M3MA

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学Ｍ

１４章－１　空間図形（１）

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 2,\ 2) \mathbin{/\!/} (1,\ 1,\ 1)$ より，直線 AB のベクトル方程式は，t を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

と表せ，この直線上に点 $\mathrm{C}(a,\ 3,\ b-1)$ があるので

$$a = t-1,\ 3 = t-1,\ b-1 = t$$

$$\therefore\quad t = 4,\ \boldsymbol{a = 3,\ b = 5}\qquad \text{(答)}$$

(2) 点 P は xy 平面上の点なので，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおけ

$$\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

$$\mathrm{AP}^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$$

$$\mathrm{BP}^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6$$

ここで，△ ABP は正 3 角形であるから

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2 = \mathrm{AB}^2 \iff \mathrm{AP}^2 = \mathrm{AB}^2 \text{かつ} \mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 12 \ \cdots\cdots\ ① \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6 \ \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

②より

$$4x + 4y - 4 = 0 \qquad \therefore\quad y = -x + 1$$

であり，①に代入して

$$x^2 + (-x+1)^2 + 2x + 2(-x+1) + 2 = 12$$

$$\therefore\quad 2x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$\therefore\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$$

よって，$y = -\dfrac{1 \pm \sqrt{15}}{2} + 1 = \dfrac{1 \mp \sqrt{15}}{2}$ であるから，求める P の座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(\frac{1 \pm \sqrt{15}}{2},\ \frac{1 \mp \sqrt{15}}{2},\ 0\right)}\ \text{（複号同順）}\qquad \text{(答)}$$

【2】(1) 直線 l のベクトル方程式は，s を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3s \\ 2-s \\ -3+2s \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

と表される．また，直線 m のベクトル方程式は，t を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3t \\ -3+7t \\ 1-2t \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

と表される．①, ②より

$$\begin{cases} 1+3s = 4+3t \ \cdots\cdots \text{③} \\ 2-s = -3+7t \ \cdots\cdots \text{④} \\ -3+2s = 1-2t \ \cdots\cdots \text{⑤} \end{cases}$$

をみたす s, t の存在を調べる．すると，④より，$s = 5-7t$ であり，③に代入して

$$1+3(5-7t) = 4+3t$$

$\therefore \quad 12 = 24t$ すなわち $t = \dfrac{1}{2}$

であり，④より

$$s = 5 - 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$(s,\ t) = \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，⑤は成立するので，③，④，⑤を同時にみたす $(s,\ t)$ が存在する．すなわち，直線 l, m が交わり，その交点 P の座標は

$\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$ 　(答)

(2) (1) より $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right) \mathbin{/\!/} (11,\ 1,\ 0)$ であるから，直線 n のベクトル方程式は，u を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+11u \\ -10+u \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (12+11u,\ -10+u,\ 0)$ と表せ，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp (11,\ 1,\ 0)$ より

$$11\cdot(12+11u) + 1\cdot(-10+u) = 0$$

$\therefore \quad 122u = -122$ すなわち $u = -1$

であるから

$\mathbf{Q(1,\ -11,\ 0)}$ 　(答)

また

$\mathrm{OQ} = \sqrt{1+121} = \boldsymbol{\sqrt{122}}$ 　(答)

【3】(1) O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 3, -3) より

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{AB} = 3\sqrt{2}$$

であり，C(x, y, z) ($x > 0$) とおくと，$\mathrm{OC} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC} = 3\sqrt{2}$ より

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 18 \ \cdots\cdots \ ① \\ (x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 18 \ \cdots\cdots \ ② \\ x^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 18 \ \cdots\cdots \ ③ \end{cases}$$

① − ② より

$$6x - 9 + 6y - 9 = 0$$

$\therefore \quad x + y = 3$ すなわち $y = 3 - x \ \cdots\cdots$ ④

② − ③ より

$$-6x + 9 - 6z - 9 = 0$$

$\therefore \quad x + z = 0$ すなわち $z = -x \ \cdots\cdots$ ⑤

④，⑤を②に代入して

$$(x-3)^2 + x^2 + x^2 = 18$$

$$\therefore \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\therefore \quad (x-3)(x+1) = 0$$

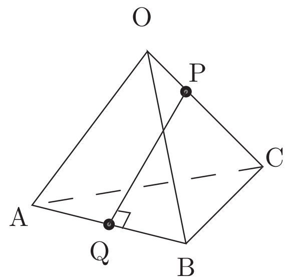
$x > 0$ より $x = 3$ であるから

C(3, 0, −3)　　(答)

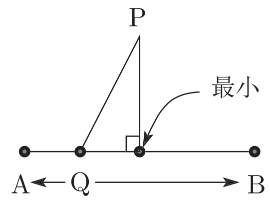
(2) 2 点 P，Q はそれぞれ線分 OC，AB 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ 0 < s < 1,\ 0 < t < 1$$

であり，点 P を固定して（s を定数として）考える．



点 P から AB に垂線を下ろしたとき，その垂線の足が線分 AB 上にあれば，点 Q がその垂線の足と一致するとき，PQ の長さは最小となる．そこで，点 P から AB に下ろした垂線の足について調べる．



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} - s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - 3s - 3t \\ 3 \\ 3s - 3t \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 - s - t \\ 1 \\ s - t \end{pmatrix}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると

$$-3(1 - s - t) + 0 \cdot 1 - 3(s - t) = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{2}$$

となり，つねに $0 < t < 1$ をみたすので，点 P から下ろした垂線の足は線分 AB 上

にある（線分 AB の中点である）．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 3s \\ 3 \\ 3s - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= \left(\frac{3}{2} - 3s\right)^2 + 3^2 + \left(3s - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 18\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 9 \end{aligned}$$

となるので，s を $0 < s < 1$ で変化させると，PQ の長さは $s = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小となり，その最小値は

$\sqrt{9} = \mathbf{3}$　　(答)

≪注≫上記の「解答」では図形処理，数式処理の両方を用いたが，図形的に

(i)P を固定し P から線分 AB に下ろした垂線の足 Q を求める

→(ii) (i) で求めた点 Q から線分 OC に垂線を下ろす

と考えてもよい．また，数式だけで処理するなら

$\mathrm{PQ}^2 = (3 - 3s - 3t)^2 + 3^2 + (3s - 3t)^2$

と 2 変数関数の最大値・最小値問題に帰着させることになる．なお，上式は

$\mathrm{PQ}^2 = 18\left(s - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 18\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + 9$

と変形でき，$s = t = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小とわかる．

【4】(1) $\mathrm{P}(1,\,0,\,1),\ \mathrm{Q}(1,\,1,\,0),\ \mathrm{R}(0,\,a,\,a)$

$\mathrm{L}(2,\,1,\,1),\ \mathrm{M}(1,\,a+1,\,a),\ \mathrm{N}(1,\,a,\,a+1)$

である．直線 LR，MP，NQ のベクトル方程式はそれぞれ，s，t，u を媒介変数として

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\a-1\\a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2s\\1+s(a-1)\\1+s(a-1)\end{pmatrix}\ \cdots\cdots ①$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a+1\\a\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-a-1\\1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a+1+t(-a-1)\\a+t(-a+1)\end{pmatrix}\ \cdots\cdots ②$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\\a+1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\1-a\\-a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a+u(1-a)\\a+1+u(-1-a)\end{pmatrix}\ \cdots\cdots ③$$

2 直線 LR，MP が交わるとすると，①，②より

$$\begin{cases}2-2s=1\ \cdots\cdots ④\\1+s(a-1)=a+1+t(-a-1)\ \cdots\cdots ⑤\\1+s(a-1)=a+t(-a+1)\ \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

をみたす s，t が存在する．ここで，④より，$s=\dfrac{1}{2}$ であり，⑤，⑥は

$$\begin{cases}1+\dfrac{1}{2}(a-1)=a+1+t(-a-1)\\1+\dfrac{1}{2}(a-1)=a+t(-a+1)\end{cases}\iff\begin{cases}(a+1)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0\\(a-1)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

となり，この 2 式を同時にみたすのは

$$t=\frac{1}{2}$$

のときである．逆に $s=t=\dfrac{1}{2}$ のとき，④，⑤，⑥は成立する．

よって，2 直線 LR，MP は交わり，その交点 D は

$$\mathrm{D}\left(1,\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)$$

となる．

また，直線 NQ が点 D を通るとすると

$$\begin{cases}1=1\\\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}=a+u(1-a)\\\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}=a+1+u(-1-a)\end{cases}\iff\begin{cases}(a-1)\left(u-\dfrac{1}{2}\right)=0\\(a+1)\left(u-\dfrac{1}{2}\right)=0\end{cases}$$

であり，上式を同時にみたすのは

$$u=\frac{1}{2}$$

のときである．逆に $u=\dfrac{1}{2}$ のとき上式は成立する．

よって，3 直線 LR，MP，NQ は 1 点 D で交わる．（証終）

(2) $\mathrm{DO}=\mathrm{DA}$ であることが必要で

$$1^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)^2=1^2+\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\iff\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

$$\iff 2(a-1)=0$$

$\therefore \quad a = 1$

このとき

$\mathrm{C}(0,\ 2,\ 2),\ \mathrm{D}(1,\ 1,\ 1)$

となり

$\mathrm{DO} = \mathrm{DA} = \mathrm{DB} = \mathrm{DC} = \sqrt{3}$

が成立する．したがって，求める a の値は

$\boldsymbol{a = 1}$　　(答)

である．

問題

【1】(1)　$|\alpha|=2,\ |\beta|=1,\ |\alpha+\beta|=\sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}3&=|\alpha+\beta|^2\\&=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\&=\alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}\\&=|\alpha|^2+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+|\beta|^2\\&=5+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta\end{aligned}$$

よって

$$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=-2$$

(2)　(1) より

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\frac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{\beta\overline{\beta}}=-2$$

であるから，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ の実部は -1 である．そこで

$$\frac{\alpha}{\beta}=-1+yi$$

とおくと，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=2$ より

$$(-1)^2+y^2=4 \qquad \therefore\ y=\pm\sqrt{3}$$

よって

$$\frac{\alpha}{\beta}=-1\pm\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right\} \qquad \text{（複号同順）}$$

(3)　$|\beta|=1$ であるから

$$|\alpha^n-\beta^n|=|\beta^n|\left|\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-1\right|=\left|\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n-1\right|$$

(2) より

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n=2^n\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\times n\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\times n\right)\right\}$$

n が 3 の倍数ならば

$$\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\times n\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\times n\right)=1$$

であるから

$$|\alpha^n-\beta^n|=2^n-1$$

n が 3 の倍数でないとき

$$\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\times n\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\times n\right)=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(ただし，複号は同順ではない) であるから

$$
\begin{aligned}
|\,\alpha^n-\beta^n\,| &= |\,(-2^{n-1}-1)\pm 2^{n-1}\cdot\sqrt{3}i\,| \\
&= \sqrt{(-2^{n-1}-1)^2+(2^{n-1}\cdot\sqrt{3})^2} \\
&= \sqrt{4^{n-1}+2^n+1+3\cdot 4^{n-1}} \\
&= \sqrt{4^n+2^n+1}
\end{aligned}
$$

【2】(1) $|z_k|=1 \iff z_k\overline{z_k}=1$ より

$$\overline{z_k}=\frac{1}{z_k}\quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

このとき，$w_1=z_1+z_2+z_3$ より，$w_1-z_1=z_3+z_2$ であるから

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{z_3+z_2}{z_3-z_2}\right)}=\frac{\overline{z_3}+\overline{z_2}}{\overline{z_3}-\overline{z_2}} \\
&= \frac{\dfrac{1}{z_3}+\dfrac{1}{z_2}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=\frac{z_2+z_3}{z_2-z_3} \\
&= -\frac{z_3+z_2}{z_3-z_2}=-\frac{w_1-z_1}{z_3-z_2}
\end{aligned}
$$

より，$\dfrac{w_1-z_1}{z_3-z_2}$ は 0 または純虚数である．

$\dfrac{w_1-z_1}{z_3-z_2}=0$ のとき，$w_1=z_1$ となり，$z_2+z_3=0$ であるから，z_2，z_3 は，円 C の直径の両端となり，$\triangle\, z_1z_2z_3$ は直角三角形である．このとき，z_1 は三角形の垂心に一致する．

$\dfrac{w_1-z_1}{z_3-z_2}\fallingdotseq 0$ のとき，$\dfrac{w_1-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，直線 z_1w_1 と直線 z_2z_3 は直交する．同様にして，直線 z_2w_1 と直線 z_3z_1，直線 z_3w_1 と直線 z_1z_2 の直交性も確認できるので，点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になる．（証終）

(2) $w_2=-\overline{z_1}z_2z_3$ より

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{-\overline{z_1}z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}\right)}=\frac{-z_1\overline{z_2z_3}-\overline{z_1}}{\overline{z_3}-\overline{z_2}} \\
&= \frac{-z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}\cdot\dfrac{1}{z_3}-\overline{z_1}}{\dfrac{1}{z_3}-\dfrac{1}{z_2}}=\frac{-z_1-\overline{z_1}z_2z_3}{z_2-z_3} \\
&= -\frac{-\overline{z_1}z_2z_3-z_1}{z_3-z_2}=-\frac{w_2-z_1}{z_3-z_2}
\end{aligned}
$$

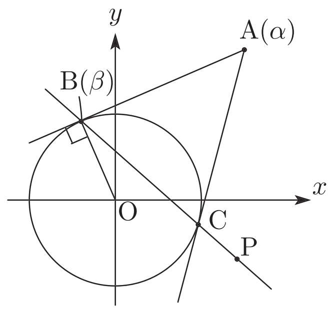
より，$w_2\fallingdotseq z_1$ であるから，$\dfrac{w_2-z_1}{z_3-z_2}$ は純虚数であるから，直線 z_1w_2 と直線 z_2z_3 は直交する．また

$$|w_2|=|-\overline{z_1}z_2z_3|=|\overline{z_1}||z_2||z_3|=1$$

であるから，点 w_2 は直線 z_2z_3 上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線と円 C の交点である．（証終）

【3】(1) OB $\perp$ AB だから

$$\arg\frac{\beta-\alpha}{\beta}=\pm\frac{\pi}{2} \quad \because \beta \fallingdotseq 0$$



したがって，$\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}=si \quad \cdots ①$ (s は 0 でない実数) とおけるので

$$\beta-\alpha=s\cdot\beta i \quad \Longleftrightarrow \quad (1-si)\beta=\alpha$$

よって

$$\beta=\frac{\alpha}{1-si} \quad (s\text{ は 0 でない実数}) \quad （証終）$$

(2) AB $=$ AC, OB $=$ OC だから

OA $\perp$ BC

直線 BC 上に点 P(z) があるので，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$\arg\frac{z-\beta}{\alpha}=\pm\frac{\pi}{2}$$

だから，$z-\beta=\alpha ti$ (t : 実数) とおける．

よって，$z=\beta+\alpha ti$ (t : 実数) とおける．　　（証終）

(3) (2) より

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}&=\bar{\alpha}(\beta+\alpha ti)+\alpha\overline{(\beta+\alpha ti)}\\&=\bar{\alpha}\beta+t|\alpha|^2 i+\alpha\bar{\beta}-t|\alpha|^2 i\\&=\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta} \quad \cdots ②\end{aligned}$$

(1) より，$\bar{\beta}=\dfrac{\bar{\alpha}}{1+si}$ だから

$$② = \bar{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1-si}+\alpha\cdot\frac{\bar{\alpha}}{1+si}=\frac{|\alpha|^2(1+si+1-si)}{(1-si)(1+si)}=\frac{2|\alpha|^2}{1+s^2}$$

①より

$$|s|=\left|\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right|=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}=\sqrt{|\alpha|^2-1} \quad \left(\because \mathrm{OB}=1,\ \mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OB}^2}\right)$$

したがって，一定値は

2

よって，$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}$ は点 A, P の位置に関係なく一定であり，値は 2 である．（証終）

【4】(1) $z=0$ を通り, 中心 α の円は $z\bar{z}=\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z$ であることを示す.

≪証明≫定点を C(α), 円周上の動点を P(z) とすると (図 1), 中心 α, 半径 $|\alpha|$ の円なので,

$$\begin{aligned}
\mathrm{CP}=\mathrm{OC} &\iff |z-\alpha|=|\alpha| \\
&\iff |z-\alpha|^2=|\alpha|^2 \\
&\iff (z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=\alpha\bar{\alpha} \\
&\iff z\bar{z}-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z=0 \\
&\iff z\bar{z}=\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z \quad \cdots Ⓐ
\end{aligned}$$

(証終)

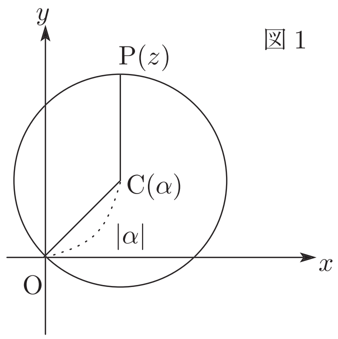


図 1

(2) (1) の円Ⓐが点 1 を通るので,

$$1=\alpha+\bar{\alpha} \quad \iff \quad \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=\frac{1}{2} \quad \cdots Ⓑ$$

Ⓑの左辺 $\dfrac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}$ は α の実部だから, Ⓑは「複素数 α の実部が $\dfrac{1}{2}$ 」であることを表している.
つまり, 点 C(α) は点 $\dfrac{1}{2}$ を通り実軸に垂直な直線上にある. (証終)

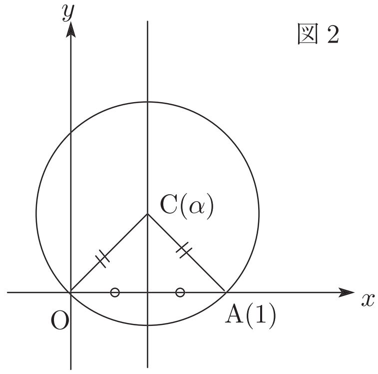


図 2

≪別解≫点 O(0) と点 A(1) を通る円の中心を C(α) とおくと (図 2),

$$\begin{aligned}
\mathrm{OC}=\mathrm{CA} &\iff |\alpha|=|\alpha-1| \\
&\iff |\alpha|^2=|\alpha-1|^2 \\
&\iff \alpha\bar{\alpha}=(\alpha-1)(\bar{\alpha}-1) \\
&\iff \alpha\bar{\alpha}=\alpha\bar{\alpha}-\alpha-\bar{\alpha}+1 \\
&\iff \alpha+\bar{\alpha}=1 \\
&\iff \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

以下同じ.

１５章－１　空間図形（２）

問題

【1】(1) 4 点 O，A，B，C が同一平面上にあるためには

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 2s \\ 1 = t \\ 5 = as + ct \end{cases}$$

をみたす実数 s，t が存在すればよく，第 1 式，第 2 式より

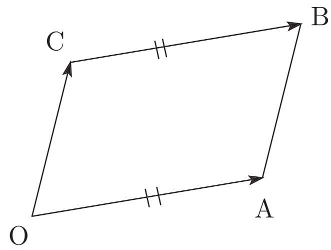
$s = 1$，$t = 1$

であるから，第 3 式より

$5 = a + c$　　$\therefore$ $\boldsymbol{c = 5 - a}$　(答)

(2) (1) より

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$



なので，4 角形 OABC は平行 4 辺形である．

よって，4 角形 OABC の面積 S は

$$S = \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$= \sqrt{(4 + a^2)(1 + c^2) - (ac)^2} = \sqrt{4 + a^2 + 4c^2}$$

であり，(1) より $c = 5 - a$ を代入すると

$$S = \sqrt{4 + a^2 + 4(5 - a)^2} = \sqrt{5a^2 - 40a + 104}$$

$$= \sqrt{5(a - 4)^2 + 24}$$

したがって，S の最小値は

$\sqrt{24} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$　(答)

【2】(1) A，B，C を通る平面 α 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ -s \\ -t \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x-1 = -s-t \ \cdots\cdots \ ① \\ y = -s \ \cdots\cdots \ ② \\ z = -t \ \cdots\cdots \ ③ \end{cases}$$

②，③より $s = -y$，$t = -z$ なので，①に代入して

$x - 1 = y + z \qquad \therefore \quad \boldsymbol{x - y - z = 1}$ 　(答) $\cdots\cdots$ ④

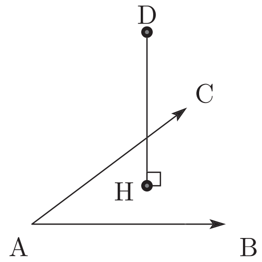
(2) H$(x,\ y,\ z)$ とおくと

DH $\perp$ (平面α) $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$かつ$\overrightarrow{\mathrm{DH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

であるから

$$\begin{cases} -1\cdot(x-1) - 1\cdot(y-1) + 0\cdot(z-1) = 0 \\ -1\cdot(x-1) + 0\cdot(y-1) - 1\cdot(z-1) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} y = 2 - x \ \cdots\cdots \ ⑤ \\ z = 2 - x \ \cdots\cdots \ ⑥ \end{cases}$$



よって，⑤，⑥を④に代入して

$$x - (2-x) - (2-x) = 1$$

$$\therefore \quad x = \frac{5}{3},\ y = \frac{1}{3},\ z = \frac{1}{3}$$

であるから，求める H の座標は

$$\mathbf{H}\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \text{(答)}$$

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 2,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1$

より，△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

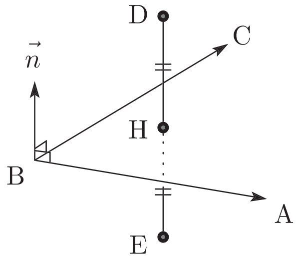
よって，求める体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad \text{(答)}$$

【3】2つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

に垂直なベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると



$$\begin{cases}x+y-z=0\\-x+y+z=0\end{cases}$$

$\therefore\quad y=0,\ x=z$

であるから，$\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ をとることができる．

ここで，点Dから3点A，B，Cを通る平面に下ろした垂線の足をHとすると，点DはHを通り，$\vec{n}$ を方向ベクトルとする直線上の点なので，k を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=k\vec{n}=\begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\3\\6+k\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ ①$$

と表される．また，点Hは平面ABC上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ (s,\ t \text{ は実数})$$

$$=s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s-t\\s+t\\-s+t\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ ②$$

と表される．したがって，①，②より

$$\begin{cases}s-t=k\ \cdots\cdots\ ③\\s+t=3\ \cdots\cdots\ ④\\-s+t=6+k\ \cdots\cdots\ ⑤\end{cases}$$

③，⑤より，$k=-3$ が求められ

$$\begin{cases}s-t=-3\\s+t=3\end{cases}\qquad\therefore\quad s=0,\ t=3$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+2\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}$$

$\therefore$ **E(−5, 3, 1)**　　(答)

【4】(1) △ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{1+0+2}{3},\ \frac{1+2+0}{3},\ \frac{6+0+6}{3}\right) \qquad \therefore\ \mathrm{G}(1,\ 1,\ 4)$$

であるから，G から yz 平面に下ろした垂線の足 H の座標は

H(0, 1, 4)　(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルを $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{cases}-x+y-6z=0\\x-y=0\end{cases}$$

$\therefore\ x=y,\ z=0$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．ここで，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\,/\!/\,\vec{n}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k\\k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-1\\k-1\\-6\end{pmatrix}$$

また，点 D は平面 ABC 上の点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$s,\ t$ は実数）

$$=s\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s+t\\s-t\\-6s\end{pmatrix}$$

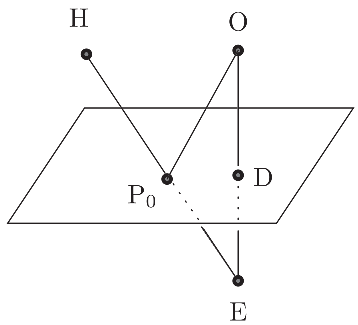
よって

$$\begin{cases}k-1=-s+t\\k-1=s-t\\-6=-6s\end{cases} \qquad \therefore\ s=1,\ t=1,\ k=1$$

であるから，求める D の座標は

D(1, 1, 0)　(答)

(3) 点 H は 3 角形 ABC の重心から O を含む yz 平面に下ろした垂線の足で，A，C は $x>0$ の部分にあり，点 B は yz 平面上の点であるから，O と H は平面 ABC に関して同じ側にある．ここで，平面 α に関して原点 O と対称な点を E とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

である．また △ODP ≡ △EDP より，OP = EP であるから

OP + PH = EP + PH ≧ EH（定数）

となるので，OP + PH が最小になるのは，上式の等号が成立するとき，すなわち，

点 P が平面 α と直線 EH の交点 $\mathrm{P_0}$ のときである．

よって，$\mathrm{P_0}$ は直線 EH 上の点なので，$\mathrm{P_0}(x,\ y,\ z)$ とすると，u を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2u \\ 2-u \\ 4u \end{pmatrix}$$

と表せる．また，点 $\mathrm{P_0}$ は平面 ABC 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s'\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t'\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (s',\ t'\text{は実数})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s'+t' \\ 1+s'-t' \\ 6-6s' \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} 2-2u = 1-s'+t' \\ 2-u = 1+s'-t' \\ 4u = 6-6s' \end{cases} \qquad \therefore \qquad u = \frac{2}{3},\ s' = \frac{5}{9},\ t' = \frac{2}{9}$$

であるから，求める P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \text{(答)}$$

問題

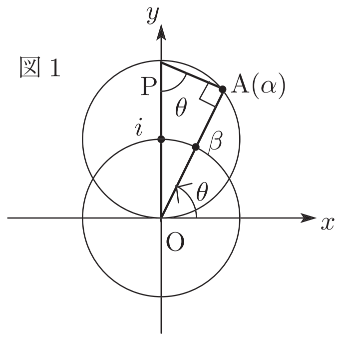
【1】(1) 図 1 のように 2 点 A, P を定めると, A は, OP を直径とする円周上にあって

$$\angle\text{OAP} = \frac{\pi}{2}$$

より，$\angle\text{OPA} = \theta$ なので, $\text{OP} = 2$ とあわせて

$$|\alpha| = \text{OA} = \text{OP}\sin\theta = 2\sin\theta$$

図 1



(2) (1) より

$$\alpha = 2\sin\theta(\cos\theta + i\sin\theta)$$

一方

$$\beta = \cos\theta + i\sin\theta$$

なので

$$\begin{aligned} i - i\beta^2 &= i - i(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = i - i(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \\ &= \sin 2\theta + (1 - \cos 2\theta)i = 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta \cdot i \\ &= 2\sin\theta(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

よって

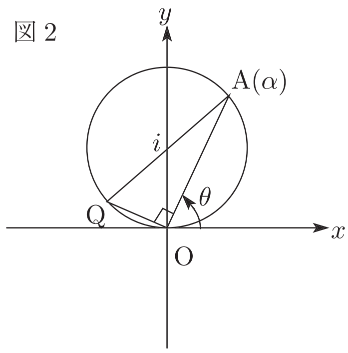
$$\alpha = i - i\beta^2$$

（証終）

(3) 題意の点を Q とおくと, △ OAQ は, 円 $|z - i| = 1$ に内接する直角三角形である．よって, 斜辺 AQ の中点は円の中心 i に他ならないので, Q を表す複素数を q とおけば,

$$\frac{\alpha + q}{2} = i \qquad \therefore \quad q = 2i - \alpha$$

図 2



【2】(1)

$$|z - 1| \leqq 1 \quad \cdots ①, \quad z + \bar{z} \geqq 2 \quad \cdots ②$$

とする．①は，点 1 を中心とする半径 1 の円の周上および内部を表す．次に, $z = x + yi$ とおけば

$$\begin{aligned} ② &\iff (x + yi) + (x - yi) \geqq 2 \\ &\iff x \geqq 1 \end{aligned}$$

より，②は直線 $x = 1$ およびその右側を表すので，z の存在範囲は図 1 の斜線部分である．ただし，境界を含む.

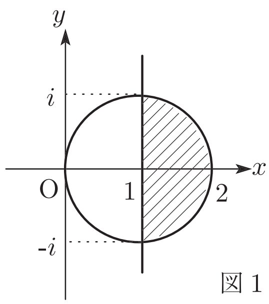


図 1

(2) $w=\dfrac{1}{z}$ より

$$z=\frac{1}{w}$$

これを①，②に代入して

$$①\iff\left|\frac{1}{w}-1\right|\leqq 1 \quad\iff\quad \frac{|1-w|}{|w|}\leqq 1$$

$$\iff |w-1|\leqq|w| \quad \cdots③$$

また

$$② \quad\iff\quad \frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}}\geqq 2$$

で，この両辺に $\dfrac{w\bar{w}}{2}$ $\left(=\dfrac{|w|^2}{2}>0\right)$ をかけると

$$\frac{\bar{w}}{2}+\frac{w}{2}\geqq w\bar{w}$$

$$\iff w\bar{w}-\frac{w}{2}-\frac{\bar{w}}{2}+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$$

$$\iff \left(w-\frac{1}{2}\right)\left(\bar{w}-\frac{1}{2}\right)\leqq\frac{1}{4}$$

$$\iff \left|w-\frac{1}{2}\right|\leqq\frac{1}{2} \quad (\text{ただし，}w\neq 0) \quad\cdots④$$

③は点 1 と原点を結ぶ線分の垂直 2 等分線およびその右側を，④は点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周上および内部 (原点を除く) をそれぞれ表すので，w の存在範囲は，図 2 の斜線部分である．ただし，境界を含む．

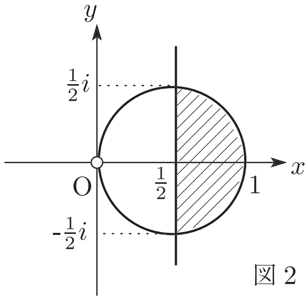


図 2

【3】(1) 条件より,

$$\left|\frac{(1+i)z+2-i}{z-2i}-(1+i)\right|=1$$

両辺に $|z-2i|\ (\neq 0)$ をかけて,

$$|(1+i)z+2-i-(1+i)(z-2i)|=|z-2i|$$

$$\iff |i|=|z-2i|$$

$$\therefore\quad C_1 : |z-2i|=1 \quad (z\neq 2i \text{ をみたす})$$

よって, C_1 は中心 $2i$, 半径 1 の円である.

(2) $i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ だから, iz は点 z を原点 O を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた点である. よって,

C_2 : 中心 -2, 半径 1 の円 $\cdots$①

$z+w$ は点 z を w だけ平行移動した点だから

C_3 : 中心 $2i+w$, 半径 1 の円 $\cdots$②

C_2 と C_3 は半径が等しいので C_2 と C_3 が共有点をもつのは,

(中心間距離) $\leqq 2$ (半径の和)

のときであるから,

$$|2i+w-(-2)|\leqq 2 \quad\iff\quad |w-(-2-2i)|\leqq 2$$

したがって, 求める w の範囲は中心 $-2-2i$, 半径 2 の円の周と内部である (図 2).

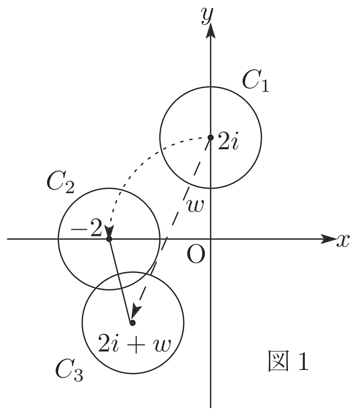


図 1

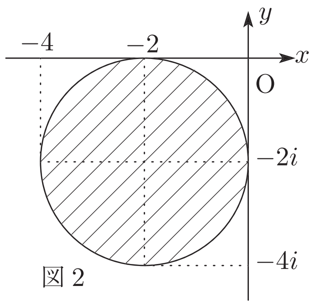


図 2

【4】

$$\begin{cases} z \fallingdotseq 0 & \cdots ① \\ w = z^2 - \dfrac{1}{z^2} & \cdots ② \\ w \text{ の実部が正} & \cdots ③ \end{cases}$$

③より

$$\frac{w+\bar{w}}{2} > 0 \iff w + \bar{w} > 0 \quad \cdots ③'$$

③′と②より

$$w + \bar{w} = z^2 - \frac{1}{z^2} + \bar{z}^2 - \frac{1}{\bar{z}^2} > 0$$

ここで, $z^2\bar{z}^2 = (z\bar{z})^2 = |z|^4 > 0$ ($\because$①) より, $z^2\bar{z}^2$ を両辺にかけると

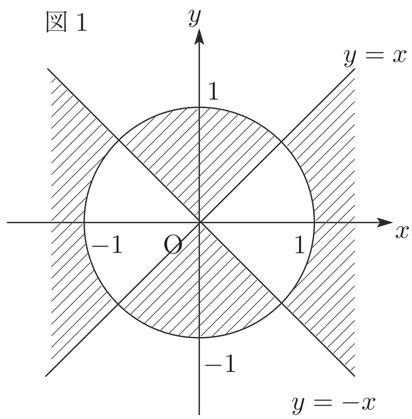
$$\begin{aligned} & z^4\bar{z}^2 - \bar{z}^2 + z^2\bar{z}^4 - z^2 > 0 \\ \iff & z^2\bar{z}^2(z^2+\bar{z}^2) - (z^2+\bar{z}^2) > 0 \\ \iff & (z^2+\bar{z}^2)(z^2\bar{z}^2-1) > 0 \\ \iff & (z^2+\bar{z}^2)(z\bar{z}-1)(z\bar{z}+1) > 0 \\ \iff & (z^2+\bar{z}^2)(|z|^2-1)(|z|^2+1) > 0 \\ \iff & (z^2+\bar{z}^2)(|z|^2-1) > 0 \quad \cdots Ⓐ \quad \because |z|^2+1>0 \end{aligned}$$

ここで $z = x + yi$ (x, y は実数) とおくとⒶは

$$\begin{aligned} & (x^2-y^2+x^2-y^2)(x^2+y^2-1) > 0 \\ \iff & (x-y)(x+y)(x^2+y^2-1) > 0 \quad \cdots Ⓐ' \end{aligned}$$

境界は直線 $y = x$, $y = -x$, 円 $x^2+y^2=1$ である. よって, 求める領域は図 1 の斜線部分になる. ただし, 境界は含まない.

図 1



≪別解≫極形式による解法

$$\begin{cases} z \fallingdotseq 0 & \cdots ① \\ w = z^2 - \dfrac{1}{z^2} & \cdots ② \\ w \text{ の実部が正} & \cdots ③ \end{cases}$$

①より $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$ とおけて, ②は

$$\begin{aligned} w &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) - \tfrac{1}{r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)} \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) - \tfrac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)\} \\ &= \left(r^2 - \tfrac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta + i\left(r^2 + \tfrac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned}$$

③より w の実部は

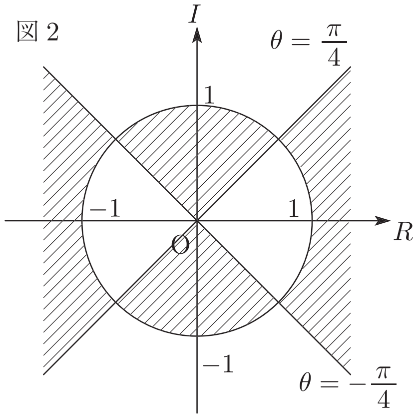
$$\begin{aligned} & \left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta > 0,\ r^2 > 0 \\ \iff & (r^4-1)\cos 2\theta > 0 \\ \iff & (r^2+1)(r+1)(r-1)\cos 2\theta > 0 \\ \iff & (r-1)\cos 2\theta > 0 \quad \cdots ④ \quad \because r^2+1>0,\ r+1>0 \end{aligned}$$

よって, 次の (i) または (ii).

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad r > 1 \text{ かつ } \cos 2\theta > 0 \\ \text{(ii)} \quad r < 1 \text{ かつ } \cos 2\theta < 0 \end{cases}$$

$r = 1$ は円を表し, $\cos 2\theta = 0$ は直線を表すので, 図 2 の斜線部分のようになる. ただし, 境界は含まない.

図 2



添削課題

【1】(1) $ax^2-2x+a=0$ の判別式を考えて

$D/4=1-a^2<0 \quad (\because a>1)$

より, この方程式の解は虚数解で $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\bar{\alpha})$ とおける.

解と係数の関係より

$$\alpha+\bar{\alpha}=\frac{2}{a}, \quad \alpha\bar{\alpha}=1 \quad \cdots①$$

ここに, $a>1$ より

$$0<\alpha+\bar{\alpha}<2,\ |\alpha|=1$$
$$\Longleftrightarrow 0<\mathrm{Re}(\alpha)<1,\ |\alpha|=1$$

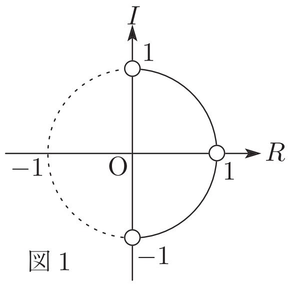


図 1

これが, $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\bar{\alpha})$ の描く図形でこれを図示すると図 1 のようになる.

(2) $x^2-2ax+1=0$ の判別式を考えて

$D/4=a^2-1>0$

より, $\mathrm{C}(\beta)$, $\mathrm{D}(\gamma)$ は実軸上の点で, 解と係数の関係より

$$\beta+\gamma=2a, \quad \beta\gamma=1 \quad \cdots②$$

ここに, α, $\bar{\alpha}$ は実軸対称だから, ABCD が同一円周上にあるとすると, CD がこの円の直径となる (図 2). したがって

$$\angle\mathrm{CAD}=90^\circ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma} \text{ が純虚数}$$

を示せばよい.

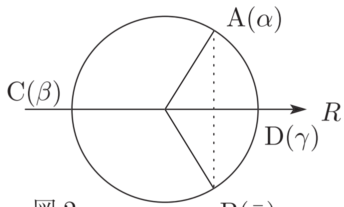


図 2

ここに, $\alpha \fallingdotseq \beta$, $\alpha \fallingdotseq \gamma$ だから

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}+\frac{\bar{\alpha}-\beta}{\bar{\alpha}-\gamma}=0 \quad (\because \beta,\ \gamma \text{は実数})$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\gamma)+(\alpha-\gamma)(\bar{\alpha}-\beta)=0 \quad \cdots(*)$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}(*)\ \text{の左辺} &= 2\alpha\bar{\alpha}-(\beta+\gamma)(\alpha+\bar{\alpha})+2\beta\gamma \\ &= 2-2a\cdot\frac{2}{a}+2 \quad (\because ①,\ ②) \\ &= 0 \ = \ \text{右辺}\end{aligned}$$

よって, 示された. 〔証明終〕

１６章－１　空間図形（３）

問題

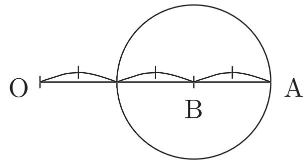
以下必要に応じてベクトル $(x,\,y,\,z)$ を縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて表す．

【1】(1) 始点を O に統一すると

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

$$\iff \left|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$



よって，線分 OA を $2:1$ に内分する点を B とすると，点 P は B を中心とし，半径 $\dfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ の円を描く．　　(答)

(2) 始点を O に統一すると

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

であり，両辺を 2 乗すると

$$4\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$

$$\iff 4\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-8\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2+4\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$

$$\iff 3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-12\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

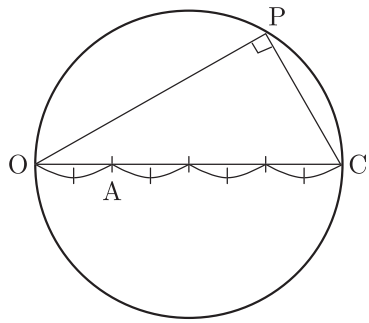
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-4\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$

ここで，線分 OA を $4:3$ に外分する点を C とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}} \text{ または } \mathrm{P}=\mathrm{O} \text{ または } \mathrm{P}=\mathrm{C}$$

であるから，点 P は線分 OA を $4:3$ に外分する点 C に対して，線分 OC を直径とする円をえがく．　　(答)

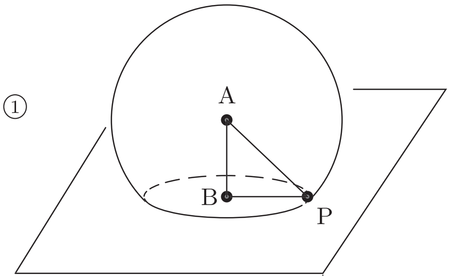


【2】求める球の中心を A とする．球と xy 平面の交わりによってできる円の方程式は

$x^2+y^2-4x+6y+4=0,\ z=0$

$\iff (x-2)^2+(y+3)^2=9,\ z=0$ $\cdots\cdots$ ①

であるから，①は $\mathrm{B}(2,\ -3,\ 0)$ を中心とし，半径 3 の円である．ここで，①上の点 P に対して



$\mathrm{AP}=5,\ \mathrm{BP}=3$

であり，$\mathrm{AB}\perp xy$ 平面すなわち $\mathrm{AB}\perp\mathrm{BP}$ であるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

したがって，A は B を通り xy 平面に垂直な直線上にあり，かつ z 座標が正であるから，求める球の中心の座標は

$\mathbf{A(2,\ -3,\ 4)}$ （答）

【3】直線 l のベクトル方程式は，t を媒介変数として

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at\\bt\\2-2t\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ ①$$

と表せる．ここで

$S:x^2+y^2+(z-1)^2=1$ $\cdots\cdots$ ②

とおくと，①と②の交点の座標は，①かつ②をみたす $(x,\ y,\ z)$ であり，①を②に代入して

$a^2t^2+b^2t^2+(1-2t)^2=1$

$\therefore\ \ (a^2+b^2+4)t^2-4t=0$

$\therefore\ \ t\left\{(a^2+b^2+4)t-4\right\}=0$

ここで，①において，$t=0$ に対応する点は $\mathrm{N}(0,\ 0,\ 2)$ であるから，$t\fallingdotseq 0$ であり

$$t=\frac{4}{a^2+b^2+4}$$

したがって，求める交点の座標は

$$\left(\frac{4a}{a^2+b^2+4},\ \frac{4b}{a^2+b^2+4},\ 2-\frac{8}{a^2+b^2+4}\right)$$

$$\therefore\ \ \left(\boldsymbol{\frac{4a}{a^2+b^2+4},\ \frac{4b}{a^2+b^2+4},\ \frac{2a^2+2b^2}{a^2+b^2+4}}\right)\quad\text{（答）}$$

【4】(1) $(x,\,y,\,z) \fallingdotseq (0,\,0,\,1),\ (0,\,0,\,-1)$ のもとで考える．$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$ なので

$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=1}$ **ただし，**$\boldsymbol{(x,\,y,\,z) \fallingdotseq (0,\,0,\,\pm 1)}$　　(答) …… ①

(2) 直線 AQ のベクトル方程式は，t を媒介変数とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ut \\ vt \\ 1-t \end{pmatrix}$$

であり，$x,\ y,\ z$ は点 P において①をみたすので，①に代入して

$$u^2t^2+v^2t^2+1-2t+t^2=1$$

$$\therefore\quad t\left\{(u^2+v^2+1)t-2\right\}=0$$

$(x,\,y,\,z) \fallingdotseq (0,\,0,\,1)$ より $t \fallingdotseq 0$ なので

$$t=\frac{2}{u^2+v^2+1}$$

したがって

$$\boldsymbol{x=\frac{2u}{u^2+v^2+1},\ y=\frac{2v}{u^2+v^2+1},\ z=1-\frac{2}{u^2+v^2+1}}$$ (答)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \vec{a}$ より，$x,\ y,\ z$ は

$$x+y+z=0$$

をみたすので，(2) より

$$\frac{2u}{u^2+v^2+1}+\frac{2v}{u^2+v^2+1}+1-\frac{2}{u^2+v^2+1}=0$$

$$\therefore\quad 2u+2v+u^2+v^2+1-2=0$$

$$\therefore\quad (u+1)^2+(v+1)^2=3\ \cdots\cdots\ ②$$

また，$(x,\,y,\,z) \fallingdotseq (0,\,0,\,-1)$ より

$$(u,\,v) \fallingdotseq (0,\,0)$$

であるが，これは②をみたす．

以上より点 Q は点 $\boldsymbol{(-1,\,-1,\,0)}$ **を中心とし，半径** $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ **の** $\boldsymbol{xy}$ **平面上の円をえがく．**　　(答)

問題

【1】(1) 求める軌跡は FF' の中点 O を中心とするだ円であり

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

とおける．ここで，焦点 F，F' は x 軸上にあるので，長軸の長さについて

$$2a=4 \qquad \therefore\quad a=2$$

また，焦点の x 座標について

$$\sqrt{a^2-b^2}=1 \qquad \therefore\quad b^2=3$$

したがって，求める軌跡は

だ円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1}$　　(答)

(2) $F(0,\ 4)$，$F'(0,\ -4)$ より求める軌跡は FF' の中点 O を中心とし，y 軸を主軸とする双曲線であるから

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

とおけて，距離の差が 4 より

$$2b=4 \qquad \therefore\quad b=2$$

また，焦点の y 座標について

$$\sqrt{a^2+b^2}=4 \qquad \therefore\quad a^2=12$$

したがって，求める軌跡は

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1}$　　(答)

(3) 漸近線 $y=2(x+2)$，$y=-2(x+2)$ の交点が $(-2,\ 0)$ であり，原点を通ることから主軸が x 軸なので，求める双曲線の方程式は

$$\frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

とおける．この双曲線が原点を通るので

$$\frac{4}{a^2}-\frac{0}{b^2}=\pm 1 \qquad \therefore\quad a^2=4\ (a^2=-4\ \text{は不適})$$

また，漸近線の傾きが ± 2 より

$$\frac{b}{a}=\pm 2 \qquad \therefore\quad b^2=16$$

したがって，求める双曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1} \qquad \text{(答)}$$

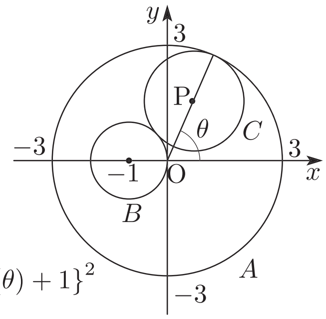
また，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$ の焦点は

$$\left(\pm\sqrt{2^2+4^2},\ 0\right) \qquad \therefore\quad \left(\pm 2\sqrt{5},\ 0\right)$$

であるから，求める焦点の座標は

$$\boldsymbol{\left(-2\pm 2\sqrt{5},\ 0\right)} \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) A に内接し，B に外接する円を C，その中心を P，$\angle \mathrm{PO}x=\theta$ とし，半径を $r(\theta)$ とおく．$\mathrm{OP}=3-r(\theta)$ であるから



$$\mathrm{P}((3-r(\theta))\cos\theta,\ (3-r(\theta))\sin\theta)$$

B の中心 $(-1,\ 0)$ と P の距離は $r(\theta)+1$ だから

$$\{(3-r(\theta))\cos\theta+1\}^2+\{(3-r(\theta))\sin\theta\}^2=\{r(\theta)+1\}^2$$

$$\therefore\quad r(\theta)=\frac{6\cos\theta+9}{2\cos\theta+8}$$

よって

$$3-r(\theta)=\frac{15}{2\cos\theta+8}\qquad\therefore\quad \mathrm{P}\left(\frac{15\cos\theta}{2\cos\theta+8},\ \frac{15\sin\theta}{2\cos\theta+8}\right)$$

ここで，$x=\dfrac{15\cos\theta}{2\cos\theta+8}$，$y=\dfrac{15\sin\theta}{2\cos\theta+8}$ とおくと，$x\fallingdotseq 0$ のとき

$$\cos\theta=\frac{-8x}{2x-15},\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$\frac{x^2+y^2}{x^2}=\frac{(2x-15)^2}{64x^2}$$

$$\therefore\quad \frac{(2x+1)^2}{16}+\frac{4y^2}{15}=1$$

$x=0$ のとき $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ であり，このとき複号同順で $y=\pm\dfrac{15}{8}$ となり，上式を満たすので，求める点 P の軌跡は

だ円 $\boldsymbol{\dfrac{(2x+1)^2}{16}+\dfrac{4y^2}{15}=1}$　　(答)

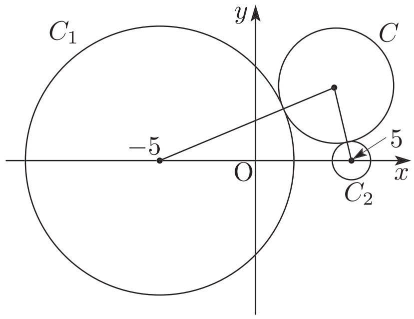
≪別解≫円 B の中心をFとし，円 C の半径を r とすると

$$\mathrm{OP}+\mathrm{FP}=(3-r)+(1+r)=4\ (\text{一定})$$

となるので，点 P は O，F を焦点とし，焦点からの距離の和が 4 のだ円である．これより，だ円の方程式を求めてもよい．

(2) C の半径を r とすると，C の中心と点 $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ の距離の差は

$r+7-(r+1)=6$



よって，点 $(a,\ b)$ の軌跡は $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ を焦点とする双曲線の $x>2$ の部分であり，その方程式は

$$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=1\ (x>2)$$

とおける．

焦点が $(-5,\ 0)$，$(5,\ 0)$ なので

$\sqrt{p^2+q^2}=5$

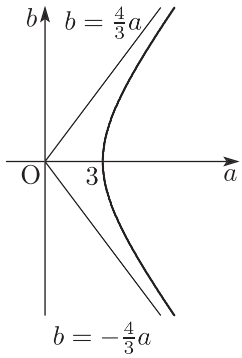
$\therefore\quad q^2=25-p^2$

点 $(3,\ 0)$ を通るので

$\dfrac{9}{p^2}=1\qquad\therefore\quad p^2=9,\ q^2=16$

よって，$a,\ b$ の満たす関係式は

$$\frac{a^2}{9}-\frac{b^2}{16}=1\ (a>2)$$



であり，これを ab 平面上に図示すると，**右図**のようになる．　(答)

(3) $\mathrm{A}(0,\ 2)$，円 C の中心を P，C と x 軸の接点を H とすると

$\mathrm{AP}=\mathrm{PH}$

であるから，点 P の軌跡は A を焦点，x 軸を準線とする放物線を描く．ここで，点 $(0,\ 1)$ を焦点とし，直線 $x=-1$ を準線とする放物線の方程式は

$x^2=4y\qquad\therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x^2$

であり，この放物線を y 軸正方向に 1 だけ平行移動すればよいので，求める点 P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{4}x^2+1}$　(答)

(4) $r>0$ と距離の条件より

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}:|x|=1:r \iff r^2\left\{(x-1)^2+y^2\right\}=x^2$$
$$\iff (r^2-1)x^2+r^2y^2-2r^2x+r^2=0\ \cdots\cdots\ (*)$$

(i) $\boldsymbol{0<r<1}$ のとき，$(*)$ は

$$(1-r^2)x^2+2r^2x-r^2y^2-r^2=0 \iff (1-r^2)\left(x+\frac{r^2}{1-r^2}\right)^2-r^2y^2=\frac{r^2}{1-r^2}$$

と変形できるので，点 P は双曲線上の点で，その方程式は

$$\boldsymbol{\frac{\left(x+\dfrac{r^2}{1-r^2}\right)^2}{\left(\dfrac{r}{1-r^2}\right)^2}-\frac{y^2}{\dfrac{1}{1-r^2}}=1}\qquad\text{(答)}$$

(ii) $\boldsymbol{r=1}$ のとき

$\boldsymbol{y^2=2x-1}$　(答)

(iii)　$\boldsymbol{r > 1}$ のとき，$(*)$ は

$$(r^2-1)\left(x-\frac{r^2}{r^2-1}\right)^2+r^2y^2=\frac{r^2}{r^2-1}$$

と変形できるので，点 P はだ円上の点で，その方程式は

$$\boldsymbol{\frac{\left(x-\dfrac{r^2}{r^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{r}{r^2-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\dfrac{1}{r^2-1}}=1} \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t$ より $-2 \leqq x \leqq 2,\ -3 \leqq y \leqq 3$ であり

$$\cos t = \frac{x}{2},\ \sin t = \frac{y}{3}$$

なので

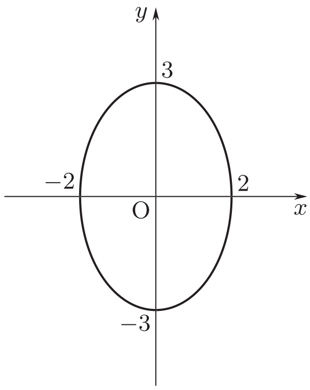
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

をみたす.

よって，点 $(x,\ y)$ は

だ円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$

を描く.　　(答)



(2) $x = t + \dfrac{1}{t}$ …… ①, $y = t - \dfrac{1}{t}$ …… ② とおくと，① + ②, ① − ② より

$$x + y = 2t \qquad \therefore\quad t = \frac{x+y}{2} \ \cdots\cdots ③$$

$$x - y = \frac{2}{t} \qquad \therefore\quad \frac{1}{t} = \frac{x-y}{2} \ \cdots\cdots ④$$

ここで，$-1 < t < 0,\ 0 < t$ より

$$-2 < x + y < 0,\ 0 < x + y$$

$$x - y < -2,\ 0 < x - y$$

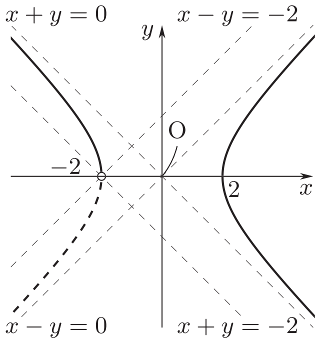
である．また，③, ④ より

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x-y}{2} = 1 \qquad \therefore\quad x^2 - y^2 = 4$$

よって，右図より点 $(x,\ y)$ は

双曲線 $\boldsymbol{x^2 - y^2 = 4}$ の $\boldsymbol{x + y > -2}$ の部分

を描く.　　(答)



(3) $x = \sin t \cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t,$

$$y = \sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

より

$$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2},\ -\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}$$

であり，また，$y = \sin t + \cos t$ の両辺を 2 乗して

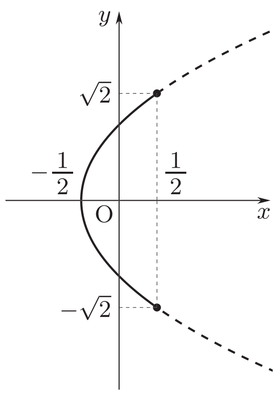
$$y^2 = \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t = 1 + 2\sin t\cos t$$

$$\therefore\quad y^2 = 2x + 1$$

よって，点 $(x,\ y)$ は

放物線 $\boldsymbol{y^2 = 2x + 1}$ の $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}}$ の部分

を描く.　　(答)



【4】(1) だ円 $3x^2+16y^2=1$ 上の点は

$$x=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}},\ y=\frac{\sin\theta}{4}$$

と表せ，点 $\left(\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}},\ \dfrac{\sin\theta}{4}\right)$ と直線 $3x+4y=4$ との距離 d は

$$d=\frac{\left|3\cdot\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}+4\cdot\dfrac{\sin\theta}{4}-4\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}\left|2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-4\right|$$

よって

$$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1\qquad\therefore\quad -6\leqq 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-4\leqq -2$$

すなわち

$$\frac{2}{5}\leqq d\leqq\frac{6}{5}$$

であるから，求める d の最大値と最小値は

最大値 $\boldsymbol{\frac{6}{5}}$，最小値 $\boldsymbol{\frac{2}{5}}$　　(答)

(2) $\mathrm{OP}\perp\mathrm{OQ}$ より

$$\mathrm{P}\left(2\cos\theta,\ 2\sin\theta\right),\ \mathrm{Q}\left(2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

としても一般性を失わない．このとき，P，Q に対応する点 P′，Q′ は

$$\mathrm{P}'\left(2\cos\theta,\ \sin\theta\right)$$

$$\mathrm{Q}'\left(2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)\qquad\therefore\quad \mathrm{Q}'\left(-2\sin\theta,\ \cos\theta\right)$$

であり

$$\cos\angle\mathrm{P'OQ'}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}\right|}=\frac{-4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}\sqrt{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{-3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(3\cos^2\theta+1)(3\sin^2\theta+1)}}=\frac{-3\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{9\sin^2\theta\cos^2\theta+4}}$$

ここで，$t=\sin\theta\cos\theta$ とおくと

$$\cos\angle\mathrm{P'OQ'}=\frac{-3t}{\sqrt{9t^2+4}},\ -\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}$$

であり，さらに $f(t)=\dfrac{-3t}{\sqrt{9t^2+4}}$ とおくと

$$f(-t)=-f(t)$$

すなわち，$f(t)$ は奇関数である．

そして，$t>0$ において

$$f(t)=\frac{-3}{\sqrt{9+\dfrac{4}{t^2}}}$$

となるので，$f(t)$ は単調に減少する関数である．よって，$f(0)=0$ および，$f(t)$ が奇関数であることを合わせると，$f(t)$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大で，その最大値は

$$\frac{\dfrac{3}{2}}{\sqrt{\dfrac{9}{4}+4}}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}\qquad\text{(答)}$$

M3MA

難関大数学Ⅲ

難関大理系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	