M3MB

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大数学Ⅰ Ａ Ⅱ Ｂ

難関大文系数学Ｍ

問題

【1】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2,\ 2,\ 2) \mathbin{/\!/} (1,\ 1,\ 1)$ より，直線 AB のベクトル方程式は，t を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

と表せ，この直線上に点 $\mathrm{C}(a,\ 3,\ b-1)$ があるので

$$a = t-1,\ 3 = t-1,\ b-1 = t$$

$$\therefore\quad t = 4,\ \boldsymbol{a = 3,\ b = 5}\qquad \text{(答)}$$

(2) 点 P は xy 平面上の点なので，$\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ とおけ

$$\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$$

$$\mathrm{AP}^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2$$

$$\mathrm{BP}^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6$$

ここで，$\triangle$ ABP は正 3 角形であるから

$$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2 = \mathrm{AB}^2 \iff \mathrm{AP}^2 = \mathrm{AB}^2 \text{かつ} \mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 12 \ \cdots\cdots \text{①} \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6 \ \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

②より

$$4x + 4y - 4 = 0 \qquad \therefore\quad y = -x + 1$$

であり，①に代入して

$$x^2 + (-x+1)^2 + 2x + 2(-x+1) + 2 = 12$$

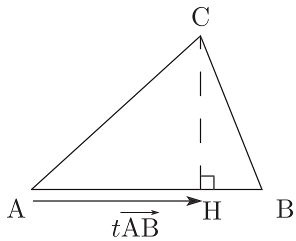
$$\therefore\quad 2x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$\therefore\quad x = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$$

よって，$y = -\dfrac{1 \pm \sqrt{15}}{2} + 1 = \dfrac{1 \mp \sqrt{15}}{2}$ であるから，求める P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{1 \pm \sqrt{15}}{2},\ \frac{1 \mp \sqrt{15}}{2},\ 0}\right) \text{（複号同順）}\qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (t は実数) と表せるので



$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2t\\-1+2t\\-2+2t\end{pmatrix}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$2(-2+2t)+2(-1+2t)+2(-2+2t)=0$$

$\therefore\quad 6t-5=0$ すなわち $\boldsymbol{t=\dfrac{5}{6}}$ (答)

(2) (1) より

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad\therefore\ \left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=\frac{1}{3}\sqrt{1+4+1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

また

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=2\sqrt{1+1+1}=2\sqrt{3}\ \text{ より }\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{2}}\qquad\text{(答)}$$

【3】(1) 2 点 A，B を通る直線のベクトル方程式は，s を媒介変数として

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s\\1+s\\3-2s\end{pmatrix}$$

ここで，xy 平面上の点 B' の z 座標は 0 なので

$$3-2s=0\qquad\therefore\quad s=\frac{3}{2}$$

よって，$\boldsymbol{\mathrm{B}'\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2},\ 0\right)}$ (答)

次に 2 点 A，C を通る直線のベクトル方程式は，t を媒介変数として

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1+2t\\3-t\end{pmatrix}$$

ここで，xy 平面上の点 C' の z 座標は 0 なので

$$3-t=0\qquad\therefore\quad t=3$$

よって，$\boldsymbol{\mathrm{C}'(1,\ 7,\ 0)}$ (答)

(2) $$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\right|=\frac{5}{2}\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}'}\right|=5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}'}=\frac{5}{2}\cdot1+\frac{5}{2}\cdot7=20$$

であるから

$$\triangle\mathrm{OB}'\mathrm{C}'=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2\left(5\sqrt{2}\right)^2-20^2}=\boldsymbol{\frac{15}{2}}\qquad\text{(答)}$$

【4】(1) O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 3, -3) より

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AB}=3\sqrt{2}$$

であり，C(x, y, z) ($x>0$) とおくと，$\mathrm{OC}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=18 \ \cdots\cdots \text{①} \\ (x-3)^2+(y-3)^2+z^2=18 \ \cdots\cdots \text{②} \\ x^2+(y-3)^2+(z+3)^2=18 \ \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

①－② より

$$6x-9+6y-9=0$$

$\therefore\ \ x+y=3$ すなわち $y=3-x$ ……④

②－③ より

$$-6x+9-6z-9=0$$

$\therefore\ \ x+z=0$ すなわち $z=-x$ ……⑤

④，⑤を②に代入して

$$(x-3)^2+x^2+x^2=18$$

$\therefore\ \ x^2-2x-3=0$

$\therefore\ \ (x-3)(x+1)=0$

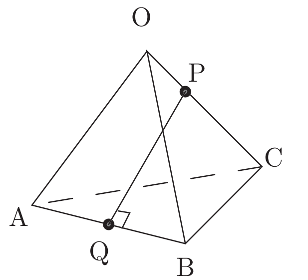
$x>0$ より $x=3$ であるから

C(3, 0, -3)　　(答)

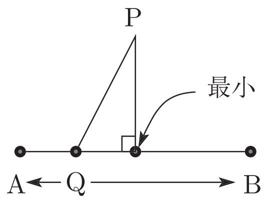
(2) 2 点 P，Q はそれぞれ線分 OC，AB 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ 0<s<1,\ 0<t<1$$

であり，点 P を固定して（s を定数として）考える．



点 P から AB に垂線を下ろしたとき，その垂線の足が線分 AB 上にあれば，点 Q がその垂線の足と一致するとき，PQ の長さは最小となる．そこで，点 P から AB に下ろした垂線の足について調べる．



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}-s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3-3s-3t\\3\\3s-3t\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1-s-t\\1\\s-t\end{pmatrix}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると

$$-3(1-s-t)+0\cdot1-3(s-t)=0 \qquad \therefore\ \ t=\frac{1}{2}$$

となり，つねに $0<t<1$ をみたすので，点 P から下ろした垂線の足は線分 AB 上

にある（線分 AB の中点である）．よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 3s \\ 3 \\ 3s - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2 &= \left(\frac{3}{2} - 3s\right)^2 + 3^2 + \left(3s - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 18\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 9 \end{aligned}$$

となるので，s を $0 < s < 1$ で変化させると，PQ の長さは $s = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小となり，その最小値は

$\sqrt{9} = \mathbf{3}$　　(答)

≪注≫

上記の「**解答**」では図形処理，数式処理の両方を用いたが，図形的に

(i) P を固定し P から線分 AB に下ろした垂線の足 Q を求める

→(ii) (i) で求めた点 Q から線分 OC に垂線を下ろす

と考えてもよい．また，数式だけで処理するなら

$$\mathrm{PQ}^2 = (3 - 3s - 3t)^2 + 3^2 + (3s - 3t)^2$$

と 2 変数関数の最大値・最小値問題に帰着させることになる．なお，上式は

$$\mathrm{PQ}^2 = 18\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 18\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 9$$

と変形でき，$s = t = \dfrac{1}{2}$ のとき，最小とわかる．

問題

ベクトル (x, y, z) を以下縦ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて表す.

【1】(1) 4 点 O，A，B，C が同一平面上にあるためには

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \iff \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2 = 2s \\ 1 = t \\ 5 = as + t \end{cases}$$

をみたす実数 s，t が存在すればよく，第 1 式，第 2 式より

$s = 1$，$t = 1$

であるから，第 3 式より

$5 = a + 1$　　　$\therefore$　$\boldsymbol{a = 4}$　　(答)

(2) (1) より

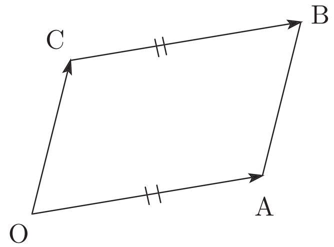
$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

なので, 4 角形 OABC は平行 4 辺形である.

よって，4 角形 OABC の S は

$$S = \sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$= \sqrt{20 \cdot 2 - 4^2} = \boldsymbol{2\sqrt{6}} \quad \text{(答)}$$



【2】(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{2},\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-1+3=2$

であるから，$\triangle$ OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 11-2^2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とおくと，$\left|\vec{n}\right|=1$ より

$$x^2+y^2+z^2=1\ \cdots\cdots\ ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{n},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\vec{n}$ より

$$\begin{cases}x+z=0\\-x+y+3z=0\end{cases}\qquad \therefore\quad z=-x,\ y=4x$$

これを①に代入して

$$x^2+16x^2+x^2=1\qquad \therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$$

よって

$$\boldsymbol{\vec{n}=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{6},\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \mp\frac{\sqrt{2}}{6}\right)}\text{（複号同順）}\qquad \text{(答)}$$

(3) 点 C から平面 OAB に下ろした垂線の足を H$(x,\ y,\ z)$ とすると，点 H は点 C を通り $\vec{n}\ /\!/\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線上の点なので，k を実数として

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+k\\2+4k\\1-k\end{pmatrix}$$

また，点 H は平面 OAB 上の点でもあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$s,\ t$ は実数）

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s-t\\t\\s+3t\end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases}2+k=s-t\\2+4k=t\\1-k=s+3t\end{cases}$$

第 2 式より $t=2+4k$ を第 1 式，第 3 式に代入して

$$\begin{cases}4+5k=s\\-5-13k=s\end{cases}\qquad \therefore\quad k=-\frac{1}{2},\ s=\frac{3}{2},\ t=0$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+16+1}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

したがって，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $\mathrm{AB}^2=(3-2)^2+\{(-2)-(-2)\}^2+(3-2)^2=2$

$\mathrm{BC}^2=(2-3)^2+\{(-1)-(-2)\}^2+(3-3)^2=2$

$\mathrm{CA}^2=(2-2)^2+\{(-2)-(-1)\}^2+(2-3)^2=2$

$\therefore\quad \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$

となるので，$\triangle$ ABC は正 3 角形である．（証終）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると

$x^2+y^2+z^2=1$ …… ①

であり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{n}$ より

$$\begin{cases}x+z=0\\y+z=0\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}x=-z\\y=-z\end{cases}$$

なので，①に代入して

$$3z^2=1\qquad\therefore\quad z=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，求める単位ベクトルは

$$\vec{n}=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \mp\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$ **(複号同順)**　(答)

(3) 点 $\mathrm{E}(x,\,y,\,z)$ は点 D を通り，$\vec{n}\,/\!/\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ を方向ベクトルとする直線上の点なので，

k を実数として

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+k\\-1+k\\2-k\end{pmatrix}$$

と表せ，点 E は平面 ABC 上の点でもあるから，s，t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$s$，$t$ は実数）

$$\therefore\quad\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+s\\-2+t\\2+s+t\end{pmatrix}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases}3+k=2+s\\-1+k=-2+t\\2-k=2+s+t\end{cases}\iff\begin{cases}s=k+1\\t=k+1\\-k=s+t\end{cases}$$

第 1 式，第 2 式を第 3 式に代入して

$$-k=k+1+k+1\qquad\therefore\quad k=-\frac{2}{3},\ s=t=\frac{1}{3}$$

よって

$$\mathbf{E}\left(\frac{7}{3},\,-\frac{5}{3},\,\frac{8}{3}\right)$$　(答)

(4) $\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = \dfrac{2}{3}\sqrt{1+1+1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

であり，(1) の結果より，4 面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}$$

よって，A，B，C，D，F を頂点とする 6 面体は平面 ABC に関して対称な図形なので，求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot 2 = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \text{(答)}$$

【4】(1) $\triangle$ ABC の重心 G の座標は

$$\mathrm{G}\left(\frac{1+0+2}{3},\ \frac{1+2+0}{3},\ \frac{6+0+6}{3}\right) \qquad \therefore\ \ \mathrm{G}\,(1,\ 1,\ 4)$$

であるから，G から yz 平面に下ろした垂線の足 H の座標は

H(0, 1, 4)　　(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ に垂直なベクトルを $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{cases}-x+y-6z=0\\ x-y=0\end{cases}$$

$\therefore\ \ x=y,\ z=0$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に垂直なベクトルの 1 つは $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ である．ここで，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} \mathbin{/\!/} \vec{n}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{n}$（$k$ は実数）

$$\therefore\ \ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}k\\k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k-1\\k-1\\-6\end{pmatrix}$$

また，点 D は平面 ABC 上の点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$s,\ t$ は実数）

$$=s\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s+t\\s-t\\-6s\end{pmatrix}$$

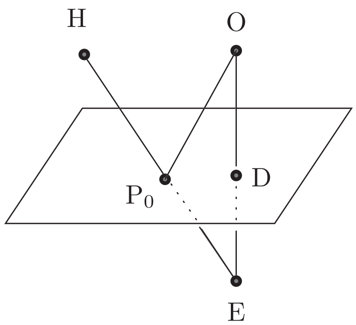
よって

$$\begin{cases}k-1=-s+t\\ k-1=s-t\\ -6=-6s\end{cases} \qquad \therefore\ \ s=1,\ t=1,\ k=1$$

であるから，求める D の座標は

D(1, 1, 0)　　(答)

(3) 点 H は 3 角形 ABC の重心から O を含む yz 平面に下ろした垂線の足で，A，C は $x>0$ の部分にあり，点 B は yz 平面上の点であるから，O と H は平面 ABC に関して同じ側にある．ここで，平面 α に関して原点 O と対称な点を E とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

である．また $\triangle$ ODP$\equiv\triangle$ EDP より，OP $=$ EP であるから

OP $+$ PH $=$ EP $+$ PH $\geqq$ EH（定数）

となるので，OP $+$ PH が最小になるのは，上式の等号が成立するとき，すなわち，

点 P が平面 α と直線 EH の交点 P_0 のときである．

よって，P_0 は直線 EH 上の点なので，$\mathrm{P}_0(x,\ y,\ z)$ とすると，u を媒介変数として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2u \\ 2-u \\ 4u \end{pmatrix}$$

と表せる．また，点 P_0 は平面 ABC 上の点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s'\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t'\overrightarrow{\mathrm{AC}} \ (s',\ t' \text{は実数})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s'+t' \\ 1+s'-t' \\ 6-6s' \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} 2-2u = 1-s'+t' \\ 2-u = 1+s'-t' \\ 4u = 6-6s' \end{cases} \qquad \therefore \qquad u = \frac{2}{3},\ s' = \frac{5}{9},\ t' = \frac{2}{9}$$

であるから，求める P の座標は

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\right) \qquad (\text{答})$$

添削課題

【1】(1) 点 P は平面 ABC 上の点なので

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$（$s$, t は実数）

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} 5c \\ c+1 \\ c-1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} 5c = 2s - 2t \ \cdots\cdots \ ① \\ c+1 = s + 3t \ \cdots\cdots \ ② \\ c-1 = -2s - 2t \ \cdots\cdots \ ③ \end{cases}$$

① − ③, ① + ③ より

$$s = \frac{4c+1}{4},\ t = \frac{-6c+1}{4}$$

であり，これを②に代入して

$$c+1 = \frac{4c+1}{4} + 3\cdot\frac{-6c+1}{4}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{c = 0}$　　(答)

(2) $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，$\left|\vec{e}\right| = 1$ より

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \cdots\cdots \ ④$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \vec{e}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \vec{e}$ より

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$\therefore\quad y = 2x,\ z = 2x \ \cdots\cdots \ ⑤$

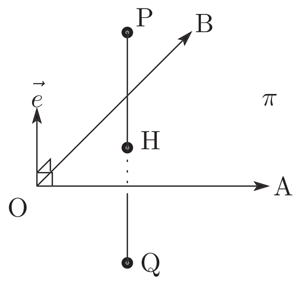
④, ⑤より

$$x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 1 \qquad \therefore\quad x = \pm\frac{1}{3}$$

であるから

$$\boldsymbol{\vec{e} = \left(\pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{3}\right)}$$ **（複号同順）**　　(答)

(3) 点 P から平面 π に下ろした垂線の足を H とすると H は点 P を通り $\vec{e}$ に平行な直線上の点なので，k を媒介変数として



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5c \\ c+1 \\ c-1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5c+k \\ c+1+2k \\ c-1+2k \end{pmatrix}$$

また，点 H は平面 π 上の点でもあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \vec{e} \,/\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ より

$$5c + k + 2(c+1+2k) + 2(c-1+2k) = 0 \qquad \therefore\quad k = -c$$

よって

$\mathrm{H}(4c,\ 1-c,\ -1-c)$

すると，点 H は線分 PQ の中点，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから

$\boldsymbol{\mathrm{Q}(3c,\ 1-3c,\ -1-3c)}$ 　　(答)

＜別解＞　点 H が平面 π 上にあるための条件は (1) と同様に考えて

$$\begin{pmatrix} 5c+k \\ c+1+2k \\ c-1+2k \end{pmatrix} = s'\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \ (s',\ t' \text{ は実数})$$

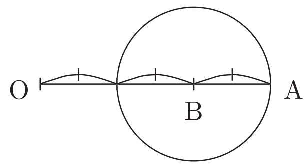
$$\begin{cases} 5c+k = 2s'-2t' \\ c+1+2k = s'+3t' \\ c-1+2k = -2s'-2t' \end{cases}$$

$$\therefore \quad k = -c,\ s' = \frac{5c+1}{4},\ t' = \frac{1-3c}{4}$$

のように導くこともできる.

問題

【1】(1) 始点を O に統一すると



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

$$\iff \left|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

$$\iff \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

よって，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を B

とすると，点 P は B を中心とし，半径 $\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ の円を描く．　　(答)

(2) 始点を O に統一すると

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

であり，両辺を 2 乗すると

$$4\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$

$$\iff 4\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-8\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2+4\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$

$$\iff 3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-12\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

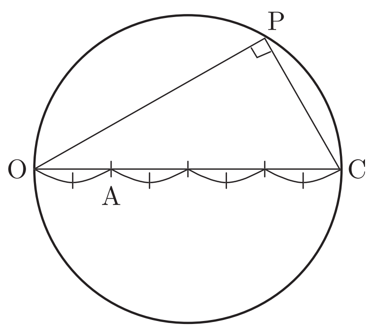
$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-4\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$

ここで，線分 OA を 4 : 3 に外分する点を C とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$$

$$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CP}}\ \text{または}\ \mathrm{P}=\mathrm{O}\ \text{または}\ \mathrm{P}=\mathrm{C}$$

であるから，点 P は線分 OA を 4 : 3 に外分する点 C に対して，線分 OC を直径とする円をえがく．　　(答)



【2】O(0, 0, 0)，A(−4, 0, 0)，B(0, 10, −14)，C(−4, 0, −14) を通る球面の方程式を

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

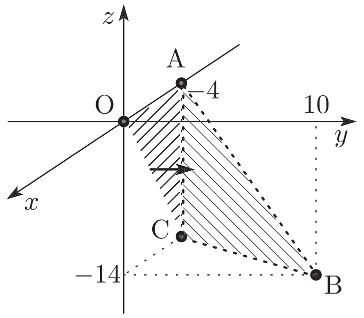
とおくと

$$\begin{cases} d=0 \\ 16-4a+d=0 \\ 100+196+10b-14c+d=0 \\ 16+196-4a-14c+d=0 \end{cases} \qquad \therefore\ d=0,\ a=4,\ c=14,\ b=-10$$

よって，求める方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2+4x-10y+14z=0} \qquad (答)$$

＜別解＞　求める球面の平面による切り口を考える．



O，A，C を含む平面（xz 平面）による切り口は 3 点 O，A，C を通る円であり，OA ⊥ AC より，その円の中心の座標は

OC の中点 M(−2, 0, −7)

よって，求める球面の中心は M を通り xz 平面に垂直な直線上にあるので

$$(-2,\ y_0,\ -7)$$

次に A，B，C を含む平面による切り口は 3 点 A，B，C を通る円であり，AC ⊥ BC より，その円の中心は

AB の中点 N(−2, 5, −7)

であり，求める球面の中心は，N を通り平面 ABC に垂直な直線上にある．ここで，M を通り，xz 平面に垂直な直線は N を通るので，求める球面の中心は

N(−2, 5, −7)

に他ならない．また，半径は中心と O の距離を考えて

$$\sqrt{4+25+49}=\sqrt{78}$$

以上より求める球面の方程式は

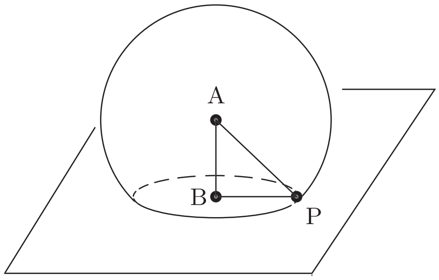
$$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-5)^2+(z+7)^2=78} \qquad (答)$$

【3】求める球の中心を A とする．球と xy 平面の交わりによってできる円の方程式は

$$x^2+y^2-4x+6y+4=0,\ z=0$$

$$\Longleftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=9,$$

$$z=0 \cdots\cdots ①$$



であるから，①は B$(2,\ -3,\ 0)$ を中心とし，半径 3 の円である．ここで，①上の点 P に対して

$\mathrm{AP}=5,\ \mathrm{BP}=3$

であり，AB$\perp$ xy 平面すなわち $\mathrm{AB}\perp\mathrm{BP}$ であるから

$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{BP}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

したがって，A は B を通り xy 平面に垂直な直線上にあり，かつ z 座標が正であるから，求める球の中心の座標は

A(2, −3, 4)　　(答)

【4】(1)

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|^2 = (x+3)^2+(y+1)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2+6x+2y+10$$

$$\left|\overrightarrow{PB}\right|^2 = (x-1)^2+(y-1)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2-2x-2y+2$$

$$\left|\overrightarrow{PC}\right|^2 = (x+1)^2+(y-3)^2+z^2 = x^2+y^2+z^2+2x-6y+10$$

よって $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right| = \left|\overrightarrow{PC}\right| \iff \left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PB}\right|$ かつ $\left|\overrightarrow{PA}\right| = \left|\overrightarrow{PC}\right|$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+6x+2y+10 = x^2+y^2+z^2-2x-2y+2 \\ x^2+y^2+z^2+6x+2y+10 = x^2+y^2+z^2+2x-6y+10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x+y+2=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

であるから

$$x = -\frac{4}{3},\ y = \frac{2}{3}$$

すると

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ z\right),\ \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3},\ z\right)$$

であり，②より

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = -\frac{35}{9}-\frac{5}{9}+z^2 = 0 \qquad \therefore\ \ z = \pm\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

以上より

$$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \pm\frac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{3}}\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \pm\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$, $\overrightarrow{CP} = \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{7}{3},\ \pm\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$（複号同順）より

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP} = -\frac{5}{9}-\frac{35}{9}+\frac{40}{9} = 0$$

よって

$\mathrm{AP} \perp \mathrm{CP}$ すなわち　$\angle\mathrm{APC} = 90^\circ$

である.　（証終）

(3)

$$\left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{49+1+40} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP} = \frac{7}{9}+\frac{7}{9}+\frac{40}{9} = 6$$

であるから

$$\cos\angle\mathrm{BPC} = \frac{6}{\sqrt{10}\sqrt{10}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \qquad \text{(答)}$$

M3MB

難関大数学Ⅰ A Ⅱ B

難関大文系数学 M

Z-KAI

会員番号		氏　名	