n^2 + 148n - 240) \\ &= \frac{1}{6}(n^3 - 15n^2 + 74n - 120) \\ &= \frac{1}{6}(n-4)(n-5)(n-6) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき

$$\frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5) = -10 = a_1$$

より，上式は $n = 1$ のときも成り立つ．
よって求める一般項は

$$a_n = \boldsymbol{\frac{1}{6}(n-4)(n-5)(n-6)} \qquad \text{(答)}$$

【6】(1) 等式

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)}$$

が恒等式となるための数 a, b を求める．右辺を通分して

$$\begin{aligned}\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{a(n+2)+bn}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(a+b)n+2a}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

係数を比較して

$a+b=5,\quad 2a=6$

これを解いて

$a=3,\quad b=2$

よって

$$a_n = \frac{\boxed{\mathbf{3}}}{\boldsymbol{n(n+1)}} \boldsymbol{+} \frac{\boxed{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}$$

(2) 求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

ここで　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{k(k+1)}$　とおくと

$$\begin{aligned}S_n &= 3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 3\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)\right\} \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

また　$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$　とおくと

$$\begin{aligned}T_n &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= 2\left\{\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= S_n + T_n \\ &= 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 4 - \frac{3}{n+1} - \frac{2}{n+2} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(4n+7)}{(n+1)(n+2)}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【7】(1) 正整数 n に対して，$\cos\dfrac{n\pi}{2}$ の値は次の表のようになる．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k$	$\cdots$
$\cos\dfrac{n\pi}{2}$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	$\cdots$	0	-1	0	1	$\cdots$

ゆえに k を正整数として

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{(n = 4k-1,\ 4k-3)} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{(n = 4k-2)} \\ \mathbf{1} & \mathbf{(n = 4k)} \end{cases} \qquad \text{(答)}$$

(2) 数列 $\left\{2^k \cos\dfrac{k\pi}{2}\right\}$ を列挙すると

$$0,\ -2^2,\ 0,\ 2^4,\ 0,\ -2^6,\ 0,\ 2^8,\ \cdots$$

この数列の初項から第 $4n$ 項までの和は，初項 $-2^2 = -4$，公比 $-2^2 = -4$ の等比数列の，初項から第 $2n$ 項までの和に等しい．ゆえに

$$\sum_{k=1}^{4n} (-2)^k \cos\frac{k\pi}{2} = \frac{-4\left\{1-(-4)^{2n}\right\}}{1-(-4)}$$

$$= \mathbf{\frac{4}{5}\left(16^n - 1\right)} \qquad \text{(答)}$$

【8】(1) 数列 $\{a_n\}$ は

$$\{a_n\}:\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ \cdots$$

である．この数列の第 $2m$ 項は，3 で割って 2 余る正整数のうち，小さいほうから m 番目の数である．

3 で割って 2 余る数は，初項 2，公差 3 の等差数列であるから，

$$a_{2m} = 2 + (m-1)\cdot 3 = \mathbf{3m-1} \qquad (答)$$

(2) (1) より，正整数 m に対して

$$a_{2m-1} = a_{2m} - 1 = 3m - 2$$

(i) n が偶数，すなわち $n = 2m$ のとき．

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2m-1} + a_{2m}) \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \{(3k-2) + (3k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{m} (6k-3) = 6\sum_{k=1}^{m} k - 3\sum_{k=1}^{m} 1 \\ &= 6\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - 3m \\ &= 3m^2 \end{aligned}$$

$m = \dfrac{n}{2}$ より

$$S_n = 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}n^2$$

(ii) n が奇数，すなわち $n = 2m-1$ のとき．

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2m-3} + a_{2m-2}) + a_{2m-1} \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-3} + a_{2m-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m-2} + a_{2m}) - a_{2m} \\ &= 3m^2 - a_{2m} \\ &= 3m^2 - 3m + 1 \end{aligned}$$

$m = \dfrac{1}{2}(n+1)$ より

$$S_n = 3\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\}^2 - 3\left\{\frac{1}{2}(n+1)\right\} + 1 = \frac{1}{4}\left(3n^2 + 1\right)$$

以上より，k を正整数として

$$S_n = \begin{cases} \mathbf{\dfrac{3}{4}n^2} & \mathbf{(n = 2k)} \\ \mathbf{\dfrac{1}{4}\left(3n^2 + 1\right)} & \mathbf{(n = 2k-1)} \end{cases} \qquad (答)$$

(3) (1) より $a_n > 0$ は明らかなので，S_n は単調増加である．

$$S_{28} = \frac{3}{4} \cdot 28^2 = 588 < 600$$

$$S_{29} = \frac{1}{4}\left(3 \cdot 29^2 + 1\right) = 631 \geqq 600$$

であるから，求める n は

$n = \mathbf{29}$　　(答)

M2TK

高２難関大数学 K

Z-KAI

会員番号	

氏　名	