M1JS/M1J

本科 2 期 9 月度

解答

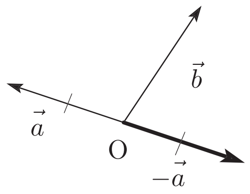
Z会東大進学教室

高 1 選抜東大数学

高 1 東大数学

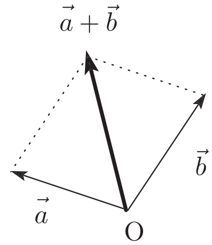
問題

【1】(1)



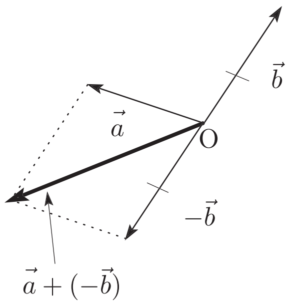
(答)

(2)



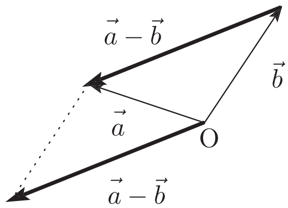
(答)

(3) ＜逆ベクトルから＞



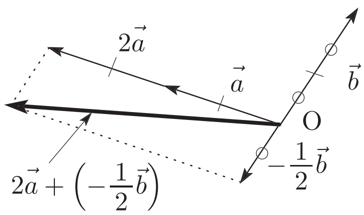
(答)

＜対角線から＞



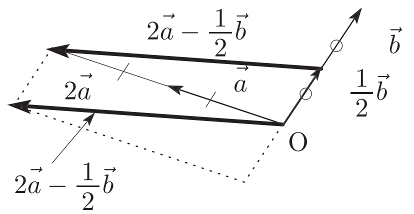
(答)

(4) ＜逆ベクトルから＞



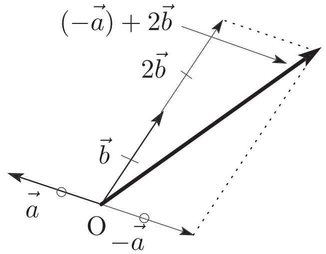
(答)

＜対角線から＞



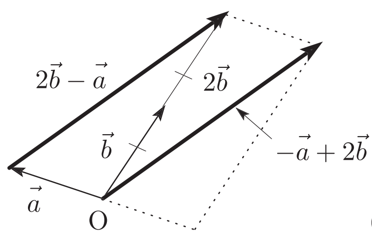
(答)

(5) ＜逆ベクトルから＞



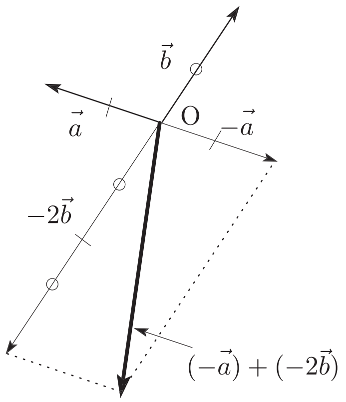
(答)

＜対角線から＞



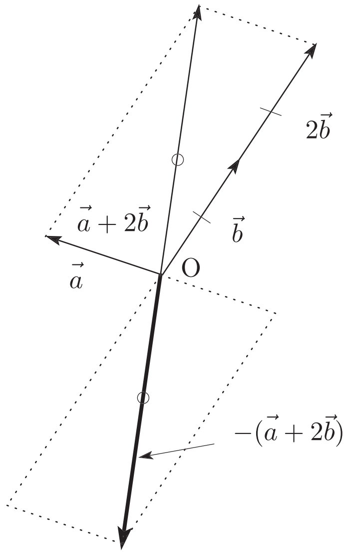
(答)

(6) ＜逆ベクトルから①＞



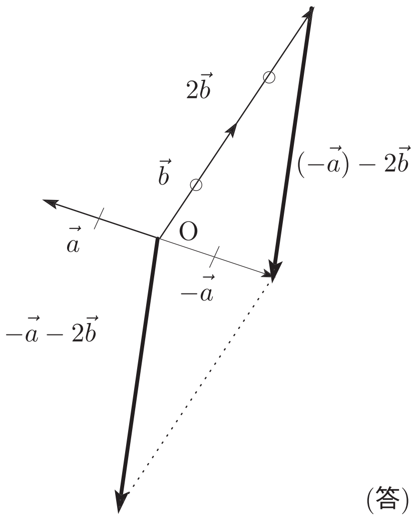
(答)

＜逆ベクトルから②＞



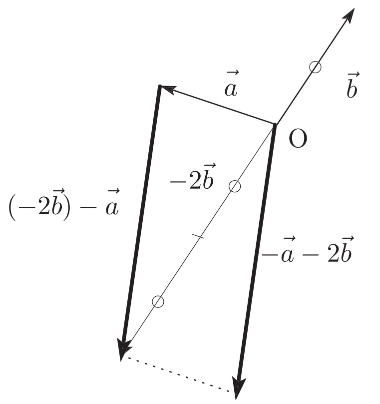
(答)

＜対角線から①＞



(答)

＜対角線から②＞



(答)

【2】(1) ≪証明≫

始点を A にそろえる.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= \vec{0} = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

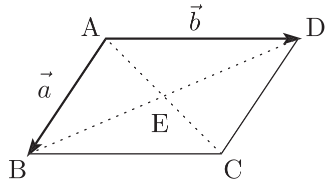
(2) ≪証明≫

始点を A にそろえる.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

〔証明終〕

【3】(1)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

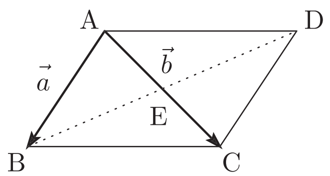
平行四辺形の 2 本の対角線の交点は，それぞれの対角線を 2 等分するから

$$
\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad (\text{答})
$$

一方，

$$
\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad (\text{答})
$$

(2)

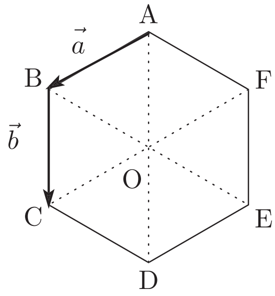


$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \left(\vec{b} - \vec{a}\right) - \vec{a} \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - 2\vec{a}} \qquad (\text{答})
\end{aligned}
$$

【4】正六角形の中心を O とする.

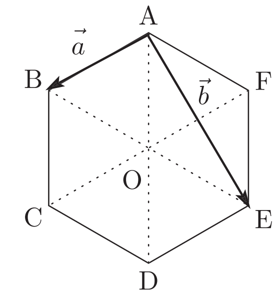
(1)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AF}} &= \overrightarrow{\mathrm{BO}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{2\vec{b} - \vec{a}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

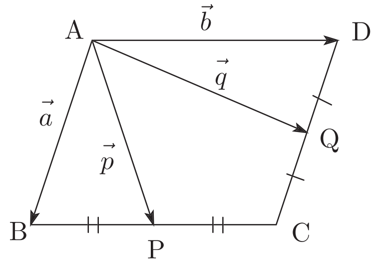
(2)



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{ED}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \boldsymbol{\vec{a} + \vec{b}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\
&= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}
$$

【5】点 P，Q は，辺 BC，CD の中点であるから，



$$\begin{aligned}\vec{p} &= \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DQ}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

① $\times 2 -$ ② より

$$2\vec{p} - \vec{q} = \frac{3}{2}\vec{a} \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

① $-$ ② $\times 2$ より

$$\vec{p} - 2\vec{q} = -\frac{3}{2}\vec{b} \qquad \therefore \boldsymbol{\vec{b} = -\frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}} \qquad \text{(答)}$$

【6】ベクトルの成分を縦書きで表す．すなわち，$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ と表す．

(1)

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6\\6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{12}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

また，

$$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+12^2}=\mathbf{2\sqrt{37}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $\quad\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$ より，
$\vec{a}$ に平行な単位ベクトルは，

$$\pm\frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

$\vec{b}$ に平行な単位ベクトルは，

$$\pm\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}$$

(3)

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2t\\3-2t\end{pmatrix}$$

であり，

$$\vec{a}+t\vec{b}\mathbin{/\!/}\vec{c}\iff\text{「}\vec{a}+t\vec{b}=k\vec{c}\text{となる }0\text{ でない実数 }k\text{ が存在する」}\cdots(*)$$

ゆえに，k を実数として，

$$\begin{pmatrix}4+2t\\3-2t\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}4+2t=-2k & \cdots①\\3-2t=k & \cdots②\end{cases}$$

① + ② より，

$$-k=7\qquad\therefore\ k=-7$$

② より，

$$-2t=-7-3\qquad\therefore\ t=5$$

このとき $(*)$ はみたされるから，求める t の値は，$\quad\boldsymbol{t=5}\qquad$ (答)

【7】(1)

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}$$

であり，

$$\begin{aligned}\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b} \quad &\iff \quad \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &\iff \quad \begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\2x+y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

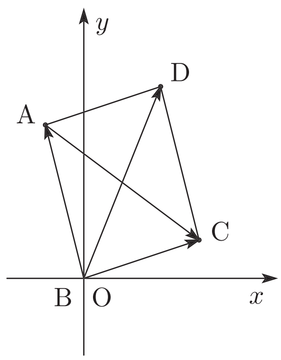
ゆえに

$$\begin{cases}11=x+2y & \cdots ①\\ 10=2x+y & \cdots ②\end{cases}$$

① × 2 − ② より，　$3y=12$　　$\therefore\ y=4$
② × 2 − ① より，　$3x=9$　　$\therefore\ x=3$
よって

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(3,\ 4)} \qquad \text{(答)}$$

(2) B を原点として，平行四辺形 ABCD を図示すると右のようになる．



$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad \cdots ②$$

① + ② より，

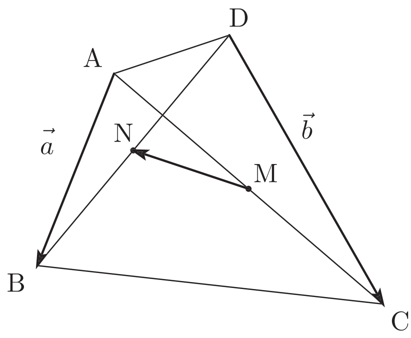
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

② − ① より，

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\right\}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{4}\end{pmatrix} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【8】A を始点として考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$



ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AN}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

ところで四角形 ABCD について

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}} = \vec{0}$$

より

$$-\overrightarrow{\mathrm{DA}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad \cdots ②$$

であるから，② を ① へ代入して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right) - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}} \quad \cdots ③\end{aligned}$$

よって，$(*)$ に ③ を代入して，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DC}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

＜別解＞

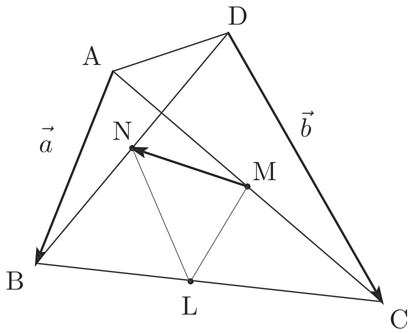
BC の中点を L とする.

M は AC の中点であるから，△ABC において中点連結定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

N は BD の中点であるから，△DBC において中点連結定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{LN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$



以上から

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{ML}} + \overrightarrow{\mathrm{LN}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

【9】≪証明≫

「四角形 ABCD が平行四辺形である」 $\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}$」を示す.

（$\Longrightarrow$ の証明）

与えられたベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表す.

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} &= \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\ &= 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{aligned}$$

（$\Longleftarrow$ の証明）

「四角形 ABCD が平行四辺形である」 $\iff$ 「$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$」であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}} \implies \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

を示す.

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ \iff &\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

以上より，題意は示された. 〔証明終〕

【10】残りの頂点を D とする．頂点の順序が指定されていないので，四角形 ABCD，四角形 ABDC，四角形 ADBC が平行四辺形の 3 通りの場合を考える．

(i) 四角形 ABCD が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

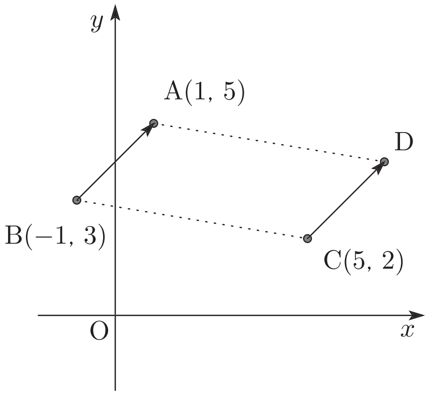
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-5=2 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x,\ y) = (7,\ 4)$



(ii) 四角形 ABDC が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

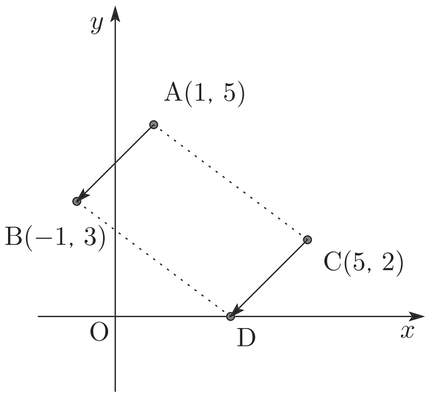
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-5=-2 \\ y-2=-2 \end{cases}$$

$\therefore\ (x,\ y) = (3,\ 0)$



(iii) 四角形 ADBC が平行四辺形のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

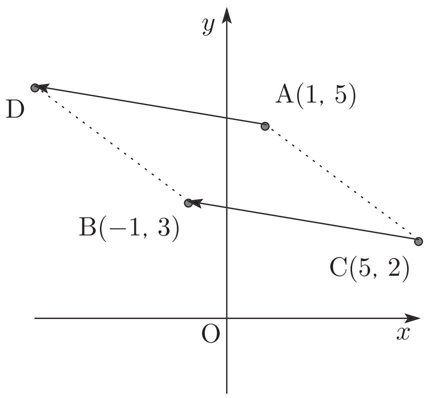
点 D$(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x-1=-6 \\ y-5=1 \end{cases}$$

$\therefore\ (x,\ y) = (-5,\ 6)$



(i)〜(iii) より，求める点の座標は，　**(7, 4)，　(3, 0)，　(−5, 6)**　　(答)

【11】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ より,

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

であるから，求める単位ベクトルは

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(2) AB の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ である．
△ABC は正三角形であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ は垂直である．また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{a}$ も垂直であるから，$\overrightarrow{\mathrm{MC}} /\!/ \vec{a}$ とわかる．よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|\times(\vec{a}\text{と同方向の単位ベクトル})$$

と表すことができる．
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ であり,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MC}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right|\times(\vec{a}\text{と同方向の単位ベクトル})\\&=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad(\because (1)\text{ より})\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ゆえに

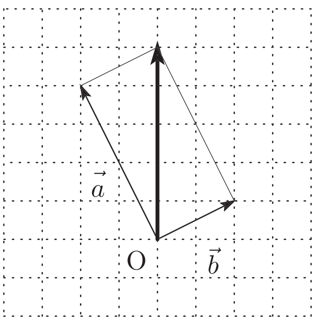
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}\\1+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，求める座標は,

$$\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{2}},\ \boldsymbol{\frac{1+2\sqrt{3}}{2}}\right) \qquad \text{(答)}$$

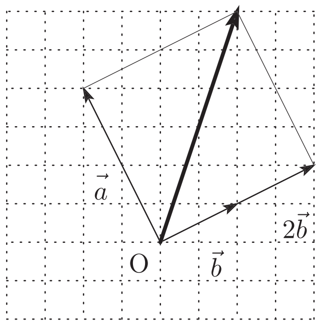
添削課題

【1】(1)



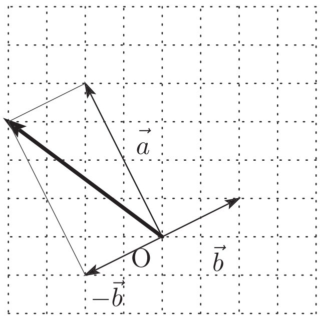
(答)

(2)



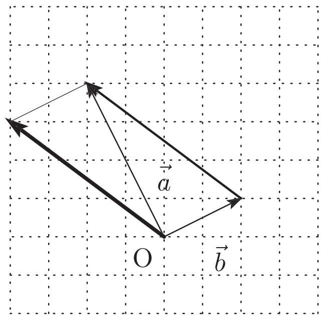
(答)

(3) 逆ベクトルから



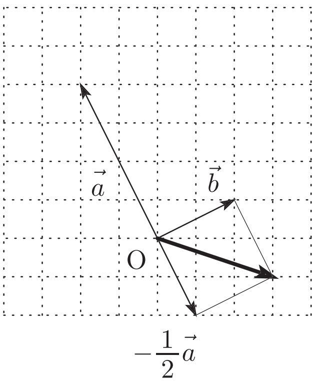
(答)

対角線から



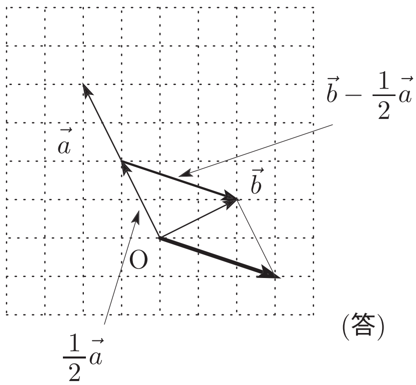
(答)

(4) 逆ベクトルから



(答)

対角線から



(答)

【2】(1) $3(\vec{a}-2\vec{b})-2(2\vec{a}-5\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}-4\vec{a}+10\vec{b}=\boldsymbol{-\vec{a}+4\vec{b}}$ (答)

(2)

$$\frac{1}{2}(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})+\frac{2}{3}(-\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c})$$
$$=\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{8}{3}\vec{b}+\frac{4}{3}\vec{c}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{5}{3}\vec{b}+\frac{11}{6}\vec{c}}$$ (答)

【3】 (1) $\overrightarrow{\mathrm{CF}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OF}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{-2\vec{a}}$ (答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{\vec{b} - \vec{a}}$ (答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$

$= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \boldsymbol{-\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}}$ (答)

【4】 ≪証明≫

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}}) - (\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{DA}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}}\\ &= (\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}) - (\overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{DB}} - \overrightarrow{\mathrm{DB}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{DD}} = \vec{0}\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{DA}}$ 〔証明終〕

【5】 ≪証明≫

$$\begin{cases} 3\vec{x} - \vec{y} = 10\vec{a} - 5\vec{b} & \cdots ① \\ \vec{x} + 2\vec{y} = -6\vec{a} + 3\vec{b} & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times 2 +$ ② より

$7\vec{x} = 14\vec{a} - 7\vec{b}$ $\therefore\ \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ $\cdots$ ③

これを ① に代入して

$3(2\vec{a} - \vec{b}) - \vec{y} = 10\vec{a} - 5\vec{b}$ $\therefore\ \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}$ $\cdots$ ④

よって，③，④ より

$\vec{y} = -2\vec{x}$

と表され，さらに $\vec{x} \neq \vec{0}$，$\vec{y} \neq \vec{0}$ より，

$\vec{x} \parallel \vec{y}$ 〔証明終〕

【6】(1)

$$\begin{aligned}3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}&=3\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{8}\\\mathbf{-8}\end{pmatrix}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

また,

$$\left|3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}\right|=\sqrt{8^2+(-8)^2}=\mathbf{8\sqrt{2}}\qquad\text{(答)}$$

(2) $k\vec{a}+l\vec{b}=\vec{c}$ より,

$$\begin{aligned}k\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\quad&\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}4k+2l\\2k-l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\\&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}4k+2l=6\\2k-l=5\end{cases}\\&\qquad\therefore\ \begin{cases}\boldsymbol{k=2}\\\boldsymbol{l=-1}\end{cases}\qquad\text{(答)}\end{aligned}$$

(3) m を 0 でない実数として,

$$\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$$

とおけるから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}\quad&\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}4+2t\\2-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6m\\5m\end{pmatrix}\\&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}4+2t=6m\\2-t=5m\end{cases}\\&\qquad\therefore\ \begin{cases}t=-\dfrac{1}{2}\\m=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

これは，$m\fallingdotseq 0$ をみたすので，$\boldsymbol{t=-\dfrac{1}{2}}$　　(答)

１５章　ベクトル（２）

問題

【1】AD $=2$，AB $=1$，AC $=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$AB $=\sqrt{3}$ であり，また，正六角形 ABCDEF は 1 辺の長さが 1 の 6 つの正三角形に分割される．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos 0^\circ=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\mathbf{1}$　　(答)

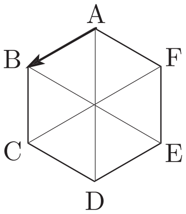
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos 30^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$　　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CG}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CF}}\right|\cos 120^\circ=2\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-2}$　　(答)

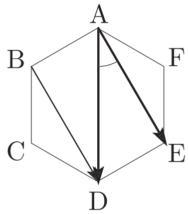
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right|\cos 120^\circ=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　　(答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right|\cos 90^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot 0=\mathbf{0}$　　(答)

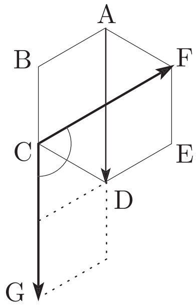
〔図 1〕



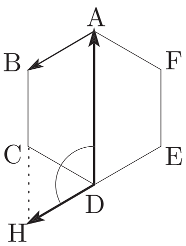
〔図 2〕



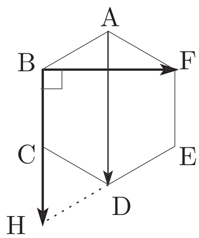
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【2】 $\triangle \mathrm{ABC}$ は直角三角形であるから，$\mathrm{AC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=1$，また，$\angle \mathrm{ABD}=\angle \mathrm{DBC}=\dfrac{\pi}{6}$ である．これより，$\mathrm{DA}=\mathrm{DB}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{BC}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$　(答)

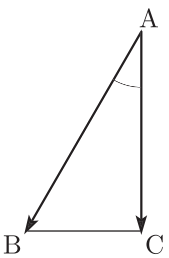
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos\dfrac{2}{3}\pi=2\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　(答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1}$　(答)

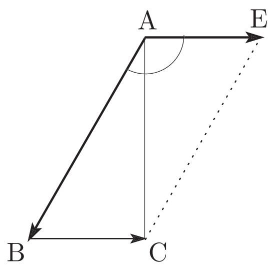
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\cos\dfrac{2}{3}\pi=\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$　(答)

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AG}}\right|\cos\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\cdot1\cdot0=\mathbf{0}$　(答)

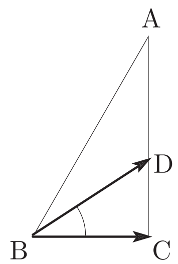
〔図 1〕



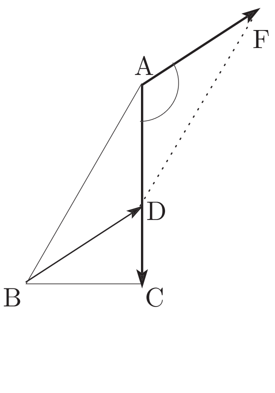
〔図 2〕



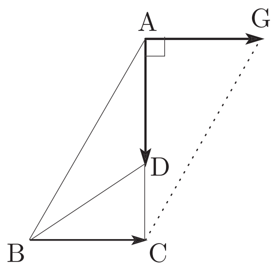
〔図 3〕



〔図 4〕



〔図 5〕



【3】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より，

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2t\\-3+t\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2&=(4+2t)^2+(-3+t)^2\\&=5t^2+10t+25\\&=5(t+1)^2+20\end{aligned}$$

よって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 20 をとる．このとき，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ も最小となる．
ゆえに，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は，

$\boldsymbol{t=-1}$のとき，最小値 $\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$ をとる．　　(答)

(2) (1) より $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|=\sqrt{5t^2+10t+25}$
また，

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$
$$\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}4+2t\\-3+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=8+4t-3+t=5t+5$$

条件より，

$$\begin{aligned}\frac{\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\left|\vec{b}\right|}=\cos\frac{\pi}{4}\quad&\Longleftrightarrow\quad 5t+5=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{5t^2+10t+25}\sqrt{5}\right\}\\&\Longleftrightarrow\quad \sqrt{2}(t+1)=\sqrt{t^2+2t+5}\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，右辺は正であるから，左辺について

$$t+1>0\quad\Longleftrightarrow\quad t>-1$$

この条件のもとで ① の両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned}2(t+1)^2&=t^2+2t+5\\t^2+2t-3&=0\\(t+3)(t-1)&=0\end{aligned}$$

$t>-1$ を考え，

$\boldsymbol{t=1}$　　(答)

【4】(1) $\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|=4\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗して

$$\left|4\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=32$$
$$16\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2-24\vec{a}\cdot\vec{b}=32$$

ここで，$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$，$\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$ より

$$24\vec{a}\cdot\vec{b}=16\cdot 2+9\cdot 8-32$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ が最小 $\iff$ $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ が最小であり，

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+t^2\left|\vec{b}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}\quad\cdots(*)$$

ここで，与えられた条件より $\left|\vec{a}\right|^2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求める．
$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=6$ の両辺を 2 乗して，

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=36$$
$$\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=27\quad(\because\ \left|\vec{b}\right|=3)\quad\cdots①$$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2$ の両辺を 2 乗して，

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4$$
$$\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=-5\quad(\because\ \left|\vec{b}\right|=3)\quad\cdots②$$

① + ② より

$$2\left|\vec{a}\right|^2=22\qquad\therefore\ \left|\vec{a}\right|^2=11$$

① − ② より

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}=32\qquad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=8$$

ゆえに $(*)$ について，

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=11+9t^2+16t$$
$$=9\left(t+\frac{8}{9}\right)^2+\frac{35}{9}$$

よって，$t=-\frac{8}{9}$ のとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は最小となる．
したがって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ を最小にする t の値は，

$$\boldsymbol{t=-\frac{8}{9}}\qquad\text{(答)}$$

【5】(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

ここで $\vec{a}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を α $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とすると,

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=-12+12=0 \qquad \therefore\ \alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(答)}$$

同様に,

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}$ のなす角を β $(0\leqq\beta\leqq\pi)$ とすると,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}10\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=30-4=26$$

また,

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right|&=\sqrt{10^2+(-2)^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}\\ \left|\vec{a}\right|&=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\end{aligned}$$

であるから,

$$\cos\beta=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|}=\frac{26}{2\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \beta=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ より,

$$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+t\\3+2t\end{pmatrix},\quad \vec{a}-t\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\3-2t\end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-t\vec{b}\right)=0 \quad&\iff\quad \begin{pmatrix}2+t\\3+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-t\\3-2t\end{pmatrix}=0\\ &\iff\quad 4-t^2+9-4t^2=0\\ &\iff\quad 13-5t^2=0\end{aligned}$$

ゆえに

$$t=\pm\sqrt{\frac{13}{5}}=\pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{5}} \qquad \text{(答)}$$

【6】

ポイント

ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ である.
(2 つのベクトルの内積をとることで容易に証明できる)

(1) $\vec{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ より, $\vec{b}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である. また,

$$\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

であるから, 求める単位ベクトルは

$$\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ より,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p+1=2 & \cdots① \\ q+r=-1 & \cdots② \end{cases}$$

また, $\vec{x}\,/\!/\,\vec{y}$ より, $\vec{x}=k\vec{y}$ となる 0 でない実数 k が存在する. ゆえに,

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} \iff \begin{cases} p=k & \cdots③ \\ q=kr & \cdots④ \end{cases}$$

① より $p=1$, ③ より $k=1$. ④ に代入して

$$q=r \quad \cdots⑤$$

②, ⑤ を連立して解いて

$$q=r=-\frac{1}{2}$$

以上より,

$$\boldsymbol{p=1,\ q=r=-\frac{1}{2}} \qquad \text{(答)}$$

(3) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}$ より,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2, \quad \left|\vec{y}\right|=\sqrt{1+r^2}$$

また,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}=2r$$

であるから，

$$\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{y}}{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{y}\right|}=\cos 30^\circ \iff 2r=2\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff 2r=\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}$$

右辺は正であるから，左辺について $r>0$．この条件のもとで両辺を 2 乗して

$$4r^2=3(1+r^2) \iff r^2=3$$

$r>0$ を考え，

$$\boldsymbol{r=\sqrt{3}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=2-1=\mathbf{1} \qquad \text{(答)}$$

(2)

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}$$

(3)

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}} \quad (\because\ \sin\angle\mathrm{BAC}\geqq 0)$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}} \qquad \text{(答)}$$

(4)

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}} \qquad \text{(答)}$$

【8】与えられた条件は,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0} \quad \cdots(*)$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1,\quad \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\sqrt{2}$$

である．$(*)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

であるから,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

この両辺を 2 乗して,

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2&=\left|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\
\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2\\
4+1+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=2\\
\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=-\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

よって求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 1^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\\
&=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}} \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

【9】(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad (\because\ 0<\theta<\pi\text{より}, \sin\theta>0)\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}$$

(2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ とする．(1) の結果より

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2-2a_1b_1a_2b_2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}\\
&=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right| \qquad \text{〔証明終〕}
\end{aligned}
$$

【10】 点 P は，円 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ 上を動くから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix}$$

とおける．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+\cos\theta\\2+\sin\theta\end{pmatrix}=2+\cos\theta$$

ゆえに $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ を考え，求める最大値，最小値は

$$\begin{cases}\textbf{最大値 3}\quad \boldsymbol{(\cos\theta=1,}\quad \textbf{つまり P(3, 2) のとき)}\\ \textbf{最小値 1}\quad \boldsymbol{(\cos\theta=-1,}\ \textbf{つまり P(1, 2) のとき)}\end{cases}$$ (答)

【11】 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\quad\cdots(*)$ の両辺と $\vec{a}$ との内積をとると，

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{0}\quad&\Longleftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{0}\\
&\Longleftrightarrow\quad \left|\vec{a}\right|^2-1-1=0\\
&\Longleftrightarrow\quad \left|\vec{a}\right|^2=2\qquad \therefore\ \left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

また $(*)$ の両辺と $\vec{b}$ との内積をとると，

$$
\begin{aligned}
\vec{b}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\vec{0}\quad&\Longleftrightarrow\quad \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{0}\\
&\Longleftrightarrow\quad -1+\left|\vec{b}\right|^2-1=0\\
&\Longleftrightarrow\quad \left|\vec{b}\right|^2=2\qquad \therefore\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\theta=\frac{2}{3}\pi}$$ (答)

添削課題

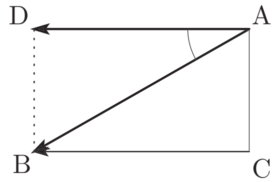
【1】AB $=2$，BC $=\sqrt{3}$，$\angle$BAC $=60^\circ$ である．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos 30^\circ=2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$　　(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|\cos 90^\circ=1\cdot\sqrt{3}\cdot 0=\mathbf{0}$　　(答)

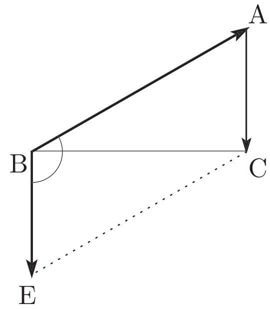
(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos 30^\circ\\&=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\mathbf{3}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$



(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\right|\cos 120^\circ\\&=2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=\mathbf{-1}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$



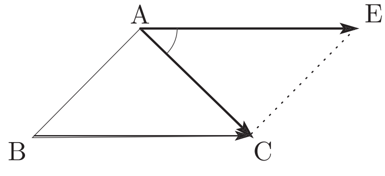
【2】$\triangle$ABC は二等辺三角形より，$\angle$BAC $=90^\circ$

したがって，$\angle$BAD $=\angle$DAC $=45^\circ$ となる．

これより，AD $=$ BD $=$ CD $=\sqrt{2}$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos 45^\circ=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{4}$　　(答)

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cos 45^\circ\\&=2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\mathbf{4}\quad\text{(答)}\end{aligned}$$



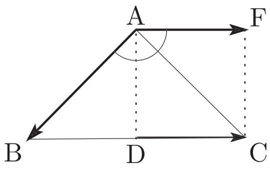
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos 45^\circ=2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}$ (答)

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right|\cos 135^\circ$$

$$=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$=\mathbf{-2}$ (答)



【3】(1) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{7}$ の両辺を 2 乗して,

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(\sqrt{7})^2 \iff \left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=7$$
$$\iff 4^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$$
$$\iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{6}$$ (答)

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると,

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{6}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから,

$\theta=\mathbf{30^\circ}$ (答)

(3) $\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|$ より,

$$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2=4^2-4\cdot 6+4\cdot(\sqrt{3})^2=4$$

$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|\geqq 0$ より,

$\therefore\ \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\mathbf{2}$ (答)

【4】$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0$ であればよいので,

$$\begin{aligned}(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\vec{a}\right|^2+(2+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\left|\vec{b}\right|^2=0\\ &\Longleftrightarrow \quad 1^2+(2+t)\cdot\frac{1}{2}+2t\cdot 1^2=0\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{5}{2}t+2=0\\ &\qquad\ \therefore\ \boldsymbol{t=-\frac{4}{5}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

【5】(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 1+1\cdot 2 = \mathbf{5} \qquad \text{(答)}$$

また,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

より, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とおくと,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より, $\quad \theta = \mathbf{45^\circ}$ 　(答)

(2)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(\sqrt{3}-1)+(-2)\cdot(\sqrt{3}+1) = \mathbf{-4} \qquad \text{(答)}$$

また,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

より, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とおくと,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

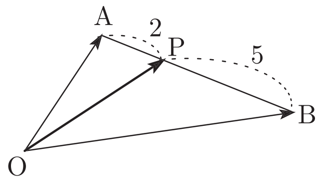
よって, $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より, $\quad \theta = \mathbf{120^\circ}$ 　(答)

問題

【1】位置ベクトルの基準点を O とし，求める点をそれぞれ，$\mathrm{P}(\vec{p})$，$\mathrm{Q}(\vec{q})$ とする．

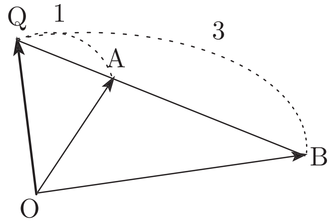
(1) 右の図で AP: PB= 2: 5 より，

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+5}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}\quad\text{(答)}$$



(2) 右の図で AQ: QB = 1: 3 より，

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$=\frac{(-3)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1-3}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}}\quad\text{(答)}$$

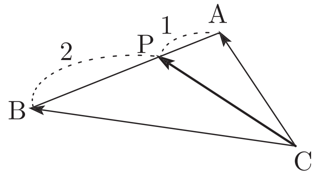


【2】(1)

$$\vec{p}=\frac{2\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}}{1+2}$$

であるから，$\mathrm{P}(\vec{p})$ は

線分 AB を 1 : 2 に内分する点　　(答)

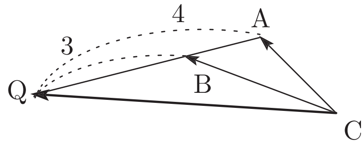


(2)

$$\vec{q}=\frac{-3\vec{a}+4\vec{b}}{4+(-3)}$$

であるから，$\mathrm{Q}(\vec{q})$ は

線分 AB を 4 : 3 に外分する点　　(答)

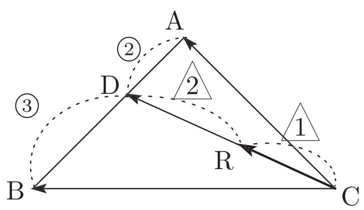


(3)

$$\vec{r}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{15}$$
$$=\frac{5}{15}\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{2+3}$$

であるから，$\mathrm{R}(\vec{r})$ は

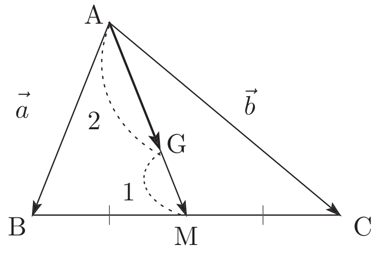
線分 AB を 2 : 3 に内分する点を D としたとき，
線分 CD を 1 : 2 に内分する点　　(答)



【3】辺 BC の中点を M とすると

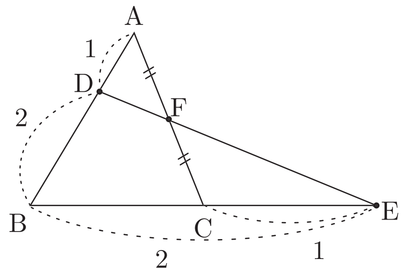
$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

であり，また重心 G は AM を 2: 1 に内分する点であるから，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}}\end{aligned}\qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とおくと，



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BD}}&=\frac{2}{3}\vec{a}\\\overrightarrow{\mathrm{BF}}&=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\\\overrightarrow{\mathrm{BE}}&=2\vec{c}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}&=\overrightarrow{\mathrm{BE}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=2\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\end{aligned}$$

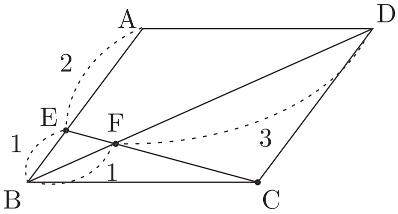
また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DF}}&=\overrightarrow{\mathrm{BF}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{a}\\&=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{6}\vec{a}\\&=\frac{1}{4}\left(2\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 D，E，F は同一直線上にある．　〔証明終〕

(2) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくと,

$$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\vec{b}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\vec{b}+\vec{d}}{4}$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$$



よって

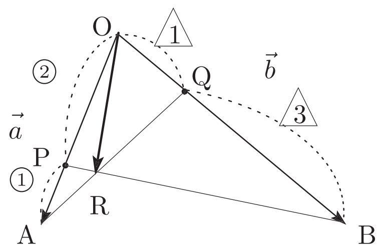
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\\&=\frac{3\vec{b}+\vec{d}}{4}-\frac{2}{3}\vec{b}\\&=\frac{1}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\\&=\vec{b}+\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{b}\\&=\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{d}\\&=4\left(\frac{1}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{d}\right)\\&=4\overrightarrow{EF}\end{aligned}$$

ゆえに 3 点 C, E, F は同一直線上にある.　〔証明終〕

【5】(1) $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$, $\overrightarrow{OR}=\vec{r}$ とする.



3 点 P, R, B が共線であるから,

PR: RB $= s:(1-s)$　(s は実数)

とおくと, $\vec{p}=\frac{2}{3}\vec{a}$ であり,

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-s)\vec{p}+s\vec{b}\\&=\frac{2}{3}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

また, 3 点 A, R, Q が共線であるから,

AR: RQ $= t:(1-t)$　(t は実数)

とおくと, $\vec{q}=\frac{1}{4}\vec{b}$ であり,

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(1-t)\vec{a}+t\vec{q}\\&=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{4}t\vec{b}\qquad\cdots②\end{aligned}$$

ここで，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して，

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}(1-s) = 1-t \\ s = \dfrac{1}{4}t \end{cases}$$

これを解いて，

$$s = \frac{1}{10},\ t = \frac{2}{5}$$

② に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}} \qquad \text{(答)}$$

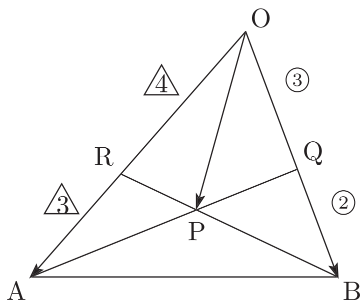
(2) (1) の結果より

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RQ} = t : (1-t) = \frac{2}{5} : \frac{3}{5} = \boldsymbol{2 : 3} \qquad \text{(答)}$$

【6】 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{5}\vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{4}{7}\vec{a}$$

である．



3 点 A,P,Q は共線であるから，

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PQ} = s : (1-s) \quad (s \text{ は実数})$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{3}{5}s\vec{b} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また，3 点 B,P,R は共線であるから，

$$\mathrm{RP} : \mathrm{PB} = t : (1-t) \quad (t \text{ は実数})$$

とおくと，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OR}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= \frac{4}{7}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases} 1 - s = \dfrac{4}{7}(1-t) \\ \dfrac{3}{5}s = t \end{cases}$$

これを解いて，

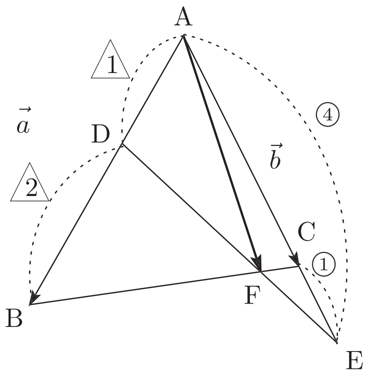
$$s = \frac{15}{23}, \quad t = \frac{9}{23}$$

① に代入して，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{8}{23}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{9}{23}\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \qquad \text{(答)}$$

【7】(1) 3 点 D($\vec{d}$), F($\vec{f}$), E($\vec{e}$) が共線であるから,

$$\mathrm{DF} : \mathrm{FE} = t : (1-t) \qquad (t \text{ は実数})$$



とおくと, $\vec{d} = \dfrac{1}{3}\vec{a}$, $\vec{e} = \dfrac{4}{3}\vec{b}$ であるから

$$\begin{aligned}\vec{f} &= (1-t)\vec{d} + t\vec{e} \\ &= \frac{1}{3}(1-t)\vec{a} + \frac{4}{3}t\vec{b} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

また, 3 点 B($\vec{a}$), F($\vec{f}$), C($\vec{b}$) が共線であるから,

$$\frac{1}{3}(1-t) + \frac{4}{3}t = 1$$

$$\therefore\ t = \frac{2}{3}$$

① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \boldsymbol{\frac{1}{9}\vec{a} + \frac{8}{9}\vec{b}} \qquad (答)$$

(2) (1) の結果より

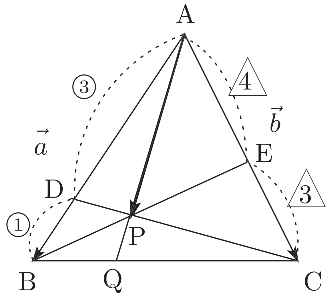
$$\mathrm{DF} : \mathrm{FE} = t : (1-t) = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \mathbf{2:1} \qquad (答)$$

(3) (1) の結果より

辺 BC を 8 : 1 に内分する点　　(答)

【8】3 点 D, P, C が共線であるから,

$$\mathrm{DP} : \mathrm{PC} = s : (1-s) \qquad (s \text{ は実数})$$



として,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad \cdots ① \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{3}{4}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{7}{4}s\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$

3 点 B, P, E が共線であるから,

$$\frac{3}{4}(1-s) + \frac{7}{4}s = 1$$

これを解いて

$$s = \frac{1}{4}$$

① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= \frac{9}{16}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また 3 点 A，P，Q が共線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$= \frac{9}{16}k\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{4}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

3 点 B，Q，C が共線であるから

$$\frac{9}{16}k + \frac{1}{4}k = 1$$

これを解いて

$$k = \frac{16}{13}$$

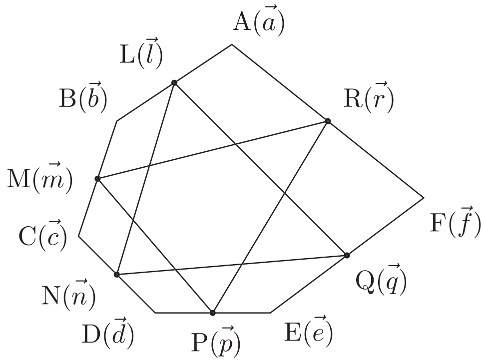
ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{13}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{13}{16}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

以上より，

点 Q は **BC** を **4: 9** に内分する点　　(答)
点 P は **AQ** を **13: 3** に内分する点　　(答)

【9】 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\ldots$，$\mathrm{F}(\vec{f})$，
点 $\mathrm{L}(\vec{l})$，$\mathrm{M}(\vec{m})$，$\ldots$，$\mathrm{R}(\vec{r})$，
$\mathrm{G}(\vec{g})$，$\mathrm{H}(\vec{h})$ とする．



$$\vec{l} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \vec{n} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2},\ \vec{q} = \frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}$$

であるから，

$$\vec{g} = \frac{\vec{l}+\vec{n}+\vec{q}}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} + \frac{\vec{e}+\vec{f}}{2}\right)$$
$$= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}$$

また

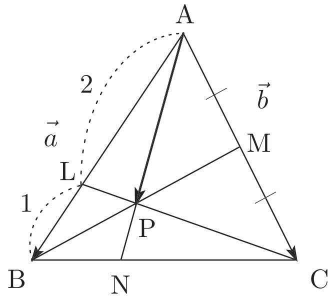
$$\vec{m} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \vec{p} = \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2},\ \vec{r} = \frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \frac{\vec{m}+\vec{p}+\vec{r}}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}+\frac{\vec{f}+\vec{a}}{2}\right)\\ &= \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{6}\end{aligned}$$

以上より，$\vec{g}=\vec{h}$ となり，点 G と点 H は一致する．〔証明終〕

【10】(1) A を始点として考える．



$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{2}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BM}} &= \overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &= \boldsymbol{-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CL}} &= \overrightarrow{\mathrm{AL}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}} \qquad \text{(答)}\end{aligned}$$

(2) 条件より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \vec{a}+m\overrightarrow{\mathrm{BM}}\\ &= \vec{a}+m\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= (1-m)\vec{a}+\frac{1}{2}m\vec{b} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \vec{b}+n\overrightarrow{\mathrm{CL}}\\ &= \vec{b}+n\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}\right)\\ &= \frac{2}{3}n\vec{a}+(1-n)\vec{b} \qquad \cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases}1-m=\dfrac{2}{3}n\\ \dfrac{1}{2}m=1-n\end{cases} \qquad \therefore\ \boldsymbol{m=\frac{1}{2},\ n=\frac{3}{4}} \qquad \text{(答)}$$

(3) (2) より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

であり，3 点 A，P，N は共線であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}$$

また 3 点 B，N，C は共線であるから

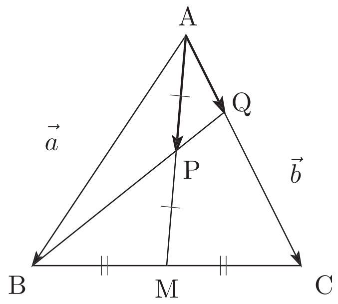
$$\frac{1}{2}k + \frac{1}{4}k = 1 \qquad \therefore\ k = \frac{4}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\vec{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

【11】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{m}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \vec{q}$ とする．

$\vec{m} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ であるから，条件より



$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{1}{2}\vec{m}\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\vec{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

また，

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BP}} \quad (\because\ 3\text{ 点 B，P，Q は共線})\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\ &= \vec{a} + s\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}\right)\\ &= \left(1 - \frac{3}{4}s\right)\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また 3 点 A，Q，C は共線より，

$$\vec{q} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = t\vec{b} \quad \cdots ②$$

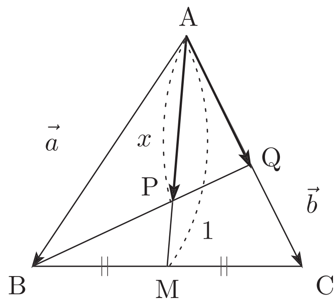
$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立より，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{3}{4}s = 0 \\ \dfrac{1}{4}s = t \end{cases} \qquad \therefore\ s = \frac{4}{3},\ t = \frac{1}{3}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

(2) 点 P は線分 AM 上の点であるから，$0 \leqq x \leqq 1$ であり，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AM}} = x$ より，



$$\begin{aligned}\vec{p} &= x\vec{m}\\ &= x\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\\ &= \frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

3 点 B，P，Q は共線より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BP}} \qquad (s \text{ は実数})$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\\ &= \vec{a} + s\left(\frac{x}{2}\vec{a} + \frac{x}{2}\vec{b} - \vec{a}\right)\\ &= \left(1 - s + \frac{sx}{2}\right)\vec{a} + \frac{sx}{2}\vec{b} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また 3 点 A，Q，C は共線より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \qquad (t \text{ は実数})$$

ゆえに

$$\vec{q} = t\vec{b} \qquad \cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② の係数を比較して

$$\begin{cases}1 - s + \dfrac{sx}{2} = 0\\ \dfrac{sx}{2} = t\end{cases} \qquad \therefore\ s = \frac{2}{2-x},\ t = \frac{x}{2-x}$$

ゆえに ② から

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{\frac{x}{2-x}\vec{b}} \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】(1) $\vec{p}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\boldsymbol{\vec{a}+2\vec{b}}}{\boldsymbol{3}}$ (答)

(2) $\vec{q}=\dfrac{-3\cdot\vec{a}+5\cdot\vec{b}}{5-3}=\dfrac{\boldsymbol{-3\vec{a}+5\vec{b}}}{\boldsymbol{2}}$ (答)

【2】$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とする.

(1)

$$\vec{c}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{C(-2,\ 5)}$ (答)

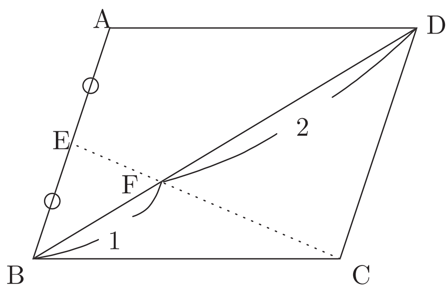
(2)

$$\vec{d}=\frac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{D}\left(\mathbf{5},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)$ (答)

【3】(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EF}}&=\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{1+2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}\end{aligned}$$ (答)



(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{EC}}&=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\\&=3\cdot\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{EC}}=3\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

であるから，3 点 E，F，C は同一直線上にある. 〔証明終〕

【4】(1) $\vec{g}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}}{\mathbf{3}}$　(答)

(2) $\vec{d} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{f} = \dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$ であるから

$$\vec{g}_2 = \frac{\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}}{3} = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}}{3} = \frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}}{\mathbf{3}} \qquad (答)$$

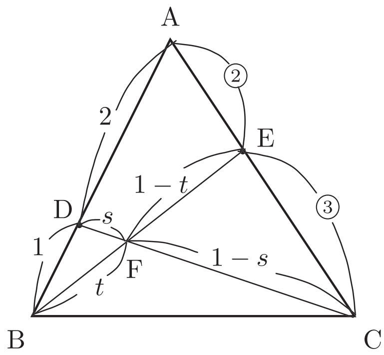
(3) まず

$$\vec{p} = \frac{-1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2-1} = -\vec{a}+2\vec{b},$$
$$\vec{q} = \frac{-1\cdot\vec{b}+2\cdot\vec{c}}{2-1} = -\vec{b}+2\vec{c},$$
$$\vec{r} = \frac{-1\cdot\vec{c}+2\cdot\vec{a}}{2-1} = -\vec{c}+2\vec{a}$$

であるから,

$$\vec{g}_3 = \frac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3} = \frac{\left(-\vec{a}+2\vec{b}\right)+\left(-\vec{b}+2\vec{c}\right)+\left(-\vec{c}+2\vec{a}\right)}{3}$$
$$= \frac{\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}}{\mathbf{3}} \qquad (答)$$

【5】



DF : FC $= s : (1-s)$
BF : FE $= t : (1-t)$

とすれば, C, F, D に注目して

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= (1-s)\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots①$$

B, F, E に注目して

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots②$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は一次独立であることと, ①, ② から

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}(1-s) = 1-t & \cdots③ \\ s = \dfrac{2}{5}t & \cdots④ \end{cases}$$

③, ④ を連立して解けば, $(s,\ t) = \left(\dfrac{2}{11},\ \dfrac{5}{11}\right)$

これを ② に代入して,

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{6}{11}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{11}\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \qquad (答)$$

M1JS/M1J
高 1 選抜東大数学
高 1 東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	