M2JS/M2J

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高２選抜東大数学

高２東大数学

問題

【1】(1) 関数は

$$y = (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 1$$

と変形できるから，$3^x = t$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 3t + 1 \\ &= \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また，t の変域は

$$t > 0 \quad \cdots ②$$

である．①,② より，y のとり得る値の範囲は

$$y \geqq -\frac{5}{4} \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数は正だから

$$x + 2 > 0,\ 5 - 2x > 0$$

$$\therefore \quad -2 < x < \frac{5}{2} \quad \cdots ③$$

このとき，関数は

$$y = \log_{0.5}(x+2)(5-2x)$$

と変形できるから

$$f(x) = (x+2)(5-2x)$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + x + 10 \\ &= -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{81}{8} \quad \cdots ④ \end{aligned}$$

③, ④ より，$f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$0 < f(x) \leqq \frac{81}{8}$$

であるから，y のとり得る値の範囲は

$$y \geqq \log_{0.5}\frac{81}{8}$$

整理して

$$y \geqq 3 - 4\log_2 3 \qquad \text{(答)}$$

(3) 底の変換公式より

$$\log_2 x = \frac{\log_4 x}{\log_4 2} = 2\log_4 x$$

であることに注意すると，関数は

$$y = (\log_4 x)^2 + 2\log_4 x$$

と変形できるから，$\log_4 x = t$ とおくと

$$y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 \quad \cdots ⑤$$

となり，x がすべての正の値をとるとき

「t はすべての実数値をとる」$\cdots$⑥

⑤, ⑥ より y のとり得る値の範囲は

$$y \geqq -1 \qquad \text{(答)}$$

【2】(1) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2$ だから $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = t$ とおくと不等式は

$$\begin{aligned} & t^2 - 4t + 3 < 0 \\ \therefore\quad & (t-1)(t-3) < 0 \\ \therefore\quad & 1 < t < 3 \end{aligned}$$

と変形できる．これから

$$1 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 3$$

となり，$t = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ は x の減少関数だから

$$-1 < x < 0 \qquad \text{(答)}$$

(2) 真数は正だから

$$x+1 > 0,\ 5-x > 0,\ 3x-1 > 0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{3} < x < 5 \quad \cdots ①$$

このとき，不等式は

$$\begin{aligned} & \log_2(x+1)(5-x) > \log_2(3x-1) \\ \therefore\quad & (x+1)(5-x) > 3x-1 \\ \therefore\quad & x^2 - x - 6 < 0 \\ \therefore\quad & (x+2)(x-3) < 0 \\ \therefore\quad & -2 < x < 3 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

と変形できる．よって，① かつ ② より

$$\frac{1}{3} < x < 3 \qquad \text{(答)}$$

(3) 真数と底についての条件より

$$x < 12 \text{ かつ } x > 0 \text{ かつ } x \neq 1$$
$$\therefore \quad 0 < x < 1 \text{ または } 1 < x < 12$$

である．

(i) $0 < x < 1$ のとき，底が x の対数関数は減少関数であるから

$$\begin{aligned} & \log_x(12 - x) < 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 12 - x > x^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + x - 12 < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x + 4)(x - 3) < 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -4 < x < 3 \end{aligned}$$

これと $0 < x < 1$ より

$$0 < x < 1 \ \cdots ③$$

(ii) $1 < x < 12$ のとき，底が x の対数関数は増加関数であるから

$$\begin{aligned} & \log_x(12 - x) < 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 12 - x < x^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2 + x - 12 > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x + 4)(x - 3) > 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x < -4 \text{ または } x > 3 \end{aligned}$$

これと $1 < x < 12$ より

$$3 < x < 12 \ \cdots ④$$

よって，③ または ④ より

$$0 < x < 1 \text{ または } 3 < x < 12 \qquad \text{(答)}$$

【3】(1) $0 < a < 1$ のとき $\log_a x$ は x の減少関数だから

$$\log_{0.5} 3 < \log_{0.5} 1 \qquad \therefore \quad \log_{0.5} 3 < 0$$

また，$a > 1$ のとき $\log_a x$ は x の増加関数だから

$$\log_7 1 < \log_7 5 < \log_7 7 \qquad \therefore \quad 0 < \log_7 5 < 1$$

が成立し，また

$$\log_4 4 < \log_4 6 \qquad \therefore \quad 1 < \log_4 6$$

が成立する．

以上の結果をまとめると

$$\log_{0.5} 3 < 0 < \log_7 5 < 1 < \log_4 6$$
$$\therefore \quad \log_{0.5} 3 < \log_7 5 < \log_4 6 \qquad \text{(答)}$$

(2) $5^2 = 25,\ 3^3 = 27$ より $5^2 < 3^3$ だから

$$\log_3 5^2 < 3 \quad \therefore \quad \log_3 5 < \frac{3}{2} \ \cdots ①$$

$2^3 = 8,\ 3^2 = 9$ より $2^3 < 3^2$ だから

$$3 < \log_2 3^2 \quad \therefore \quad \frac{3}{2} < \log_2 3 \ \cdots ②$$

$3^5 = 243,\ 2^8 = 256$ より $3^5 < 2^8$ だから

$$\log_2 3^5 < 8 \quad \therefore \quad \log_2 3 < \frac{8}{5} \ \cdots ③$$

$3^3 = 27,\ 2^5 = 32$ より $3^3 < 2^5$ だから

$$3 < \log_3 2^5 \quad \therefore \quad \frac{3}{5} < \log_3 2$$

両辺に 1 を加えると

$$\frac{8}{5} < 1 + \log_3 2 = \log_3 3 + \log_3 2 = \log_3 6$$
$$\therefore \quad \frac{8}{5} < \log_3 6 \ \cdots ④$$

$2^3 = 8, 3^2 = 9$ より $2^3 < 3^2$ だから

$$\log_3 2^3 < 2 \quad \therefore \quad \log_3 2 < \frac{2}{3}$$

両辺に 1 を加えると，上と同様にして

$$\log_3 6 < \frac{5}{3} \ \cdots ⑤$$

① から ⑤ より

$$\log_3 5 < \frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{8}{5} < \log_3 6 < \frac{5}{3} \qquad \text{(答)}$$

【4】まず, 真数条件よりすべての実数 x に対して

$$\begin{cases} ax^2+2x+2>0 & \cdots ① \\ x^2+5x+7>0 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立たなければならない. すると, ①において $a>0$ より

$$1^2-2a<0 \qquad \therefore \quad a>\frac{1}{2} \quad \cdots ③$$

また, ②については

$$x^2+5x+7=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

より, つねに成り立つ.

次に, 与えられた不等式は $x=0$ のときにも成り立つので

$$\log_a 2>\log_a 2+\log_a 7 \qquad \therefore \quad \log_a 7<0$$

これより, $0<a<1$ でなければならないから, ③と合わせて

$$\frac{1}{2}<a<1 \quad \cdots ④$$

このもとで

$$\begin{aligned} &\log_a(ax^2+2x+2)>\log_a 2+\log_a(x^2+5x+7) \\ \Longleftrightarrow\ &\log_a(ax^2+2x+2)>\log_a 2(x^2+5x+7) \\ \Longleftrightarrow\ &ax^2+2x+2<2(x^2+5x+7) \\ \Longleftrightarrow\ &(2-a)x^2+8x+12>0 \end{aligned}$$

これが任意の実数 x に対して成り立つ. よって, ④より $2-a>0$ なので

$$4^2-12(2-a)=12a-8<0 \qquad \therefore \quad a<\frac{2}{3}$$

④と合わせて, 求める a の値の範囲は

$$\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3} \qquad (答)$$

【5】底と真数の条件より

$$x>0,\ x\neq 1, \quad y>0,\ y\neq 1$$

このとき

$$\begin{aligned} &\log_x y-3\cdot\frac{1}{\log_x y}>2 \\ \therefore \quad &\frac{(\log_x y)^2-2\log_x y-3}{\log_x y}=\frac{(\log_x y-3)(\log_x y+1)}{\log_x y}>0 \end{aligned}$$

(i) $\log_x y>0$ のとき

$$(\log_x y-3)(\log_x y+1)>0 \qquad \therefore \quad 3<\log_x y$$

(ii) $\log_x y < 0$ のとき

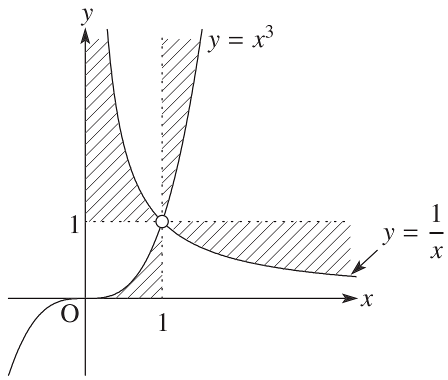
$$(\log_x y - 3)(\log_x y + 1) < 0 \qquad \therefore \quad -1 < \log_x y < 0$$

$$\therefore \quad -1 < \log_x y < 0,\ 3 < \log_x y$$

よって

$$\begin{cases} x > 1 \text{ のとき，} \dfrac{1}{x} < y < 1 \text{ または } x^3 < y \\ 0 < x < 1 \text{ のとき，} \dfrac{1}{x} > y > 1 \text{ または } x^3 > y \end{cases}$$

これを図示すると，下図の斜線部分のようになる． ただし， 境界は含まない．



添削課題

【1】(1) $2^7 = 128$, $10^2 = 100$ より $10^2 < 2^7$ だから

$$2 < 7\log_{10} 2 \qquad \therefore \quad \frac{2}{7} < \log_{10} 2$$

また，$2^{13} = 8192$, $10^4 = 10000$ より $2^{13} < 10^4$ だから

$$13\log_{10} 2 < 4 \qquad \therefore \quad \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

以上より

$$\frac{2}{7} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

が成り立つ． 〔証明終〕

(2) 与式を変形して

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{2}\right)^n > 1000 &\iff n(\log_{10} 10 - \log_{10} 4) > \log_{10} 1000\\ &\iff n(1 - 2\log_{10} 2) > 3\\ &\iff n > \frac{3}{1 - 2\log_{10} 2} \quad \cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

ここで，(1) より

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13} &\iff 1 - 2\cdot\frac{4}{13} < 1 - 2\log_{10} 2 < 1 - 2\cdot\frac{2}{7}\\ &\iff \frac{5}{13} < 1 - 2\log_{10} 2 < \frac{3}{7}\\ &\iff 3\cdot\frac{7}{3} < \frac{3}{1 - 2\log_{10} 2} < 3\cdot\frac{13}{5}\\ &\iff 7 < \frac{3}{1 - 2\log_{10} 2} < \frac{39}{5} = 7.8\end{aligned}$$

以上より，$(*)$ をみたす最小の自然数 n は 8 だから，求める最小の n の値は 8.

(答)

問題

【1】(1) 点 B の座標を (a, b) とおく．AB $\perp l$ より

$$\frac{b-2}{a-4}\cdot\frac{1}{2}=-1 \qquad \therefore \quad 2a+b=10 \quad \cdots ①$$

AB の中点

$$\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)$$

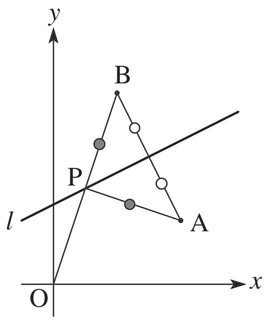
は l 上にあるから

$$\frac{a+4}{2}-2\cdot\frac{b+2}{2}+5=0$$
$$\therefore \quad a-2b=-10 \quad \cdots ②$$

①，②より

$$a=2,\ b=6 \qquad \therefore \quad \mathrm{B}\,(2,\ 6) \qquad (答)$$

図 15.1



(2) l 上の点 P に対して

$$\mathrm{OP}+\mathrm{PA}=\mathrm{OP}+\mathrm{PB}$$

であり，O と B は l に関して反対側にあるから，OP + PA は P を線分 OB 上にとるとき最小となる．直線 OB の方程式は $y=3x$ であるから，これと l の方程式を連立して解くと

$$x=1,\ y=3 \qquad \therefore \quad \mathrm{P}\,(1,\ 3) \qquad (答)$$

(3) 直線 OP，l が x 軸の正方向とのなす角を，それぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\tan\alpha=3,\ \tan\beta=\frac{1}{2}$$

求める角は $\alpha-\beta$ であるから

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0^\circ < \alpha - \beta < 90^\circ$ であるから

$$\alpha - \beta = 45^\circ \qquad \text{(答)}$$

【2】(1)

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 = 1 && \cdots ① \\ &(x - \sqrt{a})^2 + y^2 = \frac{a}{2} && \cdots ② \\ &a > 0 && \cdots ③ \end{aligned}$$

① − ② より

$$2\sqrt{a}x = 1 + \frac{a}{2}$$

③より

$$x = \frac{1 + \frac{a}{2}}{2\sqrt{a}} = \frac{a+2}{4\sqrt{a}} \quad \cdots ④$$

① かつ ② $\iff$ ① かつ ④ だから

①と②が異なる 2 点で交わる.

$\iff$ ①と④が異なる 2 点で交わる.

$\iff$ ①の中心 (0, 0) から④までの距離 < 半径 (= 1)

$\iff$ $(0 <)\dfrac{a+2}{4\sqrt{a}} < 1$

$\sqrt{a} = t > 0$ とおくと

$$\frac{t^2+2}{4t} - 1 = \frac{t^2 - 4t + 2}{4t} < 0$$
$$(0 <)2 - \sqrt{2} < t < 2 + \sqrt{2}$$
$$(2 - \sqrt{2})^2 < a < (2 + \sqrt{2})^2$$

よって

$$6 - 4\sqrt{2} < a < 6 + 4\sqrt{2} \qquad \text{(答)}$$

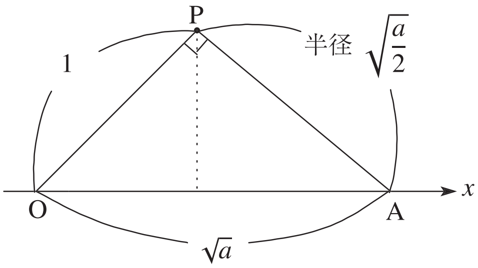
(2) 接点と中心を結んだ直線と接線は直交するので, A($\sqrt{a}$, 0) とし，2 交点の 1 つを P とすると，条件より

$$\angle \mathrm{OPA} = 90^\circ$$

図 15.2 より

$$(\sqrt{a})^2 = 1 + \left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2 \qquad \therefore \quad a = 2 \text{ ((1) の } a \text{ の範囲に適)} \qquad \text{(答)}$$

図 15.2



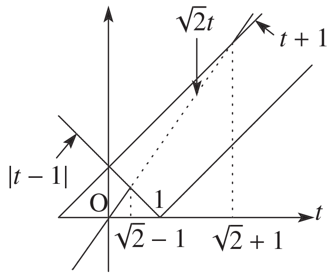
＜別解＞

①は O(0, 0) 中心, 半径 1 の円.

②は A($\sqrt{a}$, 0) 中心, 半径 $\sqrt{\frac{a}{2}}$ の円. OA = $\sqrt{a}$

$$
\begin{aligned}
&\quad 2\text{ 円①, ②が異なる 2 点で交わる} \\
&\Longleftrightarrow \text{半径の差} < \text{中心間の距離} < \text{半径の和} \\
&\Longleftrightarrow \left|\sqrt{\frac{a}{2}} - 1\right| < \sqrt{a} < \sqrt{\frac{a}{2}} + 1 \quad \cdots (*)
\end{aligned}
$$

図 15.3



$\sqrt{\frac{a}{2}} = t\ (> 0)$ とおくと

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad |t-1| < \sqrt{2}t < t+1$$

図 15.3 より

$$
\begin{gathered}
\sqrt{2} - 1 < t < \sqrt{2} + 1 \\
\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) < \sqrt{a} < \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \\
\therefore \quad 6 - 4\sqrt{2} < a < 6 + 4\sqrt{2}
\end{gathered}
$$

【3】(1) $C_1 : (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ より，2 円 C_1, C_2 の中心間距離は

$$\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

であり，C_1 の半径 5，C_2 の半径 5 に対して

$$5 - 5 < \sqrt{10} < 5 + 5$$

をみたすので，C_1, C_2 は異なる 2 点で交わる．〔証明終〕

(2) (1) より，C_1, C_2 は異なる 2 点で交わるから

$$x^2+y^2-6x-2y-15+k(x^2+y^2-25)=0 \quad \cdots ①$$

は，C_1, C_2 の交点を通る図形を表す．そこで，① に $k=-1$ を代入すると，2 円の交点を通る直線の方程式

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-6x-2y-15-(x^2+y^2-25)=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3x+y-5=0 \end{aligned}$$

が得られる．　(答)

(3) ① が原点 O を通るので，① に $x=y=0$ を代入すると

$$-15-25k=0 \qquad \therefore \quad k=-\frac{3}{5}$$

よって，求める円の方程式は

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-6x-2y-15-\frac{3}{5}(x^2+y^2-25)=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x^2+y^2-15x-5y=0 \end{aligned}$$

となる．　(答)

【4】(1) $\triangle$ABC について，BC の中点を M とすると

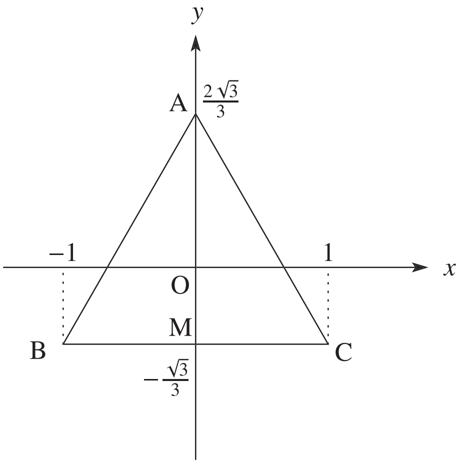
$$\mathrm{AM} = \mathrm{AB}\sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

O は AM を 2 : 1 に内分する点だから

$$\mathrm{AO} = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \mathrm{OM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ここで，点 A は y 軸上で y 座標は正，点 C の x 座標は正だから $\triangle$ABC は図 15.4 のようになる．

図 15.4



A，B，C の座標はそれぞれ

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\ \mathrm{B}\left(-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ \mathrm{C}\left(1,\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

であり，C′ は直線 $y = x$ に関して C と対称な点であるから

$$\mathrm{C}'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right) \qquad \text{(答)}$$

(2) A′，B′ の座標は

$$\mathrm{A}'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 0\right),\ \mathrm{B}'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -1\right)$$

である．図 15.5 のように点 D，E，F，G，H，I をとる．

このとき，$\triangle$BDE について，DE は y 軸と平行であるから，DE $\perp$ BE．すなわち，$\triangle$BDE は $\angle\mathrm{B} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{E} = 90^\circ$ の直角 3 角形である．

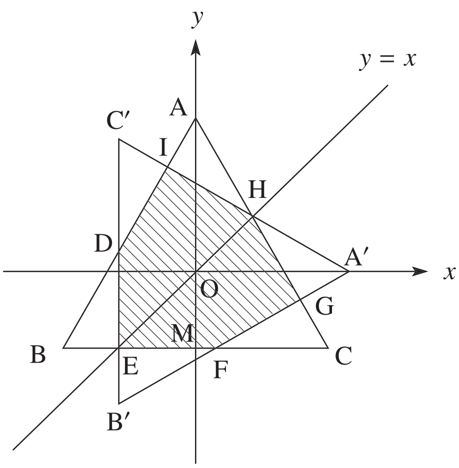
ここで，直線 $y = x$ に関する対称性より

$$\triangle\mathrm{BDE} \equiv \triangle\mathrm{B'FE}$$

また，$\triangle$C′B′A′ は $\triangle$ABC を O を中心に 30° 回転させた 3 角形であることから

$$\triangle\mathrm{BDE} \equiv \triangle\mathrm{AHI} \equiv \triangle\mathrm{CFG}$$

図 15.5



また

$$\mathrm{BE} = \mathrm{BM} - \mathrm{EM} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},\ \mathrm{DE} = \sqrt{3}\mathrm{BE} = \sqrt{3} - 1$$

であるから

$$\triangle\mathrm{BDE} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{DE}\cdot\mathrm{BE} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

さて，求める面積 S とすると，S は図 15.5 の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{BDE} - \triangle\mathrm{AHI} - \triangle\mathrm{CFG} \\ &= \triangle\mathrm{ABC} - 3\triangle\mathrm{BDE} \\ &= \frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3} - 3\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) \\ &= \sqrt{3} - (2\sqrt{3} - 3) = 3 - \sqrt{3} \qquad \text{(答)} \end{aligned}$$

【5】(1) O を座標原点とし，A(1, 0)，P(a, b) とする．
C_3 は C_1 の内部であるから

$$0 < t < 2 \ \cdots ①$$

である．
さて，AP の長さについて

$$\mathrm{AP} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1 + t$$

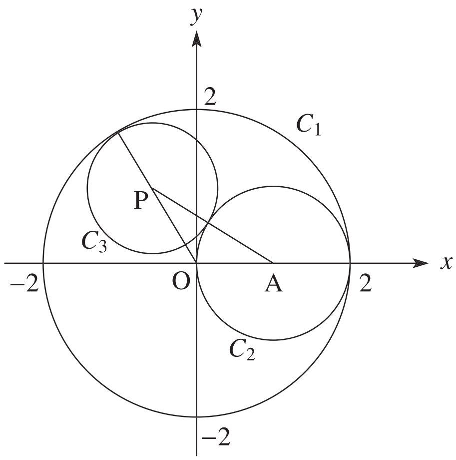
中辺と右辺をそれぞれ 2 乗して

$$(a-1)^2 + b^2 = t^2 + 2t + 1 \ \cdots ②$$

また，OP の長さについて

$$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} = 2 - t$$

図 15.6



中辺と右辺をそれぞれ 2 乗して

$$a^2 + b^2 = t^2 - 4t + 4 \quad \cdots ③$$

② − ③ より

$$-2a + 1 = 6t - 3$$
$$\therefore \quad a = -3t + 2 \qquad \text{(答)}$$

これを ③ に代入して

$$b^2 = -8t^2 + 8t$$

ここで，$b^2 > 0$ より

$$-8t^2 + 8t > 0 \quad \therefore \quad 0 < t < 1 \quad \cdots ④$$

④ において

$$b = \sqrt{-8t^2 + 8t} \qquad \text{(答)}$$

また，求める t の範囲は，① かつ ④ より

$$0 < t < 1 \qquad \text{(答)}$$

(2) (1) の結果より

$$b^2 = -8t^2 + 8t = -8\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$$

よって，$0 < t < 1$ について

$$0 < b^2 \leqq 2 \qquad \therefore \quad 0 < b \leqq \sqrt{2}$$

よって，求める b の最大値は，$\sqrt{2}$.　　(答)

添削課題

【1】 (I) 直線 ℓ が y 軸に平行なとき，直線 l の方程式は

$$x = 6$$

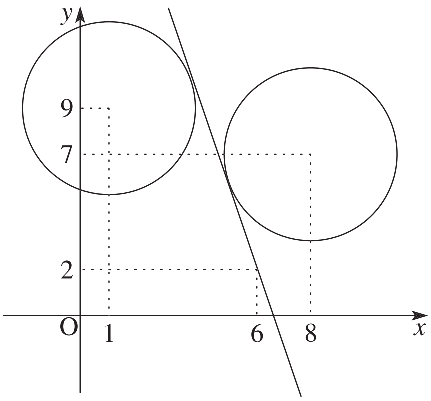
このとき

$$\begin{cases} \text{点 } (1,\ 9) \text{ から直線 } \ell \text{ までの距離は} \quad 5 \\ \text{点 } (8,\ 7) \text{ から直線 } \ell \text{ までの距離は} \quad 2 \end{cases}$$

であるから，ℓ は 2 つの円に接することはない.

(II) 直線 ℓ が y 軸に平行でないとき

図 1.1



直線 ℓ の方程式は

$$y = mx + n \quad \therefore \quad y - mx - n = 0$$

とおけるので

$$\begin{cases} \text{点 } (1,\ 9) \text{ から直線 } \ell \text{ までの距離は} \quad \dfrac{|9 - m - n|}{\sqrt{1 + m^2}} \\ \text{点 } (8,\ 7) \text{ から直線 } \ell \text{ までの距離は} \quad \dfrac{|7 - 8m - n|}{\sqrt{1 + m^2}} \end{cases}$$

ゆえに，題意よりこの 2 つの距離が r に等しいので

$$\frac{|9 - m - n|}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{|7 - 8m - n|}{\sqrt{1 + m^2}} (= r)$$

$$|9 - m - n| = |7 - 8m - n|$$

$$\therefore \quad 9 - m - n = \pm(7 - 8m - n)$$

また，直線 ℓ は点 (6, 2) を通るので

$$2 = 6m + n \quad \cdots ①$$

(i) $9-m-n=7-8m-n$ のとき　　$m=-\dfrac{2}{7}$

これを ① に代入すると　　$n=\dfrac{26}{7}$

よって，求める直線 ℓ と r は

$$\ell : y=-\frac{2}{7}x+\frac{26}{7}, \qquad r=\frac{\left|9+\frac{2}{7}-\frac{26}{7}\right|}{\sqrt{1+\frac{4}{49}}}=\frac{39}{\sqrt{53}}$$

(ii) $9-m-n=-(7-8m-n)$ のとき

$$9m+2n=16 \quad \cdots ②$$

② − ① × 2 より

$$m=-4$$

これを ① に代入すると

$$n=26$$

よって，求める直線 ℓ と r は

$$\ell : y=-4x+26, \qquad r=\frac{|9+4-26|}{\sqrt{1+16}}=\frac{13}{\sqrt{17}}$$

以上，(I)，(II) より，求める ℓ の方程式および r の値は

$$\ell : y=-\frac{2}{7}x+\frac{26}{7},\ r=\frac{39}{\sqrt{53}} \quad \text{または} \quad \ell : y=-4x+26,\ r=\frac{13}{\sqrt{17}} \qquad \text{(答)}$$

問題

【1】$6x - y = k$ とおくと

$$y = 6x - k \quad \cdots ①$$

また，直線 $y = 2x$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ の第 1 象限における交点を A とおく．図 16.1 より，$-k$ が最大になるのは直線 ① が領域 D の周に接するときであり，最小になるのは直線 ① が点 A を通るときである．

点 A の座標は $y = 2x$ を円の式に代入して $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

直線 ① が点 A を通るとき，$k = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

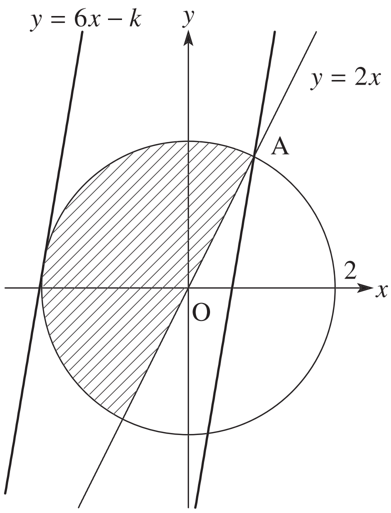
直線 ① が領域 D と接するのは，原点と直線 $6x - y = k$ の距離が 2 のときであるから

$$2 = \frac{|k|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}}$$

より, 符号に注意して $k = -2\sqrt{37}$ を得る．よって

$$最大値\ \frac{8}{\sqrt{5}},\quad 最小値\ -2\sqrt{37} \qquad (答)$$

図 16.1



【2】(1) P と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2 = ax - a + 2 \qquad \therefore \quad x^2 - ax + a - 2 = 0 \ \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$D = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4 > 0$$

であるから，2 次方程式 $(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつ．すなわち，C と ℓ は異なる 2 点で交わる．（証明終）

(2) $(*)$ の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とすると

$$\mathrm{A}(\alpha,\ a\alpha - a + 2),\ \mathrm{B}(\beta,\ a\beta - a + 2)$$

とおけて，$\mathrm{M}(X,\ Y)$ とおくと，M は線分 AB の中点なので

$$X = \frac{\alpha+\beta}{2},\ Y = \frac{a(\alpha+\beta)}{2} - a + 2$$

解と係数の関係より，$\alpha + \beta = a$ であるから

$$X = \frac{a}{2},\ Y = \frac{a^2}{2} - a + 2$$
$$\therefore\quad Y = \frac{(2X)^2}{2} - 2X + 2 = 2X^2 - 2X + 2$$

よって，求める点 M の軌跡は

放物線 $y = 2x^2 - 2x + 2$　　(答)

【3】直線 ℓ_t の方程式を，t の 2 次方程式

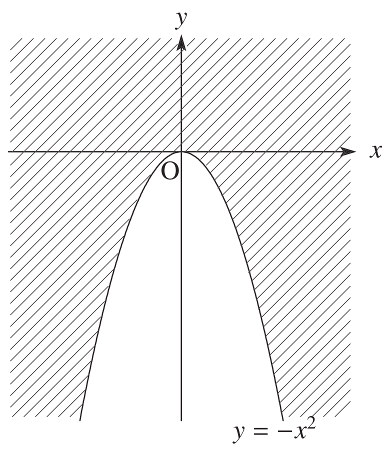
$$t^2 + 2xt - y = 0 \ \cdots\cdots ①$$

とみて，① が実数解をもつ条件を考えればよい．
よって，① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} \geqq 0 \iff x^2 + y \geqq 0 \iff y \geqq -x^2$$

より，求める領域は図 16.2 の斜線部分となる．ただし，境界はすべて含む．　(答)

図 16.2



【4】(1) ℓ_1 を変形すると

$$(x-2y+3)k+x+4=0 \quad \cdots ①$$

となるから，ℓ_1 は，k の値に関わらず

$$x-2y+3=0, \quad x+4=0$$

をともにみたす点 $(x,\ y)$，すなわち

$$点\left(-4,\ -\frac{1}{2}\right)$$

を常に通る．

また，ℓ_2 を変形すると

$$(4x+2y+3)k+2y-5=0 \quad \cdots ②$$

となるから，ℓ_2 は，k の値に関わらず

$$4x+2y+3=0, \quad 2y-5=0$$

をともにみたす点 $(x,\ y)$，すなわち

$$点\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$$

を常に通る．

以上から，ℓ_1，ℓ_2 はそれぞれ定点を通る．（証明終）

(2) ① と ② を同時にみたす $(x,\ y)$ の条件を求める．

①，② より k を消去すると，

$(4x+2y+3)\times$ ① $-$ $(x-2y+3)\times$ ② より

$$(x+4)(4x+2y+3)-(2y-5)(x-2y+3)=0$$
$$4x^2+4y^2+24x-8y+27=0$$
$$(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4} \quad \cdots ③$$

(i) $x-2y+3 \neq 0$ のとき

① かつ ② $\iff$ ① かつ $(4x+2y+3)\times$ ① $-$ $(x-2y+3)\times$ ②

$\iff$ ① かつ ③

ここで，直線 $x-2y+3=0$ と円 ③ の交点は

$$x-2y+3=0 \iff x+3=2y$$

を ③ に代入して

$$(2y)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}$$
$$20y^2-8y-9=0$$
$$(10y-9)(2y+1)=0$$
$$y=-\frac{1}{2},\ \frac{9}{10}$$

すなわち

$$(x,\ y)=\left(-4,\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{6}{5},\ \frac{9}{10}\right)$$

よって，このとき ① と ② を同時にみたす $(x,\ y)$ の関係式は

$$(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}\quad\left((x,\ y)\neq\left(-4,\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{6}{5},\ \frac{9}{10}\right)\right)$$

(ii) $x-2y+3=0$ のとき

① より，$(x,\ y)=\left(-4,\ -\frac{1}{2}\right)$.

このとき，② より $-14k-6=0$ となり，$k=-\frac{3}{7}$ とすれば，① と ② が同時に成立する.

(i)，(ii) より，ℓ_1 と ℓ_2 の交点の軌跡は

$$(x+3)^2+(y-1)^2=\frac{13}{4}\quad\left((x,\ y)\neq\left(-\frac{6}{5},\ \frac{9}{10}\right)\right)\qquad(\text{答})$$

＜別解＞

(1) で求めた定点を，それぞれ $\mathrm{A}\left(-4,\ -\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$ とする.

さて，ℓ_1, ℓ_2 の法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ とすると

$$\overrightarrow{n_1}=(k+1,\ -2k),\quad \overrightarrow{n_2}=(2k,\ k+1)$$

とかける．ここで

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$$

であるから，ℓ_1 と ℓ_2 は k の値に関わらず直交する.

また，① より ℓ_1 は $x-2y+3=0$ 以外の任意の直線を表し，

② より ℓ_2 は $4x+2y+3=0$ 以外の任意の直線を表す.

以上から，ℓ_1 と ℓ_2 の交点は 2 点 A，B を直径の両端とする円周上に存在する．ただし，2 直線 $x-2y+3=0$, $4x+2y+3=0$ の交点を除く.

【5】(1) $\mathrm{P}(t-1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(t,\ t)$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ t)$ だから，直線 PQ の式は

$$y=t(x-t)+t\ \cdots①$$

①より

$$t^2-(x+1)t+y=0\ \cdots②$$

②の左辺を $f(t)$ とおくと

$$f(t)=\left(t-\frac{x+1}{2}\right)^2+y-\frac{1}{4}(x+1)^2$$

$$0\leqq t\leqq 1\ \cdots③$$

求める直線 PQ の通過範囲は

②つまり $f(t)=0$ が③の範囲に実数解を (少なくとも 1 つ) もつ $\cdots$④

ような点 $(x,\ y)$ の集合である.

以下，x の値で場合を分けて考える.

図 16.3

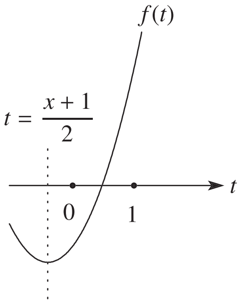


図 16.4

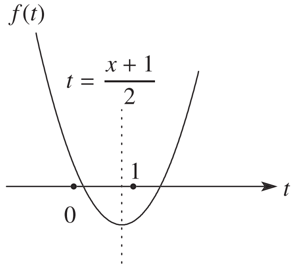
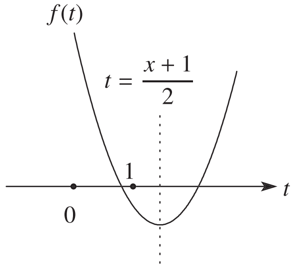


図 16.5



(i) $\dfrac{x+1}{2} \leqq 0$ つまり $x \leqq -1$ のとき (図 16.3)

$$④ \iff \left\{\begin{array}{l} f(0) \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ f(1) \geqq 0 \end{array}\right.$$
$$\iff x \leqq y \leqq 0$$

(ii) $0 < \dfrac{x+1}{2} < 1$ つまり $-1 < x < 1$ のとき (図 16.4)

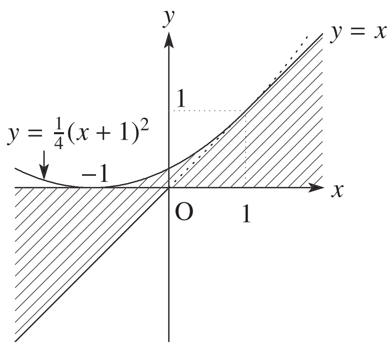
$$④ \iff \left\{\begin{array}{l} f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ f(0) \geqq 0 \text{ または } f(1) \geqq 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} y \leqq \dfrac{1}{4}(x+1)^2 \\ \quad \text{かつ} \\ y \geqq 0 \text{ または } y \geqq x \end{array}\right.$$

(iii) $\dfrac{x+1}{2} \geqq 1$ つまり $x \geqq 1$ のとき (図 16.5)

$$④ \iff \left\{\begin{array}{l} f(1) \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ f(0) \geqq 0 \end{array}\right.$$
$$\iff 0 \leqq y \leqq x$$

(i)〜(iii) より図 16.6 の斜線部 (境界含む).

図 16.6



(2) 線分 PQ の式は

$$y = t(x - t) + t \quad \text{かつ} \quad t - 1 \leqq x \leqq t \ \cdots ①'$$

①′ より

$$x \leqq t \leqq x + 1 \ \cdots ②'$$

(1) と同様に

$$f(t) = t^2 - (x+1)t + y = \left(t - \frac{x+1}{2}\right)^2 + y - \frac{1}{4}(x+1)^2$$

とおく.

②′ かつ $0 \leqq t \leqq 1$ をみたす t の範囲 $\cdots$③′ とすると

(i) $x < -1$, $x > 1$ のとき

③′ は空集合

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき

③′は $0 \leqq t \leqq x + 1$

(iii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

③′は $x \leqq t \leqq 1$

求める線分 PQ の通過範囲は

$f(t) = 0$ が③′の範囲に実数解を (少なくとも 1 つ) もつ $\cdots$④′

ような点 (x, y) の集合

(I) $-1 \leqq x < 0$ のとき

$$④' \iff \begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ f(0) = f(x+1) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff 0 \leqq y \leqq \frac{1}{4}(x+1)^2$$

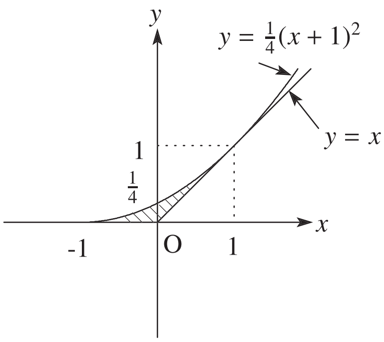
(II) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$④' \iff \begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) \leqq 0 \\ \quad \text{かつ} \\ f(x) = f(1) \geqq 0 \end{cases}$$

$$\iff x \leqq y \leqq \frac{1}{4}(x+1)^2$$

(I), (II) より図 16.7 の斜線部 (境界含む)

図 16.7



添削課題

【1】(1) $x+2y=k$ とおく. この直線が円 $x^2+y^2=4$ の内部および周上と共有点をもつ k の値の範囲を求める.

円と直線が共有点をもつとき, (円の中心と直線との距離) ≦ (半径) であるから

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1+4}} \leqq 2 \qquad \therefore \quad |k| \leqq 2\sqrt{5}$$

よって

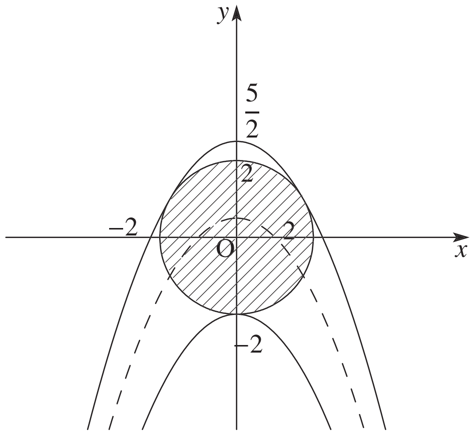
$$-2\sqrt{5} \leqq k \leqq 2\sqrt{5} \qquad \text{(答)}$$

(2) $x^2+2y=k$ とおく.

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}k$$

この放物線が円 $x^2+y^2=4$ の内部および周上と共有点をもつ k の値の範囲を求める.

図 1.1



$x^2+y^2=4$ と $x^2+2y=k$ が接するとき, $x^2=k-2y$ より

$$k-2y+y^2=4 \qquad \therefore \quad y^2-2y+k-4=0$$

判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1-k+4=0 \qquad \therefore \quad k=5$$

$x^2+2y=k$ が点 $(0,\ -2)$ を通るとき

$$k=-4$$

したがって

$$-4 \leqq k \leqq 5 \qquad \text{(答)}$$

M2JS/M2J
高２選抜東大数学
高２東大数学

Z-KAI

会員番号		氏　名	