M2JC

本科 2 期 9 月度

解答

Ｚ会東大進学教室

高 2 東大理系数学Ⅲ

問題

【1】(1) $\dfrac{2a_n+3}{3a_n+2}=b_n$ とおくと

$$a_n=\frac{3-2b_n}{3b_n-2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=1$ より

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2b_n}{3b_n-2}=\frac{3-2\cdot 1}{3\cdot 1-2}=1$$

≪注意≫ $\dfrac{2a_n+3}{3a_n+2}\to 1$ ということは，分母と分子が限りなく近づくことを意味している．すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ とすると

$$2\alpha+3=3\alpha+2$$

でなくてはならない．直感的ではあるが，このことからも $\alpha=1$ であることが納得できる．勝手に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ の存在を仮定しているので，答案としてはまずいが，このような感覚は大切にしたい．

(2) $(3n+1)a_n=c_n$ とおくと

$$a_n=\frac{c_n}{(3n+1)}$$

よって

$$na_n=\frac{n}{3n+1}c_n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=1$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}na_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}c_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\dfrac{1}{n}}c_n=\frac{1}{3+0}\cdot 1=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

【2】(1) $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ の辺々逆数をとって

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

よって有理化して

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$$

〔証明終〕

(2) (1) の結果より，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}-\sqrt{1}<\frac{1}{2\sqrt{1}}<\sqrt{1}-\sqrt{0}\\
&\sqrt{3}-\sqrt{2}<\frac{1}{2\sqrt{2}}<\sqrt{2}-\sqrt{1}\\
&\sqrt{4}-\sqrt{3}<\frac{1}{2\sqrt{3}}<\sqrt{3}-\sqrt{2}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\\
&\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<\frac{1}{2\sqrt{n-1}}<\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}\\
&\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}
\end{aligned}$$

辺々を加えて

$$\sqrt{n+1}-1<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{n}$$

〔証明終〕

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{kn}}=\dfrac{1}{2\sqrt{k}}\times\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ であるから，(2) の不等式の辺々に $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ をかけて

$$\frac{2}{\sqrt{n}}(\sqrt{n+1}-1)<\frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}$$

すなわち

$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}<2$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)=2$$

であるから，はさみうちの原理によって

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{kn}}=2$$

【3】(1) 初項 x，公比 $\dfrac{1}{1+x}$ の無限等比級数であるから，収束するための条件は

$$x=0 \quad \cdots ① \text{ または } -1<\frac{1}{1+x}<1 \quad \cdots ②$$

② のとき，$-1<\dfrac{1}{1+x}$ より

$$\frac{1}{1+x}+1=\frac{2+x}{1+x}>0$$

両辺に $(1+x)^2>0$ をかけて

$$(2+x)(1+x)>0 \qquad \therefore \quad x<-2,\ -1<x \quad \cdots ③$$

さらに $\dfrac{1}{1+x}<1$ より

$$1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$$

両辺に $(1+x)^2>0$ をかけて

$$x(1+x)>0 \qquad \therefore \quad x<-1,\ 0<x \quad \cdots ④$$

よって，② のとき ③ かつ ④ より

$$x<-2,\ 0<x$$

以上より

$$x<-2,\ 0\leqq x$$

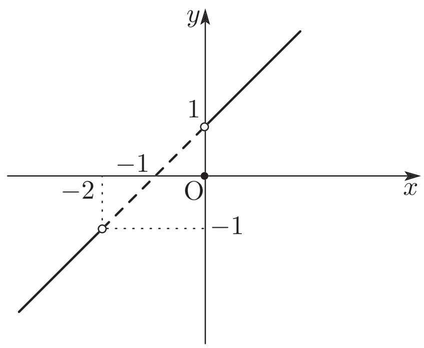
(2) (1) の範囲において $x \fallingdotseq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{x}{1-\dfrac{1}{1+x}}=1+x$$

$x=0$ のとき

$$f(x)=0$$

であるから，求めるグラフは右図のようになる．



【4】(1) 右辺を通分して

$$\frac{x+3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$
$$= \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

分子の係数を比較して

$$A+B=1,\ A=3$$

よって

$$A=3,\quad B=-2$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k+3}{k(k+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \left(\frac{3}{k} - \frac{2}{k+1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{3}{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2}{k+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= \frac{2}{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{k+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= \left\{\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\right\} + \left\{\frac{2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \left\{\frac{2}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \\ &= \frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 - \frac{2}{n+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 2$$

添削課題

【1】(1) $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} &= \lim_{n\to\infty}S_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2) 初項 $\sin\theta$，公比 $\cos\theta$ の無限等比級数であるから，収束するための条件は

$$\sin\theta=0 \text{ または } -1<\cos\theta<1$$

$\sin\theta=0$ のとき

$$\theta=0°,\ 180°$$

$-1<\cos\theta<1$ のとき

$$0°<\theta<180°$$

したがって，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ の任意の θ で収束し，その和は

$$\begin{cases} \theta=0°,\ 180° \text{のとき} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\theta\cos^{n-1}\theta=0 \\ 0°<\theta<180° \text{のとき} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\theta\cos^{n-1}\theta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \end{cases}$$

問題

【1】(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{3-(x+3)}{3(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x}{3(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3(x+3)}=-\frac{1}{9}$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x-1}-\sqrt{x^2-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x-1)-(x^2-3)}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+2}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{x^2-3}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}$$
$$=\frac{8}{1+1}=4$$

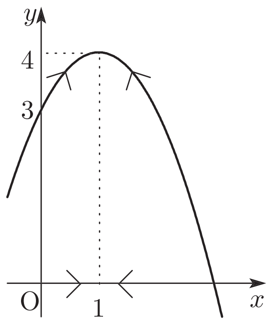
(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(4) $x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2-3x}\right)=\lim_{t\to\infty}\left(-2t+\sqrt{4t^2+3t}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{(4t^2+3t)-4t^2}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{4t^2+3t}+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\dfrac{3}{t}}+2}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}$$

(5) $-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ より x が 1 に十分近いとき

$$[-x^2+2x+3]=3$$
$$\therefore\ \lim_{x\to 1}[-x^2+2x+3]=3$$



【2】(1) $\displaystyle\lim_{x\to -3}(x+3)=0$ より

$$\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x+a}}{x+3}\cdot(x+3)=b\times 0=0$$

であるから

$$\lim_{x\to -3}(2-\sqrt{x+a})=2-\sqrt{a-3}=0$$

よって

$$\sqrt{a-3}=2 \qquad \therefore\quad a=7$$

このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x+7}}{x+3}&=\lim_{x\to -3}\frac{4-(x+7)}{(x+3)(2+\sqrt{x+7})}\\&=\lim_{x\to -3}\frac{-1}{2+\sqrt{x+7}}\\&=-\frac{1}{4}=b\end{aligned}$$

逆に，$a=7$，$b=-\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x+7}}{x+3}=-\frac{1}{4}$$

は成り立つ．よって

$$a=7,\ b=-\frac{1}{4}$$

(2) $a\leqq 0$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+1}-(ax+b)\right\}$$

は正の無限大に発散するので不適．よって，$a>0$ であることが必要である．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+1}-(ax+b)\right\}&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+1}+(ax+b)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-2abx+(1-b^2)}{\sqrt{x^2+1}+(ax+b)}\end{aligned}$$

であるから，$a\fallingdotseq 1$ とすると

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+1}-(ax+b)\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x-2ab+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\left(a+\dfrac{b}{x}\right)}$$

は正または負の無限大に発散するので不適．よって

$$a=1$$

このとき

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+1}-(ax+b)\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2b+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\left(1+\dfrac{b}{x}\right)}$$

$$=\frac{-2b}{1+1}=-b=2$$

より

$$b=-2$$

逆に，$a=1$，$b=-2$ のとき

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\sqrt{x^2+1}-(x-2)\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-(x^2-4x+4)}{\sqrt{x^2+1}+(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}+(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=2$$

となり，題意を満たす．以上より

$$a=1,\quad b=-2$$

【3】(1)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\frac{f(x)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}\\ &= 0\cdot a = 0 \qquad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

一方，$f(x)$ は整式より連続な関数であるから

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \qquad \cdots\cdots ②$$

よって，①，② から $f(1)=0$.
また，$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=b$ であるから，同様にして $f(2)=0$ が成立する.

〔証明終〕

(2) (1) より $f(1)=f(2)=0$ であるから，因数定理より

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x) \quad (Q(x):\ \text{整式}) \qquad \cdots\cdots ③$$

と表される．よって，$f(x)=0$ および $1 \leqq x \leqq 2$ を同時に満たす x が少なくとも 3 つは存在することは，$Q(x)=0$ および $1<x<2$ を同時に満たす x が少なくとも 1 つ存在することと同値.
さて，$x \fallingdotseq 1$ のとき，③ より

$$\frac{f(x)}{x-1}=(x-2)Q(x) \overset{x\to 1}{\to} -Q(1)=a$$

同様に $x \fallingdotseq 2$ のとき

$$\frac{f(x)}{x-2}=(x-1)Q(x) \overset{x\to 2}{\to} Q(2)=b$$

であるから

$$\begin{aligned}ab=-Q(1)Q(2)>0\\ \therefore\ \ Q(1)Q(2)<0\end{aligned}$$

$Q(x)$ は整式より連続な関数であるから，中間値の定理より

$$Q(x)=0 \text{ および } 1<x<2$$

を満たす x が少なくとも 1 つは存在する．したがって，題意の成立が示された.

〔証明終〕

【4】(1) $a>1$ のとき

$$\begin{cases} a^{\frac{1}{n}}=1+h_n & \cdots\cdots ① \\ h_n>0 \end{cases}$$

とおける．このとき，① の両辺を n 乗して

$$\begin{aligned} a&=(1+h_n)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h_n+{}_n\mathrm{C}_2{h_n}^2+\cdots+{h_n}^n \quad (\because\ 2\text{ 項定理}) \\ &>{}_n\mathrm{C}_1h_n \quad (\because\ n\geqq 1,\ h_n>0) \end{aligned}$$

より

$$a>nh_n \qquad \therefore\quad h_n<\frac{a}{n}$$

〔証明終〕

(2) $n\to\infty$ を考えるので，$n\geqq 2$ としてよい．このとき

$$n^{\frac{1}{n}}=1+h_n,\ h_n>0$$

とおけて

$$\begin{aligned} n&=(1+h_n)^n=1+{}_n\mathrm{C}_1h_n+{}_n\mathrm{C}_2{h_n}^2+\cdots+{h_n}^n \\ &>{}_n\mathrm{C}_2{h_n}^2 \quad (\because\ n\geqq 2,\ h_n>0) \end{aligned}$$

から

$$n>\frac{n(n-1)}{2}{h_n}^2 \qquad \therefore\quad {h_n}^2<\frac{2}{n-1}$$
$$\therefore\quad 0<h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$ であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}h_n=0$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1$$

〔証明終〕

(3) $x\to+0$ を考えるので，$0<x<1$ としてよい．このとき題意から

$$\frac{1}{n+1}<x\leqq\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ①$$

となる自然数 n が存在する．よって

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^x<x^x\leqq\left(\frac{1}{n}\right)^x \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，n は自然数なので ① を満たす n と x について

$$\begin{cases} 0<n^{\frac{1}{n+1}}<n^x \\ 0<(n+1)^x\leqq(n+1)^{\frac{1}{n}} \end{cases}$$

となることに注意すると ② から

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} < x^x < \frac{1}{n^{\frac{1}{n+1}}}$$

このとき，$x \to +0$ とすると，① から $n \to \infty$ であり，(2) の結果を使うと

$$\begin{cases} (n+1)^{\frac{1}{n}} = \left(n \cdot \dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \cdot 1^0 = 1 \\ n^{\frac{1}{n+1}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} \overset{n\to\infty}{\to} 1^1 = 1 \end{cases}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{x \to +0} x^x = 1$$

〔証明終〕

添削課題

【1】(1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ より

(i) $|x|>1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=1-\frac{1}{x}$$

(ii) $x=1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1+a+b}{1+1}=\frac{a+b}{2}$$

(iii) $x=-1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1+a-b}{1+1}=\frac{a-b+2}{2}$$

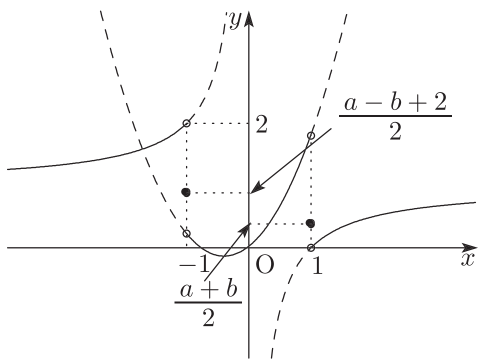
(iv) $|x|<1$ のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}=ax^2+bx$$

以上より

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & (x<-1,\ 1<x) \\ \dfrac{a+b}{2} & (x=1) \\ \dfrac{a-b+2}{2} & (x=-1) \\ ax^2+bx & (-1<x<1) \end{cases}$$

≪注意≫ a, b の値によって変化するが，$y=f(x)$ のグラフは下図のような状態になる．(2) の要求は，このグラフが $x=\pm1$ で連続になるようにすればよい．



(2) $x \fallingdotseq \pm 1$ では関数 $f(x)$ は連続であるから，$x = \pm 1$ で連続となるようにすればよい．
$x = 1$ で連続となるためには

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$$

ここで

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (ax^2 + bx) = a + b$$
$$f(1) = \frac{a+b}{2}$$

であるから

$$0 = a + b = \frac{a+b}{2} \qquad \therefore \quad a + b = 0 \quad \cdots ①$$

$x = -1$ で連続となるためには

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} f(x) = f(-1)$$

ここで

$$\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2$$
$$\lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (ax^2 + bx) = a - b$$
$$f(-1) = \frac{a-b+2}{2}$$

であるから

$$2 = a - b = \frac{a-b+2}{2} \qquad \therefore \quad a - b = 2 \quad \cdots ②$$

①，② より

$$a = 1, \quad b = -1$$

問題

【1】(1) $f(x)=x^n$ (n : 自然数) のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}({}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h + \cdots\cdots + h^{n-1})\\
&= {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

(2) $x=1$ で微分可能となるとき，$x=1$ で連続であるから

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(ax^2+bx) = a+b$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\{x^3+(1-a)x^2+2\} = 4-a$$

より

$$a+b=4-a \qquad \therefore \quad b=4-2a \quad \cdots\cdots ①$$

また，$x=1$ で連続となるとき，$f(1)=a+b=4-a$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+0}\frac{ax^2+bx-a-b}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1+0}\{a(x+1)+b\}\\
&= 2a+b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1-0}\frac{x^3+(1-a)x^2+2-4+a}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1-0}\{x^2+(2-a)x+2-a\}\\
&= 5-2a
\end{aligned}$$

となり，$x=1$ で微分可能となるためには

$$2a+b=5-2a \qquad \therefore \quad b=5-4a \quad \cdots\cdots ②$$

よって，①，②より

$$4-2a=5-4a \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{2},\ b=3$$

【2】(1) $y=(x^2-x+1)(x^2+1)$ より

$$\begin{aligned} y' &= (2x-1)(x^2+1)+(x^2-x+1)\cdot 2x \\ &= 2x^3-x^2+2x-1+2x^3-2x^2+2x \\ &= 4x^3-3x^2+4x-1 \end{aligned}$$

(2) $y=\dfrac{x^3-1}{x}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3x^2\cdot x-(x^3-1)\cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2x^3+1}{x^2} \quad \left(=2x+\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

(3) $y=(2x^2-5x+1)^{10}$ より

$$y' = 10(4x-5)(2x^2-5x+1)^9$$

(4) $y=\sqrt{4x^3+x+2}$ より

$$y' = \frac{12x^2+1}{2\sqrt{4x^3+x+2}}$$

(5) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{5}-1} \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{4}{5}} \\ &= \frac{2}{5\sqrt[5]{(x-1)^4(x+1)^6}} \quad (x \fallingdotseq \pm 1) \end{aligned}$$

【3】 (I) $n=1$ のとき

$$y' = y^{(1)} = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

より成り立つ.

(II) $n=k$ のとき

$$y^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= (-1)^k k! \frac{-\{(x+1)^{k+1}\}'}{\{(x+1)^{k+1}\}^2} \\ &= (-1)^{k+1} k! \frac{(k+1)(x+1)^k}{(x+1)^{2k+2}} \\ &= (-1)^{k+1}(k+1)k! \frac{(x+1)^k}{(x+1)^{2k+2}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(x+1)^{k+2}} \end{aligned}$$

より $n=k+1$ のときも成り立つ.

以上より，数学的帰納法によって，任意の自然数 n に対して

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

は成り立つ. 〔証明終〕

【4】 $f(x)$ は微分可能であるから

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在する．このとき

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \quad (\because \ f \text{ は奇関数}) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \end{aligned}$$

ここで，$-h = h'$ とおくと，$h \to 0$ のとき $h' \to 0$ であり

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = \lim_{h' \to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{h'}$$

$$\therefore \quad f'(-x) = f'(x)$$

よって，$f'(x)$ は偶関数である．　〔証明終〕

添削課題

【1】

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{(x^2+1)^3}&=\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+1})^3\\&=3(\sqrt{x^2+1})^2\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}\\&=3(x^2+1)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\\&=3x\sqrt{x^2+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{(x^2+1)^3}&=\frac{d}{dx}\left(3x\sqrt{x^2+1}\right)\\&=3\left\{(x)'\sqrt{x^2+1}+x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'\right\}\\&=3\left\{\sqrt{x^2+1}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}\\&=\frac{3(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

であるから

$$ax\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}+b\frac{d^2}{dx^2}\sqrt{(x^2+1)^3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\qquad\cdots\cdots①$$

の左辺は

$$\frac{ax^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{3b(2x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(a+6b)x^2+3b}{\sqrt{x^2+1}}$$

よって，① が x の恒等式となる条件は

$$a+6b=0,\ 3b=1$$

$$\therefore\quad a=-2,\ b=\frac{1}{3}$$

M2JC

高２東大理系数学Ⅲ

Z-KAI

会員番号	

氏　名	