

## 難関大理系数学／難関大理系数学M



# 1 章 実戦演習 1

## 問題

【1】真数条件, および底条件より

$$0 < x < 1 \text{ または } x > 1, 0 < y < 1 \text{ または } y > 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

この条件の下で, 与えられた等式の 1 つ目は

$$\log_x y^2 + \frac{\log_x x^2}{\log_x y} = 5 \quad \therefore \quad 2\log_x y + \frac{2}{\log_x y} = 5$$

と変形できる. この両辺に  $\log_x y$  ( $\neq 0$ ) をかけて整理すると

$$2(\log_x y)^2 - 5\log_x y + 2 = 0 \quad \therefore \quad (2\log_x y - 1)(\log_x y - 2) = 0$$

となるから

$$\log_x y = \frac{1}{2}, 2 \quad \therefore \quad y = \sqrt{x}, x^2$$

$y = \sqrt{x}$  のとき,  $x = y^2$  であるから, 与えられた等式の 2 つ目に代入して整理すると

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \quad \therefore \quad (y + 1)(y - 3) = 0$$

となる. そして,  $\textcircled{1}$  と合わせると

$$y = 3 \quad \therefore \quad x = 3^2 = 9$$

また,  $y = x^2$  のとき, 与えられた等式の 2 つ目に代入して整理すると

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

この方程式は実数解をもたないので不適である.

以上より, 求める  $x$  の値は

$$x = 9 \quad (\text{答})$$

【2】(1)  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とおく.

PQ を 2 : 1 に外分する点の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AQ} &= -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + 2\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \frac{3}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

また, RS を 1 : 2 に外分する点の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AS} &= 2\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) - \vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= \frac{3}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

ゆえに, これらの点是一致的.

(証終)

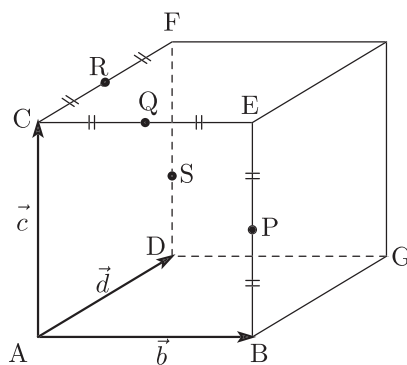
(2) (1) の結果より, 4 個の点 P, Q, R, S は同一平面上にある.

また, (1) と同様にして

「QR を 2 : 1 に外分する点と ST を 1 : 2 に外分する点是一致的」

「RS を 2 : 1 に外分する点と TU を 1 : 2 に外分する点是一致的」

ことが示せるので, 4 個の点 Q, R, S, T は同一平面上にあり, かつ 4 個の点 R, S,



T, U は同一平面上にあるといえる.

以上より, 6 個の点 P, Q, R, S, T, U は同じ平面上にある.

(証終)

【3】 (1) 与えられた不等式より

$$2a_4 \leq a_5 \leq 3a_4$$

$$2 \cdot 2a_3 \leq 2a_4 \leq a_5 \leq 3a_4 \leq 3 \cdot 3a_3$$

$$4 \cdot 2a_2 \leq 4a_3 \leq 2a_4 \leq a_5 \leq 3a_4 \leq 9a_3 \leq 9 \cdot 3a_2$$

$$8 \cdot 2a_1 \leq 8a_2 \leq 4a_3 \leq 2a_4 \leq a_5 \leq 3a_4 \leq 9a_3 \leq 27a_2 \leq 27 \cdot 3a_1$$

そして,  $a_1 = 1$  であることと合わせると

$$\mathbf{16 \leq a_5 \leq 81} \quad (\text{答})$$

(2) 同様にして

$$2 \leq a_2 \leq 3, 4 \leq a_3 \leq 9, 8 \leq a_4 \leq 27$$

が成り立つので,  $a_k = 9$  をみたす  $k$  の値は

$$k = 3, 4$$

$k = 3$  のとき,  $2a_2 \leq 9 \leq 3a_2$  かつ  $2 \leq a_2 \leq 3$  が成り立つから

$$a_1 = 1, a_2 = 3$$

$k = 4$  のとき,  $2a_3 \leq 9 \leq 3a_3$  かつ  $4 \leq a_3 \leq 9$  が成り立つから

$$a_3 = 4$$

このとき,  $2a_2 \leq 4 \leq 3a_2$  かつ  $2 \leq a_2 \leq 3$  が成り立つから

$$a_1 = 1, a_2 = 2$$

以上より

$$k = 3 \text{ のとき} \quad a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9$$

$$k = 4 \text{ のとき} \quad a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 9 \quad (\text{答})$$

(3) (1) と同様にして

$$32 \leq a_6 \leq 243, 64 \leq a_7 \leq 729, 128 \leq a_8 \leq 2187$$

が成り立つので,  $a_n = 100$  をみたす  $n$  の取り得る値の範囲は

$$\mathbf{6 \leq n \leq 7} \quad (\text{答})$$

- 【4】(1) 時刻 1 で点 Q はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  の確率で座標 1 にあるか座標 2 にある. 前者の場合, 時刻 2 で点 Q は確率 1 で座標 2 にある. また, 後者の場合, 時刻 2 で点 Q はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  の確率で座標 3 にあるか座標 4 にある.

以上より

$$P(2, 1) = 0, P(2, 2) = \frac{1}{2}, P(2, 3) = \frac{1}{4},$$

$$P(2, 4) = \frac{1}{4}, P(2, j) = 0 \ (j \geq 5) \quad (\text{答})$$

- (2) 点 Q は 1 回の移動で最大 2, 最小 1 移動するから,  $j < T$  または  $j > 2T$  であれば,  $P(T, j) = 0$  である.

次に,  $T \leq j \leq 2T$  のとき,  $j = T + m$  ( $m = 0, 1, \dots, T$ ) とおくと,  $T$  回の移動のうち最初の  $m$  回は距離 2 だけ移動し, 残りの  $T - m$  回は距離 1 だけ移動すれば, 点 Q は時刻  $T$  で座標  $T + m$  にある. よって,  $P(T, j) \neq 0$  であるから, 求める条件は

$$j < T \text{ または } j > 2T \quad (\text{答})$$

- (3) (2) の結果より

$$2n < T \text{ または } n > T$$

のとき,  $P(T, 2n) = 0$  である.

また,  $T \leq 2n \leq 2T$  のとき,  $T$  回の移動のうち距離 2 だけ移動するのが  $m$  回

( $0 \leq m \leq T$ ) であるとする, 残りの  $T - m$  回は距離 1 だけ移動するので

$$2m + (T - m) = 2n \quad \therefore \quad 2n = T + m$$

よって,  $T \leq 2n \leq 2T$  と  $2n$ : 偶数 より

$$2n = T + m \begin{cases} (m = 1, 3, 5, \dots, T) & (T: \text{奇数のとき}) \\ (m = 0, 2, 4, \dots, T) & (T: \text{偶数のとき}) \end{cases}$$

とおいてよい.

ここで, 点 Q は座標が偶数 ( $= 0$ ) である点から出発し, 座標が偶数 ( $= 2n$ ) である点に到着するので, 条件 (c) より, 距離 1 だけ移動するとき, 確率  $\frac{1}{2}$  での移動と確率 1 での移動が同じ回数だけある. また, 距離 2 の移動はすべて確率  $\frac{1}{2}$  で起こる.

したがって, 確率  $\frac{1}{2}$  の移動は全部で

$$m + \frac{T - m}{2} = \frac{T + m}{2} = n \text{ (回)}$$

起こり, このうち  $m = 2n - T$  回が距離 2 の移動であるから, この場合の確率は

$$P(T, 2n) = \frac{n C_{2n-T}}{2^n}$$

以上より, 求める確率は

$$P(T, 2n) = \begin{cases} 0 & (2n < T \text{ または } n > T \text{ のとき}) \\ \frac{n C_{2n-T}}{2^n} & (T \leq 2n \leq 2T \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{【5】 } S_n &= \log 3 - \log \frac{4}{2} + \log \frac{5}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n} \\ &= \log 3 - \log 4 + \log 2 + \log 5 - \log 3 - \cdots + (-1)^{n-1} \log(n+2) + (-1)^n \log n \end{aligned}$$

より  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \log 2 + (-1)^{n-2} \log(n+1) + (-1)^{n-1} \log(n+2) \\ &= \log 2 + (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

ここで

$$-\log \frac{n+2}{n+1} \leq (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n+1} \leq \log \frac{n+2}{n+1}$$

であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 0$$

なので、ハサミウチの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n+1} = 0$$

となるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log 2 + (-1)^{n-1} \log \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \log 2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{【6】 (1) } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\cos x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{x(\cos x + 1)}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x} \right) = -2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \log(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{2x}{\log(1 + 2x)} \cdot \frac{1}{2} \right\}$$

ここで、 $x \rightarrow 0$  のとき、 $x^2 \rightarrow 0$ 、 $2x \rightarrow 0$  であり

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

であることに注意すると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{2x}{\log(1 + 2x)} \cdot \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

【7】 (1)  $y = \frac{1}{x}$  より,  $y' = -\frac{1}{x^2}$  であるから, 接線

$l_n, l_{n+1}$  の方程式は

$$l_n : y = -\frac{1}{n^2}(x - n) + \frac{1}{n}$$

$$\therefore y = -\frac{x}{n^2} + \frac{2}{n}$$

$$l_{n+1} : y = -\frac{x}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1}$$

であるから, 交点  $P_n$  の  $x$  座標は

$$\frac{x}{n^2} - \frac{x}{(n+1)^2} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$\iff \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}x = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore x = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

よって,  $P_n$  の  $y$  座標は

$$y = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n(n+1)}{2n+1} + \frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{2n+1}$$

ゆえに, 求める  $P_n$  の座標は

$$P_n \left( \frac{2n(n+1)}{2n+1}, \frac{2}{2n+1} \right) \quad (\text{答})$$

(2) 原点を  $O$  とすると

$$\overrightarrow{P_n A_n} = \overrightarrow{O A_n} - \overrightarrow{O P_n}$$

$$= \left( n, \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{2n(n+1)}{2n+1}, \frac{2}{2n+1} \right)$$

$$= \left( -\frac{n}{2n+1}, \frac{1}{n(2n+1)} \right)$$

$$\overrightarrow{P_n A_{n+1}} = \overrightarrow{O A_{n+1}} - \overrightarrow{O P_n}$$

$$= \left( n+1, \frac{1}{n+1} \right) - \left( \frac{2n(n+1)}{2n+1}, \frac{2}{2n+1} \right)$$

$$= \left( \frac{n+1}{2n+1}, -\frac{1}{(n+1)(2n+1)} \right)$$

より

$$S_n = \frac{1}{2} \left| -\frac{n}{2n+1} \cdot \left\{ -\frac{1}{(n+1)(2n+1)} \right\} - \frac{1}{n(2n+1)} \cdot \frac{n+1}{2n+1} \right|$$

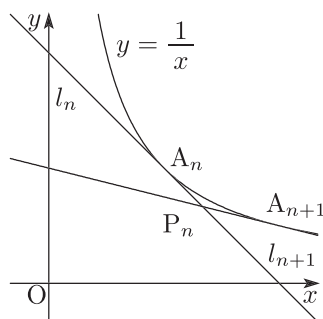
$$= \frac{1}{2n(n+1)(2n+1)}$$

また, 線分  $A_n A_{n+1}$  の中点の  $x$  座標  $c_n$  は

$$c_n = \frac{n + (n+1)}{2} = \frac{2n+1}{2}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2n(n+1)(2n+1)}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

【8】 (1)  $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = r \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} = r \cos^2 \frac{\theta}{2}$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = r \cos \frac{\theta}{2} \quad \left( \because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, r > 0 \right)$$

$$\therefore \frac{a_1}{b_1} = \cos \frac{\theta}{2} \quad (\text{答})$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2} r \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left( 1 + \cos \frac{\theta}{2} \right) = r \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = \sqrt{r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} = r \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{a_2}{b_2} = \cos \frac{\theta}{2^2} \quad (\text{答})$$

(2) (1) の結果より, 非負整数  $n$  に対し

$$\frac{a_n}{b_n} = \cos \frac{\theta}{2^n} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つと推測できる. 以下, このことを数学的帰納法で証明する.

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta = \cos \frac{\theta}{2^0}$$

より,  $n = 0$  のとき,  $\textcircled{1}$  は成り立つ.

次に,  $n = k$  ( $\geq 0$ ) のときに  $\textcircled{1}$  が成り立つと仮定する. すなわち

$$\frac{a_k}{b_k} = \cos \frac{\theta}{2^k} \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つと仮定する. このとき

$$\begin{aligned}
\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} &= \frac{a_{k+1}}{\sqrt{a_{k+1} b_k}} = \sqrt{\frac{a_{k+1}}{b_k}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a_k + b_k)}{b_k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{a_k}{b_k} + 1 \right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\theta}{2^k} \right)} \quad (\because \textcircled{2}) \\
&= \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^{k+1}}} = \cos \frac{\theta}{2^{k+1}} \quad \left( \because -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

よって,  $n = k + 1$  のときも  $\textcircled{1}$  は成り立つ.

したがって, 数学的帰納法により, 任意の非負整数  $n$  に対して  $\textcircled{1}$  が成り立つので

$$\frac{a_n}{b_n} = \cos \frac{\theta}{2^n} \quad (\text{答})$$

(3) (2) の結果より

$$b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} = \sqrt{\left( b_n \cos \frac{\theta}{2^n} \right) b_{n-1}}$$

両辺を 2 乗して

$$b_n^2 = b_n b_{n-1} \cos \frac{\theta}{2^n} \quad \therefore \quad b_n = b_{n-1} \cos \frac{\theta}{2^n}$$

両辺に  $\sin \frac{\theta}{2^n}$  をかけて

$$b_n \sin \frac{\theta}{2^n} = b_{n-1} \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2} b_{n-1} \sin \frac{\theta}{2^{n-1}}$$

よって、数列  $\left\{ b_n \sin \frac{\theta}{2^n} \right\}$  は初項  $b_0 \sin \frac{\theta}{2^0} = r \sin \theta$ 、公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$b_n \sin \frac{\theta}{2^n} = r \sin \theta \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{r}{2^n} \sin \theta$$

そして、 $\theta \neq 0$  であることと、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{\theta}{2^n} \rightarrow 0$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r}{2^n} \sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin \frac{\theta}{2^n}} \cdot \frac{r \sin \theta}{\theta} \\ &= \frac{r \sin \theta}{\theta} \end{aligned}$$

また、(2) の結果より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( b_n \cdot \cos \frac{\theta}{2^n} \right) \\ &= \frac{r \sin \theta}{\theta} \cdot 1 = \frac{r \sin \theta}{\theta} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証終)

【9】 (1)  $f'(x) = \frac{3}{2}x(2-x)$

より、 $f(x)$  の増減は下表のようになる。 (答)

|         |            |   |            |   |            |
|---------|------------|---|------------|---|------------|
| $x$     | $\cdots$   | 0 | $\cdots$   | 2 | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | $-$        | 0 | $+$        | 0 | $-$        |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ |

(2)  $x_1 = a$  ( $1 < a < 2$ ) より、 $n = 1$  のときは  $1 < x_n < 2$  が成り立つ。

$n = k$  ( $\geq 1$ ) のとき、 $1 < x_n < 2$  が成り立つと仮定する。すなわち、 $1 < x_k < 2$  であると仮定する。ここで

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

であり

$$f(1) = 1, f(2) = 2$$

であることと、(1) の結果より  $f(x)$  は  $1 < x < 2$  において単調に増加することを合わせると

$$1 < x_{k+1} < 2$$

が成り立つ。

したがって、数学的帰納法より、すべての自然数  $n$  に対して  $1 < x_n < 2$  が成り立つ。

(証終)

(3)  $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}(x_n^3 - 3x_n^2 + 2x_n) = -\frac{1}{2}x_n(x_n - 1)(x_n - 2) \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$

であるから、 $1 < x_n < 2$  であることと合わせると、 $\textcircled{1}$  はつねに正である。



したがって、すべての自然数  $n$  に対して  $x_{n+1} > x_n$  である. (証終)

$$(4) \quad 2 - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^3 - 3x_n^2 + 4) = \frac{1}{2}(x_n + 1)(x_n - 2)^2$$

より

$$\frac{2 - x_{n+1}}{2 - x_n} = -\frac{1}{2}(x_n + 1)(x_n - 2)$$

である. ここで,  $g(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)$  とおくと

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

より,  $g(x)$  は  $x > \frac{1}{2}$  の範囲で単調に減少する. よって, (3) より  $\{x_n\}$  が単調に増

加し,  $x_n > \frac{1}{2}$  であることと合わせると

$$g(x_1) > g(x_2) > g(x_3) > \cdots > g(x_n) > g(x_{n+1}) > \cdots$$

が成り立つ. さらに,  $x_1 = a$  ( $1 < a < 2$ ),  $1 < x_n < 2$  より

$$g(x_1) < g(1) = 1, \quad g(x_n) > g(2) = 0$$

であるから,  $g(x_1) = b$  とおけば

$$2 - x_{n+1} \leq b(2 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ. すなわち,  $\textcircled{2}$  をみたす  $n$  に無関係な定数  $b$  ( $0 < b < 1$ ) が存在する.

(証終)

(5) (2), (4) の結果より

$$0 < 2 - x_n \leq b(2 - x_{n-1}) \leq b^2(2 - x_{n-2}) \leq \cdots \leq b^{n-1}(2 - x_1) = b^{n-1}(2 - a)$$

であり,  $0 < b < 1$  より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b^{n-1}(2 - a) = 0$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - x_n) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$$

すなわち, 数列  $\{x_n\}$  は収束し, その極限值は **2** である. (答)

## 2章 実戦演習2

### 問題

- 【1】  $1201^{124}$  の百の位の数値は、 $201^{124}$  の百の位の数値と同じなので、以下後者について考察する。二項定理より

$$201^{124} = (200 + 1)^{124} = \sum_{k=0}^{124} {}_{124}C_k 200^k$$

が成り立ち、この右辺の一般項において  $k \geq 2$  の場合は、 $201^{124}$  の百の位の数値に影響を与えない。よって

$${}_{124}C_0 + {}_{124}C_1 \times 200 = 1 + 124 \cdot 200 = 24801$$

より、求める百の位の数値は

8 (答)

- 【2】 (1) 点 P と辺 OA との距離は  $b$  で、点 P と辺 AB との距離は  $1 - a$  である。また、直線 OB の方程式は  $y = 2x$  だから、点 P と辺 OB との距離は

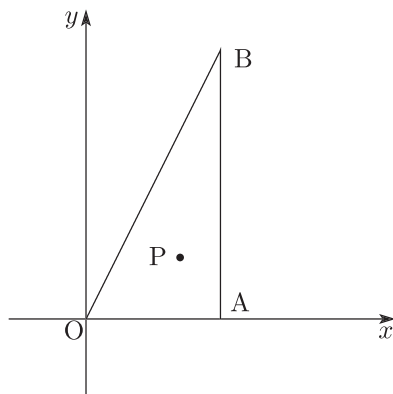
$$\frac{|2a - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2a - b|}{\sqrt{5}}$$

点 P は  $\triangle OAB$  の内部またはその周上にあるので領域  $y \leq 2x$  に含まれる、すなわち  $b \leq 2a$  が成り立つことに注意すると

$$\frac{|2a - b|}{\sqrt{5}} = \frac{2a - b}{\sqrt{5}}$$

以上より、求める距離の和は

$$k = b + 1 - a + \frac{2a - b}{\sqrt{5}} = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) a + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) b + 1 \quad (\text{答})$$



- (2) 直線

$$\left( \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) x + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) y + 1 = k \quad \cdots \textcircled{1}$$

が  $\triangle OAB$  の内部または周と共有点をもつときの  $k$  の最大値、最小値を求めればよい。直線①の傾きは

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{5}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{5}} - 1} = \frac{2 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} = \frac{(2 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$$

であり、この値は 0 より大きく 2 より小さい。よって、直線①が点 B を通るとき、

①の  $y$  切片

$$\frac{k - 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}(k - 1)}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(5 + \sqrt{5})(k - 1)}{4}$$

は最大となり、このとき  $k$  も最大になるので

最大値：2 (答)

また、直線①が点 A を通るとき、①の  $y$  切片は最小となり、このとき  $k$  も最小になるので

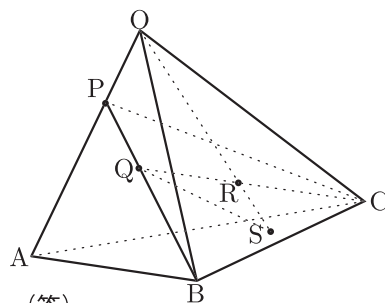
最小値： $\frac{2}{\sqrt{5}}$  (答)

【3】(1)  $\overrightarrow{OP} = p\vec{a}$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-q)\overrightarrow{OP} + q\vec{b} = p(1-q)\vec{a} + q\vec{b}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-r)\overrightarrow{OQ} + r\vec{c} \\ &= p(1-q)(1-r)\vec{a} + q(1-r)\vec{b} + r\vec{c} \quad (\text{答})\end{aligned}$$



(2)  $\overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OR} = p(1-q)(1-r)s\vec{a} + q(1-r)s\vec{b} + rs\vec{c}$

と表せて、点 S が平面 ABC 上にあることから

$$p(1-q)(1-r)s + q(1-r)s + rs = 1$$

$$\therefore s = \frac{1}{pqr - pq - qr - rp + p + q + r}$$

したがって

$$\overrightarrow{OS} = \frac{p(1-q)(1-r)\vec{a} + q(1-r)\vec{b} + r\vec{c}}{pqr - pq - qr - rp + p + q + r} \quad (\text{答})$$

(3) 四面体 OPQR の体積を  $V_3$  とし、まず  $V_1$  と  $V_3$ 、 $V_2$  と  $V_3$  の比を求める。

$$\triangle OPQ = q \triangle OPB = q \cdot p \triangle OAB$$

であり、四面体 OABC、四面体 OPQR の底面をそれぞれ、 $\triangle OAB$ 、 $\triangle OPQ$  としたときの高さの比は、線分 CQ、RQ の長さの比に等しいので、四面体 OABC の高さを  $h$  とすると、四面体 OPQR の高さは  $rh$  と表せる。よって

$$V_1 : V_3 = \frac{1}{3} \triangle OAB \cdot h : \frac{1}{3} pq \triangle OAB \cdot rh = 1 : pqr$$

次に、四面体 OPQS の体積は、四面体 OPQR と四面体 SPQR の体積の和に等しいから

$$V_3 : V_2 = OR : OS = 1 : s$$

以上より

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_1} \cdot \frac{V_2}{V_3} = pqr \cdot s = \frac{pqr}{pqr - pq - qr - rp + p + q + r} \quad (\text{答})$$

【4】(1) 商の微分公式より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-\sin x)e^x - (\cos x)e^x}{(e^x)^2} \\ &= -\frac{\sin x + \cos x}{e^x} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} y' &= \cos(\log |x|) \cdot (\log |x|)' \\ &= \frac{\cos(\log |x|)}{x} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【5】(1) 積の微分公式, 合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= (n+2)x^{n+1}e^{-nx} - nx^{n+2}e^{-nx} \\ &= (n+2-nx)x^{n+1}e^{-nx} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) 曲線  $y = f_n(x)$  上の点  $(t, f_n(t))$  における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (n+2-nt)t^{n+1}e^{-nt}(x-t) + t^{n+2}e^{-nt} \\ \therefore y &= (n+2-nt)t^{n+1}e^{-nt}x - (n+1-nt)t^{n+2}e^{-nt} \end{aligned}$$

この直線が原点  $O$  を通るとき

$$-(n+1-nt)t^{n+2}e^{-nt} = 0 \quad \therefore t = 0, \frac{n+1}{n}$$

であるから, 求める接線の方程式は

$$y = 0, y = \left(\frac{n+1}{ne}\right)^{n+1} x \quad (\text{答})$$

(3)  $g_n(x) = \left(\frac{n+1}{ne}\right)^{n+1} x$  であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(1)}{f_n(1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{ne}\right)^{n+1} e^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \\ &= 1 \cdot e \cdot e^{-1} = 1 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【6】(1)  $y = x^{\frac{1}{x}}$  とおき, この両辺の自然対数をとると

$$\log y = \frac{1}{x} \log x$$

両辺を  $x$  で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \log y \cdot \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \\ \iff \frac{y'}{y} &= \frac{1 - \log x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\therefore y' = y \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$$

よって,  $f(x)$  の増減は下表のようになる.

|         |       |            |     |            |
|---------|-------|------------|-----|------------|
| $x$     | $(0)$ | $\cdots$   | $e$ | $\cdots$   |
| $f'(x)$ |       | $+$        | $0$ | $-$        |
| $f(x)$  |       | $\nearrow$ | 極大  | $\searrow$ |

ゆえに  $f(x)$  は  $x = e$  のときに極大となり

$$\text{極大値: } f(e) = e^{\frac{1}{e}} \quad (\text{答})$$

(2) (1) の増減表より,  $f(x)$  は  $x > e$  の範囲では単調に減少し,  $e < 3$  であるから

$$f(e) > f(3) \iff e^{\frac{1}{e}} > 3^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore e^{\frac{1}{e}} > \sqrt[3]{3}$$

(証終)

【7】(1) 円錐の高さを  $h$  ( $0 < h < r$ ) とすると

$$x = \sqrt{r^2 - h^2}$$

が成り立つので

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi(r^2 - h^2)h$$

と表せる.  $V$  を  $h$  の関数とみて微分すると

$$V' = \frac{1}{3}\pi(r^2 - 3h^2)$$

となるので,  $V$  の増減は下表のようになる.

| $h$  | (0) | ... | $\frac{r}{\sqrt{3}}$ | ... | ( $r$ ) |
|------|-----|-----|----------------------|-----|---------|
| $V'$ |     | +   | 0                    | -   |         |
| $V$  |     | ↗   | 極大                   | ↘   |         |

ゆえに  $V$  は  $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$  のときに極大かつ最大となる. このとき

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}r$$

となるので, 求める最大値とそのときの  $x$  の値は

$$\text{最大値: } \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi r^3 \quad \left(x = \frac{\sqrt{6}}{3}r \text{ のとき}\right) \quad (\text{答})$$

(2) 円錐の側面の展開図において, 扇形の弧の長さを  $l$  とすると,  $l = 2\pi x$  より

$$S = \frac{1}{2}rl + \pi x^2 = \pi x(r + x)$$

であり

$$V = \frac{1}{3}\pi(r^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$

であるから

$$Q = \frac{V^2}{S^3} = \frac{\pi^2 x(r^2 - x^2)}{9\pi^3(r+x)^3} = \frac{x(r-x)}{9\pi(r+x)^2}$$

と表せる. そして,  $r+x=u$  ( $r < u < 2r$ ) とおくと

$$Q = \frac{(u-r)(2r-u)}{9\pi u^2} = \frac{1}{9\pi} \left( -\frac{2r^2}{u^2} + \frac{3r}{u} - 1 \right)$$

となり,  $Q$  を  $u$  の関数とみて微分すると

$$Q' = \frac{1}{9\pi} \left( \frac{4r^2}{u^3} - \frac{3r}{u^2} \right) = \frac{r(4r-3u)}{9\pi u^3}$$

となるので,  $Q$  の増減は下表のようになる.

|      |       |            |                |            |        |
|------|-------|------------|----------------|------------|--------|
| $u$  | $(r)$ | $\cdots$   | $\frac{4r}{3}$ | $\cdots$   | $(2r)$ |
| $Q'$ |       | +          | 0              | -          |        |
| $Q$  |       | $\nearrow$ | 極大             | $\searrow$ |        |

ゆえに,  $V$  は  $u = \frac{4r}{3}$  のときに極大かつ最大となる. このとき

$$x = \frac{4r}{3} - r = \frac{r}{3}$$

となるので, 求める最大値とそのときの  $x$  は

$$\text{最大値: } \frac{1}{72\pi} \quad \left( x = \frac{r}{3} \text{ のとき} \right) \quad (\text{答})$$

【8】(1) 商の微分公式, 合成関数の微分公式より

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \log x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (\log x)^2 - 2 \log x \cdot \frac{1}{x} \cdot (\log x - 1)}{(\log x)^4} = \frac{2 - \log x}{x(\log x)^3}$$

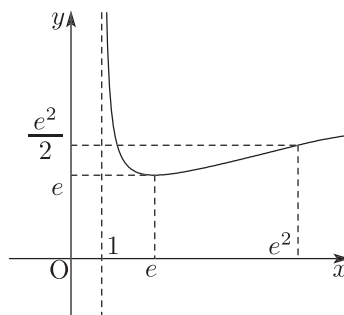
となり

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{\log x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log x} = \infty$$

であるから,  $y = f(x)$  の増減, グラフの凹凸

は下表のようになる. (答)

|          |       |            |     |            |                 |            |
|----------|-------|------------|-----|------------|-----------------|------------|
| $x$      | $(1)$ | $\cdots$   | $e$ | $\cdots$   | $e^2$           | $\cdots$   |
| $f'(x)$  |       | -          | 0   | +          | +               | +          |
| $f''(x)$ |       | +          | +   | +          | 0               | -          |
| $y$      |       | $\searrow$ | $e$ | $\nearrow$ | $\frac{e^2}{2}$ | $\nearrow$ |



また, グラフは右上図のようになる. (答)

(2) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の方程式は

$$y = \frac{\log t - 1}{(\log t)^2} (x - t) + \frac{t}{\log t}$$

この直線が点  $P(a, 0)$  を通るとき

$$0 = \frac{\log t - 1}{(\log t)^2} (a - t) + \frac{t}{\log t} \quad \therefore a = \frac{t}{1 - \log t} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで,  $g(t) = \frac{t}{1 - \log t}$  とおくと

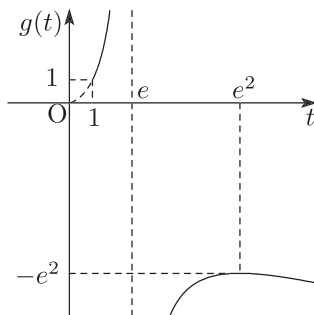
$$g'(t) = \frac{1 \cdot (1 - \log t) - t \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)}{(1 - \log t)^2} = \frac{2 - \log t}{(1 - \log t)^2}$$

となり

$$\lim_{t \rightarrow e-0} \frac{t}{1 - \log t} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow e+0} \frac{t}{1 - \log t} = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{1 - \log t} = -\infty$$

である. ゆえに,  $g(t)$  の増減は下表のようになり, グラフは右下図のようになる.

|         |     |     |         |     |        |     |
|---------|-----|-----|---------|-----|--------|-----|
| $t$     | (1) | ... | ( $e$ ) | ... | $e^2$  | ... |
| $g'(t)$ |     | +   |         | +   | 0      | -   |
| $g(t)$  | (1) | ↗   |         | ↗   | $-e^2$ | ↘   |



そして, (1) の結果より,  $y = f(x)$  のグラフが 1 つの直線と異なる 2 点で接することはないから, 接線が 2 本引けるためには, 方程式① が  $t > 1$  の範囲に異なる 2 つの解をもてばよく, そのような  $a$  の値の範囲は  
 $a < -e^2$  (答)

【9】 (1)  $f(x) = 6e^x - x^3$  とおくと

$$f'(x) = 6e^x - 3x^2, \quad f''(x) = 6e^x - 6x, \quad f'''(x) = 6e^x - 6$$

であり

$x > 0$  のとき  $f'''(x) > 0$  より  $f''(x)$  は  $x > 0$  において単調増加であり,

$$\text{かつ } f''(0) = 6 > 0$$

より

$$f''(x) > 0 \quad (x > 0)$$

また

$x > 0$  のとき  $f''(x) > 0$  より  $f'(x)$  は  $x > 0$  において単調増加であり,

$$\text{かつ } f'(0) = 6 > 0$$

より

$$f'(x) > 0 \quad (x > 0)$$

さらに

$x > 0$  のとき  $f'(x) > 0$  より  $f(x)$  は  $x > 0$  において単調増加であり,

$$\text{かつ } f(0) = 6 > 0$$

より

$$f(x) > 0 \quad (x > 0)$$

したがって,  $x > 0$  のとき

$$6e^x - x^3 > 0 \iff x^3 < 6e^x \iff \frac{x^2}{e^x} < \frac{6}{x}$$

が成り立つ.

(証終)

(2)  $x > 0$  のとき  $x^2 e^{-x} > 0$  であり,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} = 0$  であるから, (1) の結果と合わせる

と, はさみうちの原理により

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$$

が成り立つ.

(証終)

(3)  $g(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$  とおくと

$$g'(x) = -e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + e^{-x}(2x + 3) = (-x^2 - x + 2)e^{-x} = -(x+2)(x-1)e^{-x}$$

となり

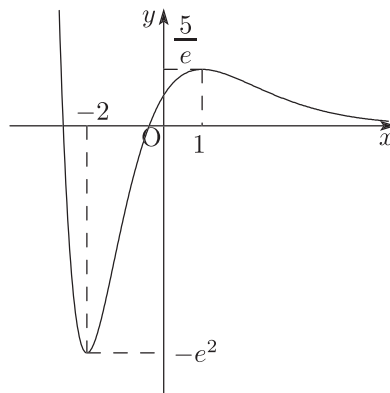
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(x^2 + 3x + 1) = \infty$$

また, (2) と同じようにして

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x}(x^2 + 3x + 1) = 0$$

となることが示せる. ゆえに,  $g(x)$  の増減  
は下表のようになり,  $y = g(x)$  のグラフは  
右図のようになる.

|         |            |        |            |               |            |
|---------|------------|--------|------------|---------------|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $-2$   | $\cdots$   | $1$           | $\cdots$   |
| $g'(x)$ | $-$        | $0$    | $+$        | $0$           | $-$        |
| $g(x)$  | $\searrow$ | $-e^2$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{e}$ | $\searrow$ |



そして,  $x$  の方程式  $x^2 + 3x + 1 = ke^x$  の実数解の個数は,  $y = g(x)$  のグラフと直線  $y = k$  との共有点の個数と一致するので, 求める実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 \text{ 個} & (k < -e^2 \text{ のとき}) \\ 1 \text{ 個} & (k = -e^2, k > 5e^{-1} \text{ のとき}) \\ 2 \text{ 個} & (-e^2 < k \leq 0, k = 5e^{-1} \text{ のとき}) \\ 3 \text{ 個} & (0 < k < 5e^{-1} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$



### 3章 実戦演習3

#### 問題

- 【1】(1)  $\angle DAB = \theta$  とし、点 D から辺 AB に下ろした垂線の足を H と

する。ただし、 $D = B$  のときは、 $H = B$  とする。このとき

$$|\overrightarrow{AD}| \cos \theta = |\overrightarrow{AH}|$$

が成り立つことに注意すると

$$t = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AB}| \cos \theta$$

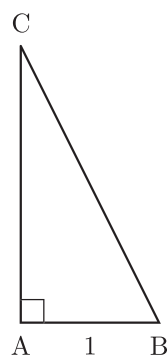
$$= |\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{AB}|$$

であり、仮定より

$$0 \leq |\overrightarrow{AH}| \leq 1, |\overrightarrow{AB}| = 1$$

であるから

$$0 \leq t \leq 1 \quad (\text{答})$$



- (2)  $D \neq C$  のとき、 $\angle DAC = \alpha$ ,  $\angle DCA = \beta$  とし、点 D から辺 CA に下ろした垂線の足を I とする。このとき

$$|\overrightarrow{AD}| \cos \alpha = |\overrightarrow{AI}|, |\overrightarrow{CD}| \cos \beta = |\overrightarrow{CI}|$$

が成り立つことに注意すると

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\iff |\overrightarrow{AD}| |\overrightarrow{AC}| \cos \alpha = |\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{CA}| \cos \beta$$

$$\iff |\overrightarrow{AI}| |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CI}| |\overrightarrow{CA}|$$

$$\iff |\overrightarrow{AI}| = |\overrightarrow{CI}|$$

よって、 $\textcircled{1}$  が成り立つのは点 I が辺 CA の中点に一致する場合であり、このとき点 D は辺 BC の中点に、点 H は辺 AB の中点にそれぞれ一致するので

$$t = |\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}|^2 = \frac{1}{2}$$

また、 $D = C$  のとき

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

であるから、 $\textcircled{1}$  は成り立たない。

以上より、求める  $t$  の値は

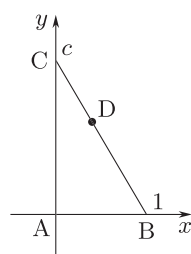
$$t = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

#### 別解

$A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, c)$  ( $c > 0$ ) となるように座標を設定して考える。

- (1)  $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (0, c)$  であり、点 D が辺 CB を  $s : (1 - s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) に内分するとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= s\overrightarrow{AB} + (1-s)\overrightarrow{AC} \\ &= (s, c(1-s)) \end{aligned}$$



よって

$$t = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = s$$

$$0 \leq s \leq 1 \text{ より}$$

$$0 \leq t \leq 1$$

(2)  $s = t$  より,  $\overrightarrow{AD} = (t, c(1-t))$ ,  $\overrightarrow{AC} = (0, c)$  なので

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = c^2(1-t)$$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = (t, -ct)$ ,  $\overrightarrow{CA} = (0, -c)$  なので

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = c^2t$$

よって,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$  が成り立つとき

$$c^2(1-t) = c^2t \quad \therefore \quad t = \frac{1}{2}$$

【2】 (1)  $k = 10i + j$  ( $i, j$  は負でない整数で,  $j \leq 9$ ) のとき

$$\left[ \frac{k}{10} \right] = i$$

である. よって,  $n = 10l + m$  ( $l, m$  は負でない整数で,  $m \leq 9$ ) とおくと,  $l \geq 1$

すなわち  $n \geq 10$  のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{k}{10} \right] &= \sum_{k=0}^n \left[ \frac{k}{10} \right] \quad (k=0 \text{ を加えても和は変わらない}) \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} 10i + l(m+1) \\ &= 5(l-1)l + l(m+1) \end{aligned}$$

と表せて, これは  $l=0$  すなわち  $n \leq 9$  のときも成り立つ.

ここで,  $0 \leq l(m+1) \leq 10l$  であることに注意すると

$$5(l-1)l \leq 5(l-1)l + l(m+1) \leq 5l(l+1)$$

が成り立つ. そして,  $5(l-1)l$  は  $l$  が増加するにつれて単調に増加することと

$$5 \cdot 6 \cdot 7 (= 210) < 238 < 5 \cdot 7 \cdot 8 (= 280)$$

であることより

$$5(l-1)l \leq 238 \leq 5l(l+1)$$

をみたす整数  $l$  は,  $l=7$  のみである. このとき

$$238 = 5 \cdot 6 \cdot 7 + 7 \cdot 4$$

より

$$m+1=4 \quad \therefore \quad m=3$$

であるから, 求める正の整数  $n$  の値は

$$n = 10 \cdot 7 + 3 = \mathbf{73} \quad (\text{答})$$

(2) 正の整数  $n$  に対して,  $\left[ \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right] = m$  であるとき

$$m \leq \sqrt{n} + \frac{1}{2} < m+1 \quad \therefore \quad m - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < m + \frac{1}{2}$$

であり, この各辺を 2 乗して

$$m^2 - m + \frac{1}{4} \leq n < m^2 + m + \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで

$$\sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \geq m+1 \quad \therefore \quad \sqrt{n+1} \geq m + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

であれば、 $\left[ \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right] \geq m+1$  である。いま、 $\textcircled{2}$ の両辺を2乗すると

$$n+1 \geq m^2 + m + \frac{1}{4} \quad \therefore \quad n \geq m^2 + m - \frac{3}{4} \quad \dots \textcircled{3}$$

となるので、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ の両方をみたす正の整数  $n$  は、 $n = m^2 + m$  のみであり、このとき

$$\left[ \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right] = m+1$$

それ以外の場合には

$$\left[ \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right] = m$$

であるので

$$\left[ \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right] - \left[ \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \begin{cases} 1 & (n = m^2 + m \text{ をみたす正の整数 } m \text{ が存在するとき}) \\ 0 & (n = m^2 + m \text{ をみたす正の整数 } m \text{ が存在しないとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$

【3】  $A$  の要素を  $a, b, c, d, e$  とおき

$$1 \leq a < b < c < d < e \leq 19$$

であるとする。このとき、 $A$  のどの2つの要素の差も1より大きいことから

$$b-a > 1, c-b > 1, d-c > 1, e-d > 1$$

となる。これより

$$1 \leq a < b-1 < c-2 < d-3 < e-4 \leq 15$$

が成り立ち、これをみたす  $a, b, c, d, e$  の組の個数が、求める  $A$  の個数であるから

$${}_{15}C_5 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003 \quad (\text{答})$$

【4】 (1)  $C_1$  と  $C_2$  は点  $Q$  で接しているので、3点

$O, M, Q$  は同一直線上にある。そして、

点  $Q$  の座標が

$$(5 \cos \theta, 5 \sin \theta)$$

であることから、点  $M$  の座標は

$$(r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (0 < r < 5)$$

と表すことができる。このとき、 $C_2$  の半径は

$5-r$  となり、これが線分  $AM$  の長さに等しい

ことから

$$AM^2 = (5-r)^2$$

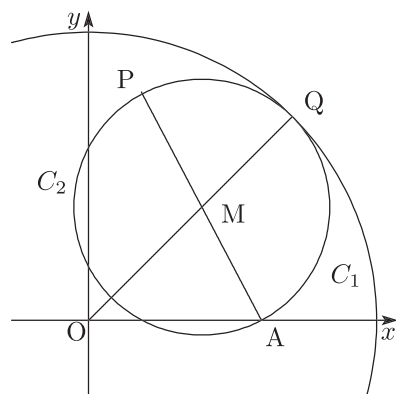
$$\iff (r \cos \theta - 3)^2 + r^2 \sin^2 \theta = (5-r)^2$$

$$\iff r^2 \cos^2 \theta - 6r \cos \theta + 9 + r^2 \sin^2 \theta = 25 - 10r + r^2$$

$$\therefore r = \frac{8}{5-3 \cos \theta}$$

したがって、求める  $M$  の座標は

$$M \left( \frac{8 \cos \theta}{5-3 \cos \theta}, \frac{8 \sin \theta}{5-3 \cos \theta} \right) \quad (\text{答})$$



(2) P は線分 AM を 2 : 1 に外分する点であるから、 $P(X, Y)$  とおくと

$$X = -3 + 2 \cdot \frac{8 \cos \theta}{5 - 3 \cos \theta}, Y = 2 \cdot \frac{8 \sin \theta}{5 - 3 \cos \theta} \quad \dots \textcircled{1}$$

点 P は円  $C_1$  の内部または周上にあるので、 $-5 \leq X \leq 5$  であることに注意し、 $\textcircled{1}$

の第 1 式を  $\cos \theta$  について解くと

$$\cos \theta = \frac{5X + 15}{3X + 25}$$

これを $\textcircled{1}$ の第 2 式に代入し、 $\sin \theta$  について解くと

$$\sin \theta = \frac{5Y}{3X + 25}$$

となるから、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  より

$$\left( \frac{5X + 15}{3X + 25} \right)^2 + \left( \frac{5Y}{3X + 25} \right)^2 = 1 \quad \therefore \quad \frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$$

したがって、求める点 P の軌跡は

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned} \text{【5】 (1)} \quad \sqrt{3} \cos x - \sin x &= 2 \left\{ \sin x \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) + \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \\ &= 2 \left( \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \cos x \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2 \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

であり、 $-\pi \leq x \leq \pi$  のとき、 $-\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$  であるから

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x > 0 \iff 2 \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) > 0 \iff 0 < x + \frac{2\pi}{3} < \pi$$

ゆえに、求める  $x$  の値の範囲は

$$-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \quad (\text{答})$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \left| \frac{4 \sin x}{\sqrt{3} \cos x - \sin x} \right| dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2|\sin x|}{\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right)} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \frac{-2 \sin x}{\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x}{\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right)} dx \end{aligned}$$

ここで、 $x + \frac{2\pi}{3} = \theta$  とおくと

$$\begin{aligned} 2 \sin x &= 2 \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \sin \theta \cos \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \theta \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= -\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta \end{aligned}$$

となるので、求める定積分の値は

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(1 + \sqrt{3} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) d\theta - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \left(1 + \sqrt{3} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) d\theta \\
 &= \left[\theta + \sqrt{3} \log |\sin \theta|\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} - \left[\theta + \sqrt{3} \log |\sin \theta|\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} \\
 &= \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} \log \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \log \sqrt{3} \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

【6】 (1)  $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$  の両辺を  $x$  で微分すると

$$g'(x) = e^x f(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、 $x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$  の両辺を  $x$  で微分すると

$$f(x) - 1 + x f'(x) = 2e^{-x} g(x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

さらに、 $\textcircled{2}$ の両辺を  $x$  で微分すると

$$2f'(x) + x f''(x) = -2e^{-x} g(x) + 2e^{-x} g'(x) \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ より、 $g(x)$ ,  $g'(x)$  を消去すると

$$2f'(x) + x f''(x) = -f(x) + 1 - x f'(x) + 2f(x)$$

$$\therefore x f''(x) + (x+2) f'(x) - f(x) = 1 \quad \cdots \textcircled{4} \quad (\text{証終})$$

(2)  $f(x)$  の次数を  $n$  とおく.  $n \geq 2$  と仮定し,  $f(x) = ax^n + h(x)$  ( $a \neq 0$ ,  $h(x)$  は高々  $n-1$  次の整式) とすると

$$x f''(x) = n(n-1) a x^{n-1} + x h''(x)$$

$$(x+2) f'(x) = n a x^n + 2n a x^{n-1} + (x+2) h'(x)$$

より、 $\textcircled{4}$ の左辺の  $n$  次の項の係数は

$$n a - a = (n-1) a \neq 0 \quad (\because a \neq 0, n \geq 2)$$

となるので、 $\textcircled{4}$ の左辺の次数は  $n (\geq 2)$  である. これは、 $\textcircled{4}$ の右辺の次数が 0 であることに反するので、 $f(x)$  は定数または 1 次式である. (証終)

(3)  $g(0) = \int_0^0 e^t f(t) dt = 0$  であるから、 $\textcircled{2}$ において  $x=0$  とすると

$$f(0) - 1 = 0 \quad \therefore f(0) = 1$$

よって、(2)の結果と合わせると、 $f(x) = ax + 1$  とおける. このとき、 $\textcircled{4}$ より

$$a(x+2) - ax - 1 = 1 \quad \therefore a = 1$$

したがって

$$f(x) = x + 1 \quad (\text{答})$$

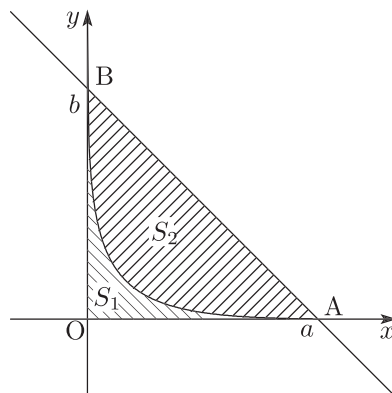
これと $\textcircled{2}$ より

$$x + 1 - 1 + x = 2e^{-x} g(x) \quad \therefore g(x) = x e^x \quad (\text{答})$$

【7】 (1)  $y = 0$  のとき

$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} = 1 \iff \frac{x}{a} = 1 \quad \therefore x = a$   
 であり,  $0 \leq x \leq a$  において,  $y \geq 0$  である.  
 ここで,  $X = \frac{x}{a}$  とおくと,  $dx = adX$  であるから

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a y \, dx \\ &= b \int_0^1 \left(1 - 3\sqrt[3]{X} + 3\sqrt[3]{X^2} - X\right) adX \\ &= ab \left[X - \frac{9}{4}X^{\frac{4}{3}} + \frac{9}{5}X^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}X^2\right]_0^1 \\ &= ab \left(1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{20}ab \quad (\text{答}) \end{aligned}$$



(2)  $X = \frac{x}{a}$ ,  $Y = \frac{y}{b}$  とおき,  $C$  と  $l$  の式から  $Y$  を消去して整理すると

$$\sqrt[3]{1-X} = 1 - \sqrt[3]{X} \iff 1-X = 1 - 3\sqrt[3]{X} + 3\sqrt[3]{X^2} - X \iff X^2 = X$$

$$\therefore X = 0, 1 \text{ すなわち } x = 0, a$$

また,  $\sqrt[3]{X} + \sqrt[3]{Y} = 1$  のとき

$$Y = \left(1 - \sqrt[3]{X}\right)^3 = 1 - X + 3\left(\sqrt[3]{X^2} - \sqrt[3]{X}\right)$$

より,  $0 \leq X \leq 1$  において,  $1 - X \geq \left(1 - \sqrt[3]{X}\right)^3$  である. よって,  $O(0, 0)$ ,  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  とすると

$$S_2 = \triangle OAB - S_1 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{20}ab = \frac{9}{20}ab$$

であるから

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{20}ab \div \left(\frac{9}{20}ab\right) = \frac{1}{9} \quad (\text{答})$$

【8】 (1)  $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  より

$$\sin x - \cos x \geq 0 \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\right)$$

であるから, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= \sqrt{2} \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2}(-\cos \pi + \cos 0) = 2\sqrt{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2)  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  のとき,  $\sin x, \cos x$  はともに 0 以上だから

$$|\sin x| \geq |\cos x| \iff \sin x \geq \cos x$$

$$\iff \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\iff \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad \left( \textcircled{1} \text{で等号が成立するのは } x = \frac{\pi}{4} \text{ のとき} \right)$$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  のとき,  $\sin x$  は 0 以上,  $\cos x$  は 0 以下だから

$$|\sin x| \geq |\cos x| \iff \sin x \geq -\cos x$$

$$\iff \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\iff \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \quad \left( \textcircled{2} \text{で等号が成立するのは } x = \frac{3\pi}{4} \text{ のとき} \right)$$

$\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$  のとき,  $\sin x, \cos x$  はともに 0 以下だから

$$|\sin x| \geq |\cos x| \iff \sin x \leq \cos x$$

$$\iff \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

これをみたとす  $x$  は  $x = \frac{5\pi}{4}$  のみであり, このとき  $\textcircled{3}$  で等号が成立する.

以上より

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ のとき} \quad |\sin x| > |\cos x|$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ のとき} \quad |\sin x| = |\cos x| \quad (\text{答})$$

$$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ のとき} \quad |\sin x| < |\cos x|$$

(3)  $y = |\sin x|$  と  $y = |\cos x|$  のグラフは直線  $x = \frac{3\pi}{4}$  に関して対称であるから, (2) の

結果と合わせると

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x \, dx - 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx \\ &= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos 2x) \, dx - \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \pi \left[ x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \pi \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) - \pi \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

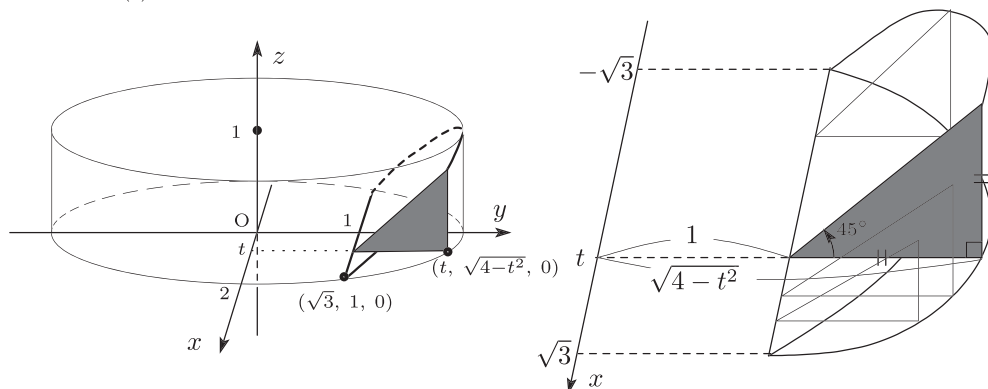
**[9]** (1)  $S_k = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot k \cdot \sin \frac{k}{2n} \pi = \frac{k}{2} \sin \frac{k}{2n} \pi \quad (\text{答})$

(2) (1) の結果より, 区分求積法を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} \sin \frac{k}{2n} \pi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{n} \sin \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{2} x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\
&= \left[-\frac{x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{2}{\pi^2} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\pi^2} \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

【10】平面  $H$  の下側の立体を  $P$  とする. 立体  $P$  の平面  $x = t$  ( $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ ) による切り口の面積  $S(t)$  を求める.



$xy$  平面上の直線  $x = t$ ,  $z = 0$  と円  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$  の共有点の  $y$  座標は  $\pm\sqrt{4-t^2}$

である. ゆえに, 立体  $P$  の平面  $x = t$  ( $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ ) による切り口は直角をはさむ 2 辺の長さが  $\sqrt{4-t^2} - 1$  の直角 2 等辺 3 角形であり, その面積  $S(t)$  は

$$S(t) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{4-t^2} - 1 \right)^2 = \frac{5-t^2-2\sqrt{4-t^2}}{2}$$

となる. したがって, 立体  $P$  の  $yz$  平面に関する対称性より, 求める体積は

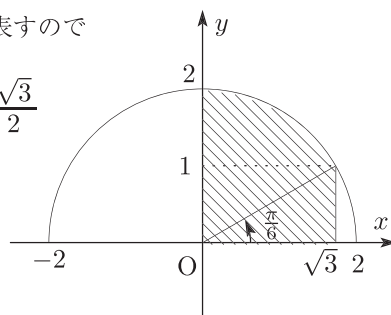
$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\sqrt{3}} S(t) dt &= \int_0^{\sqrt{3}} \left( 5-t^2-2\sqrt{4-t^2} \right) dt \\
&= \left[ 5t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt
\end{aligned}$$

ここで,  $\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt$  は右図の斜線部分の面積を表すので

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt = \frac{\pi \cdot 2^2}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

以上より, 求める体積は

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\sqrt{3}} S(t) dt &= 5\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3} - 2 \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \quad (\text{答})
\end{aligned}$$





## 4 章 実戦演習 4

### 問題

- 【1】  $|\overrightarrow{QP_1}|^2 + |\overrightarrow{QP_2}|^2 + |\overrightarrow{QP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OQ}|^2$   
 $= |\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OQ}|^2 - 3|\overrightarrow{OQ}|^2$   
 $= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2 - 2(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}) \cdot \overrightarrow{OQ}$   
 $= |\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{OP_2}|^2 + |\overrightarrow{OP_3}|^2 \quad (\because \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} = \vec{0})$   
 これは点  $Q$  の位置によらない値なので、2 点  $Q, R$  に対して  
 $|\overrightarrow{QP_1}|^2 + |\overrightarrow{QP_2}|^2 + |\overrightarrow{QP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{RP_1}|^2 + |\overrightarrow{RP_2}|^2 + |\overrightarrow{RP_3}|^2 - 3|\overrightarrow{OR}|^2$   
 が成り立つ。 (証終)

- 【2】 (1) 袋の中には偶数のカードと奇数のカードが 50 枚ずつ入っている。そして、 $X + Y$  が偶数となるためには、 $X$  が偶数の場合は  $Y$  は偶数、 $X$  が奇数の場合は  $Y$  は奇数であればよい。よって、 $X$  の偶奇に関わらず、 $X + Y$  が偶数となる確率は

$$\frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

- (2) 100 枚のカードの中からカードを 1 枚ずつ、計 2 枚取り出す方法は、取り出したカードを元に戻すとき

$$100^2 = 10000 \text{ (通り)}$$

あり、そのそれぞれは同様に確からしい。

$X + Y \leq 5$  となる  $X, Y$  の組は

$$(X, Y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ (3, 1), (3, 2), (4, 1)$$

の 10 通りあるから、求める確率は

$$\frac{10}{10000} = \frac{1}{1000} \quad (\text{答})$$

- (3)  $X + Y \leq n$  となる確率を  $P(n)$  とおく。  $n < m$  のとき、 $X, Y$  が不等式  $X + Y \leq n$  をみたせば、不等式  $X + Y \leq m$  もみたすから

$$P(1) \leq P(2) \leq \cdots \leq P(200) \leq P(201) \leq \cdots \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

ここで、 $X + Y = k$  ( $2 \leq k \leq 101$ ) となる  $X, Y$  の組は

$$(X, Y) = (1, k-1), (2, k-2), \cdots, (k-1, 1)$$

の  $k-1$  通りあるから、 $X + Y \leq n$  ( $2 \leq n \leq 101$ ) となる  $X, Y$  の組は

$$\sum_{k=2}^n (k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1) \text{ (通り)}$$

ある。よって  $2 \leq n \leq 101$  のとき、 $P(n) = \frac{n(n-1)}{20000}$  と表せて、これが  $\frac{1}{4}$  に等し

いとき

$$\frac{n(n-1)}{20000} = \frac{1}{4} \iff n(n-1) = 5000 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つが

$$71 \cdot 70 = 4970, 72 \cdot 71 = 5112$$

であるから、②をみたす自然数  $n$  ( $2 \leq n \leq 101$ ) は存在しない.

よって、①と合わせると、 $X + Y \leq n$  となる確率が  $\frac{1}{4}$  であるような自然数  $n$  は存在しない. (証終)

【3】  $p^n$  以下の正整数で、 $p^k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) で割り切れるものの個数は

$$\frac{p^n}{p^k} = p^{n-k}$$

であるから、求める回数は

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \dots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1} \quad (\text{答})$$

【4】 点 A, B, C, D, E, F, G の回転後の点をそれぞれ A', B', C', D', E', F', G' とする.

(1) 点 O, B, F を通る平面で考えると B', F'

も同一平面上にあり、回転の角度を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{OD}{OF} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin \theta = \frac{DF}{OF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

である. このとき、B' から  $xy$  平面上に下ろした垂線の足を  $B'_0$  とすると

$$OB'_0 = OB' \cos \theta = \sqrt{2} \cos \theta$$

$$B'B'_0 = OB' \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$$

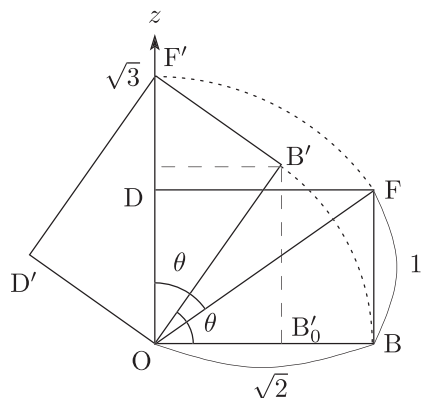
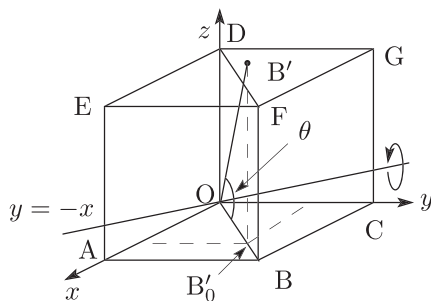
であり、 $\triangle OAB$  は  $OA = AB$  の直角二等辺三角形であるから、B' の座標は

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}} OB'_0, \frac{1}{\sqrt{2}} OB'_0, B'B'_0 \right) \\ = (\cos \theta, \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$$

となる.

よって、回転後の頂点 B の座標は

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \quad (\text{答})$$



- (2)  $\overrightarrow{A'G'}$  を直線  $y = -x$  に平行または垂直なベクトルを用いて表すと

$$\overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{B'F'}$$

ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'C'} &= \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) \\ &= (-1, 1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'F'} &= \overrightarrow{OF'} - \overrightarrow{OB'} = (0, 0, \sqrt{3}) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'G'} &= (-1, 1, 0) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

- 【5】 (1) 点  $\frac{(1+i)z+2-i}{z-2i}$  が中心  $1+i$ , 半径 1 の円を描くので

$$\left| \frac{(1+i)z+2-i}{z-2i} - (1+i) \right| = 1$$

で, これを変形すると

$$\begin{aligned}& |(1+i)z+2-i - (1+i)(z-2i)| = |z-2i| \\ \iff & |z-2i| = |i| \\ \iff & |z-2i| = 1\end{aligned}$$

よって,  $C_1$  は中心  $2i$ , 半径 1 の円である. (答)

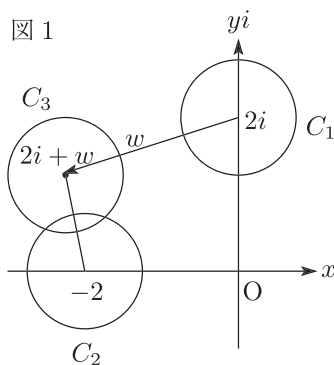
- (2)  $iz = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)z$  なので,  $C_2$  は円  $C_1$  を原点を中心として  $\frac{\pi}{2}$  回転させた円, すなわち

中心  $i \cdot 2i = -2$ ,  
半径 1 の円

である.

一方,  $C_3$  は  
中心  $2i + w$ ,  
半径 1 の円

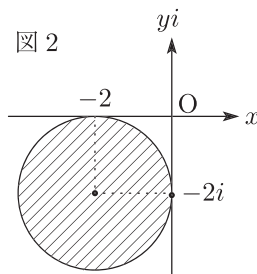
であるから, 2 円が共有点をもつための条件は



$$1 - 1 \leq |(2i + w) - (-2)| \leq 1 + 1$$

$$\iff |w - (-2 - 2i)| \leq 2$$

よって,  $w$  の存在範囲は図 2 の斜線部分  
(境界を含む) である. (答)



<研究>

一般に半径  $r, R$  の 2 円が共有点をもつための条件は,

2 円の中心間の距離  $d$  に対して

$$|R - r| \leq d \leq R + r$$

が成り立つことである. 各自, 図をかいて確認してほしい.

【6】(1)  $z_1 = wz_0 - 1, z_2 = wz_1 - 1$  より

$$z_1 - z_0 = (w - 1)z_0 - 1$$

$$z_2 - z_0 = w(wz_0 - 1) - 1 - z_0 = (w + 1)\{(w - 1)z_0 - 1\}$$

となり

$$z_2 - z_0 = (w + 1)(z_1 - z_0)$$

が成り立つ.  $z_0 \neq \frac{1}{w-1}$  であるとき

$$z_1 - z_0 = (w - 1)z_0 - 1 \neq 0$$

また

$$w + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

であるから, 点  $A_2$  は点  $A_1$  を  $A_0$  のまわりに  $\frac{\pi}{3}$  回転した点である. よって, 三角形  $A_0A_1A_2$  は正三角形となる. (証終)

(2)  $A_0, A_1, A_2$  が原点中心, 半径 1 の円の周上または内部に含まれる条件は

$$|z_0| \leq 1, |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$$

であるが,  $w^3 = 1, |w| = 1$  より

$$|z_1| \leq 1 \iff |wz_0 - 1| \leq 1$$

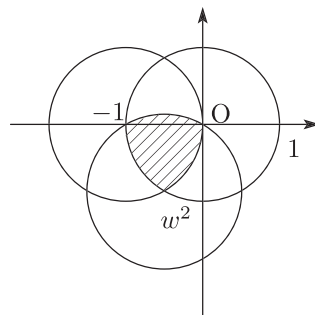
$$\iff |z_0 - w^2| \leq 1$$

$$|z_2| \leq 1 \iff |w(wz_0 - 1) - 1| \leq 1$$

$$\iff |w^2z_0 - (w + 1)| \leq 1$$

$$\iff |z_0 - (w^2 + w)| \leq 1$$

$$\iff |z_0 + 1| \leq 1$$



これらを図示すると, 点  $A_0$  が動きうる範囲は図の斜線部分となる (境界を含む).

この領域の面積は, 1 辺 1 の正三角形と, 半径 1・中心角  $\frac{\pi}{3}$  の弓形 3 個分で

$$3 \cdot \frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

【7】(1)  $z_1 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}z_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z_0$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right\} \cdot 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{答})$$

$$(2) \quad z_2 = \frac{-1}{z_0} = \frac{\cos \pi + i \sin \pi}{2(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{2} \{ \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) \} \quad (\text{答})$$

(3) (1), (2) より,

$$\begin{cases} OP_0 = |z_0| = 2, \quad OP_1 = |z_1| = 1 \\ \angle P_0 P_1 O = \frac{\pi}{2} \quad (\because \text{図 1}) \end{cases}$$

よって, 4 点  $O, P_0, P_1, P_2$  が同一円周上にあるのは,  $\angle OP_2 P_0 = \frac{\pi}{2}$  のときで

$\frac{z_0 - z_2}{0 - z_2}$  が純虚数のときである.

$$\begin{aligned} & \frac{z_0 - z_2}{0 - z_2} \\ &= \frac{z_0 + \frac{1}{z_0}}{\frac{1}{z_0}} = z_0^2 + 1 \end{aligned}$$

$$= \{2(\cos \theta + i \sin \theta)\}^2 + 1 = 4(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + 1$$

$$= (4 \cos 2\theta + 1) + 4i \sin 2\theta$$

$$\therefore 4 \cos 2\theta + 1 = 0 \iff 4(2 \cos^2 \theta - 1) + 1 = 0$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{3}{8}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\therefore z_0 = 2 \left( \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{5}{8}} i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} i \quad (\text{答})$$

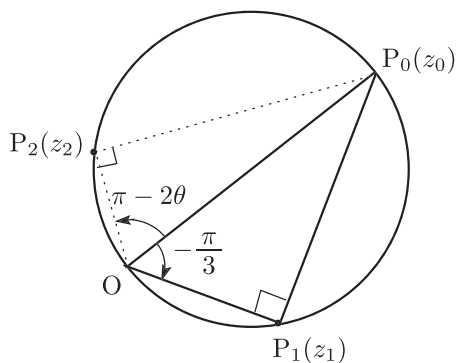


図 1

【8】 (1)  $z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$  であるから

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくと

$$w = \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= r \left\{ \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \right\}$$

$$\therefore w^{24} = r^{24} \left[ \cos \left\{ 24 \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \right\} + i \sin \left\{ 24 \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \right]$$

$$= r^{24} (\cos 24\theta + i \sin 24\theta)$$

なので,  $w^{24} = 1$  であるとき

$$r^{24} = 1 \quad \therefore r = 1$$

そして

$$24\theta = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$\therefore \theta = \frac{n}{12}\pi$$

よって,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  であるとき

$$\theta = \frac{7}{12}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{12}\pi$$

この  $\theta$  に対して

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

であり, 図示すると図の 5 つの点になる.

(答)

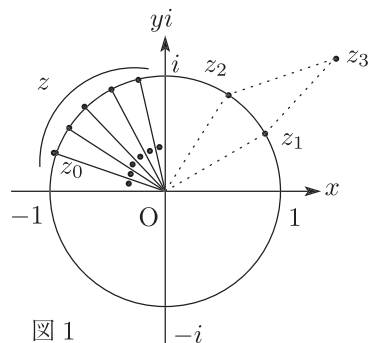


図 1

(2) 図 1 より,  $z$  と  $z_2$  の距離が最大になるのは,

$$\theta = \frac{11}{12}\pi$$

のときである. よって,

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi = \cos \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(3) \quad z_3 = z_1 + z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i$$

である. そこで, 座標平面上で考えると, 3 点

$$P_0 \left( -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right), \quad P_2 \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad P_3 \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$$

を頂点とする三角形の面積を求めればよい. ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_2P_0} &= \left( -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2}{4}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4} \right) \\ \overrightarrow{P_2P_3} &= \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

なので, 求める面積を  $S$  とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \\ &= \frac{1}{16} \left| -(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2) - \sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \right| \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【9】 (1)  $w_0 = z + \frac{1}{z}$  より

$$w_1 = w_0^2 - 2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

$$w_2 = w_1^2 - 2 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - 2 = z^4 + \frac{1}{z^4}$$

よって

$$w_n = z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

と類推できるので、これを数学的帰納法で証明する.

(I)  $w_0 = z + \frac{1}{z}$  なので、 $n = 0$  のときの成立は明らかである.

(II)  $n = k$  ( $\geq 0$ ) のときの成立、すなわち  $w_k = z^{2^k} + \frac{1}{z^{2^k}}$  を仮定すると

$$w_{k+1} = w_k^2 - 2 = \left(z^{2^k} + \frac{1}{z^{2^k}}\right)^2 - 2$$

$$= \left(z^{2^k}\right)^2 + \left(\frac{1}{z^{2^k}}\right)^2 = z^{2^{k+1}} + \frac{1}{z^{2^{k+1}}}$$

となるので、 $n = k + 1$  のときも成立する.

以上より

$$w_n = z^{2^n} + \frac{1}{z^{2^n}} \quad (\text{答})$$

(2)  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$  なので

$$w_0 = z + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{2} \left\{\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \sqrt{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$\therefore |w_0|^2 = \left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{3^2 \times 6 + 2}{4^2} = \frac{7}{2} \quad (\text{答})$$

(3) ド・モアブルの定理より

$$z^{2^n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2^n} \left\{\cos \left(\frac{\pi}{6} \times 2^n\right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \times 2^n\right)\right\}$$

となるので

$$r_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2^n}, \quad \theta_n = \frac{\pi}{6} \times 2^n$$

とおくと

$$w_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) + \frac{1}{r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)}$$

$$= r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) + \frac{1}{r_n} \{\cos(-\theta_n) + i \sin(-\theta_n)\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(r_n + \frac{1}{r_n}\right) \cos \theta_n + i \left(r_n - \frac{1}{r_n}\right) \sin \theta_n \\
\therefore |w_n|^2 &= \left(r_n + \frac{1}{r_n}\right)^2 \cos^2 \theta_n + \left(r_n - \frac{1}{r_n}\right)^2 \sin^2 \theta_n \\
&= \left(r_n^2 + \frac{1}{r_n^2}\right) + 2(\cos^2 \theta_n - \sin^2 \theta_n) \\
&= \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 2^{2^n} \right\} + 2 \cos 2\theta_n
\end{aligned}$$

そこで,  $f(n) = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 2^{2^n} \right\} + 2 \cos 2\theta_n$  とおけば, (2) より,  $f(0) < 10^2$  で

あり

$$f(1) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 + 2 < 10^2$$

$$f(2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2^4 + 2 < 10^2$$

そして,  $n \geq 3$  のとき

$$|2 \cos 2\theta_n| \leq 2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} > 0, \quad 2^{2^n} \geq 2^8$$

なので

$$f(n) > 0 + 2^8 - 2 > 10^2$$

よって,  $f(n) > 10^2$  すなわち  $|w_n| > 10$  となる最小の番号  $n$  は

**$n = 3$**  (答)



## 5章 実戦演習5

### 問題

- 【1】(1) 出た目の数が1, 4ならBに, 2, 5ならCに移り, 3, 6ならAに戻るので, 求める確率はすべて

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

- (2) (1)と同じように考えると,  $n$ 回投げる直前に駒がどこにあっても,  $n$ 回投げたとき, 移動させた後の駒がA, B, Cにある確率はすべて

$$\frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

- (3) サイコロを  $n$  回投げたとき, 駒が頂点Bを  $2n$  回通過するには, 出た目の合計を  $k$  とすると,  $k = 6n - 2, 6n - 1, 6n$  であればよい. すなわち,  $n \geq 2$  のとき
- ・ 6の目が  $n - 1$  回, 4の目が1回出るか, 6の目が  $n - 2$  回, 5の目が2回出る
  - ・ 6の目が  $n - 1$  回, 5の目が1回出る
  - ・ 6の目が  $n$  回出る

のいずれかであればよいので, 求める確率は

$$\frac{{}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_1 + 1}{6^n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot 6^n}$$

これは  $n = 1$  のときも成り立つので, 求める確率は

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot 6^n} \quad (\text{答})$$

- 【2】(1) 数列  $\{c_n\}$  は, 初項24, 公比8の等比数列であるから, その一般項は

$$c_n = 24 \cdot 8^{n-1} = 3 \cdot 8^n$$

このとき, 与えられた漸化式より

$$b_{n+1} = 4b_n + 3 \cdot 8^n$$

この各辺を  $8^{n+1}$  で割ると

$$\frac{b_{n+1}}{8^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_n}{8^n} + \frac{3}{8}$$

よって,  $\frac{b_n}{8^n} = d_n$  とおくと

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{3}{8} \quad \text{すなわち} \quad d_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left( d_n - \frac{3}{4} \right)$$

が成り立つので, 数列  $\left\{ d_n - \frac{3}{4} \right\}$  は初項

$$d_1 - \frac{3}{4} = \frac{b_1}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であるから

$$d_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \therefore \quad b_n = \frac{3}{4} \cdot 8^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n \quad (\text{答}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

- (2) 与えられた漸化式より

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + b_{n+2}$$

$$= 2(2a_{n+1} + b_{n+1}) + 4b_{n+1} + c_{n+1} = 4a_{n+1} + 6b_{n+1} + c_{n+1}$$

$$= 4(2a_n + b_n) + 6(4b_n + c_n) + 8c_n = 8a_n + 28b_n + 14c_n$$

$$\therefore a_{n+3} - a_n = 7(a_n + 4b_n + 2c_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ. ここで,  $a_n, b_n, c_n$  が整数であれば, 与えられた漸化式より,  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  も整数であるので, 帰納的に任意の自然数  $n$  に対し,  $a_n, b_n, c_n$  は整数である. ゆえに, ②より,  $a_{n+3} - a_n$  は 7 で割り切れる. (証終)

また

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 2a_1 + b_1 = 6 + 8 = 14 \\ b_2 &= \frac{3}{4} \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 56 \quad (\because \text{①}) \\ a_3 &= 2a_2 + b_2 = 84 \end{aligned}$$

であるから,  $a_{n+3} - a_n$  が 7 で割り切れることと合わせると,  $a_n$  が 7 で割り切れるための条件は

$n$  が 3 で割ると 2 余る数であるか,  $n$  が 3 の倍数であること (答)

である.

【3】(1) 直線 OP は, 原点 O を通り, 傾きが

$$\frac{3n^2 - 6n - 0}{n - 0} = 3n - 6$$

の直線であるから, その方程式は

$$y = (3n - 6)x$$

となる.

よって, 直線  $x = k$  上にあり  $D$  に含まれる

格子点は

$$(k, (3n - 6)k), (k, (3n - 6)k - 1), \dots, (k, 3k^2 - 6k)$$

であるから, その個数は

$$f(k) = (3n - 6)k - (3k^2 - 6k) + 1 = -3k^2 + 3nk + 1 \quad (\text{答})$$

(2) (1) の結果より,  $D$  に含まれる格子点の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-3k^2 + 3nk + 1) &= -3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 3n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n+1 \\ &= \frac{1}{2} (n+1)(n^2 - n + 2) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

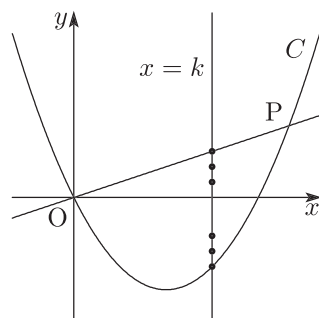
$$(3) f(k) = -3 \left( k - \frac{n}{2} \right)^2 + \frac{3n^2}{4} + 1$$

であり,  $k$  は整数であるから,  $n$  が偶数の場合,  $k = \frac{n}{2}$  のときに  $f(k)$  は最大にな

る. また,  $n$  が奇数の場合,  $k$  が  $\frac{n}{2}$  に最も近い整数のとき, すなわち  $k = \frac{n \pm 1}{2}$  のときに  $f(k)$  は最大になる.

以上をまとめると,  $f(k)$  が最大になるような  $k$  の値は

$$\begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{n \pm 1}{2} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (\text{答})$$



【4】 (1) P(2, 0) のとき

$$\begin{aligned}\overline{PS} &= \frac{|3 \cdot 2 - 0|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{5}\sqrt{10} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

P(x, y) のとき

$$\overline{PS} = \frac{|3x - y|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3x - y|}{\sqrt{10}}$$

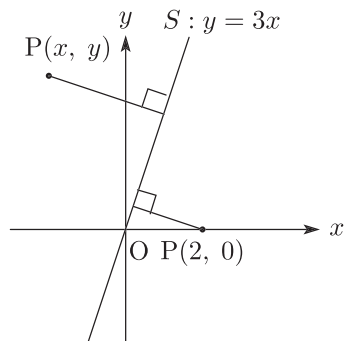
であるから,  $\overline{PS} \leq 1$  となるのは

$$|3x - y| \leq \sqrt{10}$$

$$\iff -\sqrt{10} \leq 3x - y \leq \sqrt{10}$$

$$\iff 3x - \sqrt{10} \leq y \leq 3x + \sqrt{10} \quad (\text{答})$$

で表される領域である.



(2) P(2, 1) のとき

$$\begin{aligned}\overline{PS} &= OP - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} \quad (\text{答})\end{aligned}$$

P(x, y) のとき

$$\begin{aligned}\overline{PS} &= |OP - \sqrt{2}| \\ &= |\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}|\end{aligned}$$

であるから,  $\overline{PS} \leq 1$  となるのは

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}| \leq 1$$

$$\iff -1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2} \leq 1$$

$$\iff \sqrt{2} - 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2} + 1$$

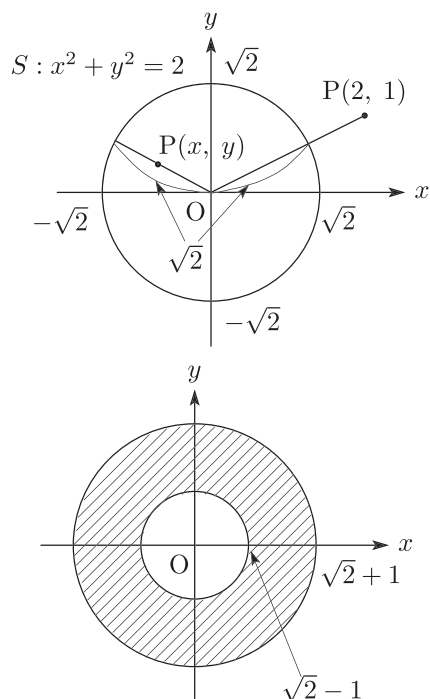
$$\iff (\sqrt{2} - 1)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2} + 1)^2$$

で表される領域であり, その面積は

$$\pi \cdot (\sqrt{2} + 1)^2 - \pi \cdot (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$= 4\sqrt{2}\pi \quad (\text{答})$$

である.



(3)  $P(x, y)$  のとき

$$\overline{PS} = \begin{cases} |y| & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x^2 + y^2} & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから,  $\overline{PS} \leq 1$  となるのは

(i)  $x \geq 0$  のとき

$$|y| \leq 1$$

$$\iff -1 \leq y \leq 1$$

(ii)  $x \leq 0$  のとき

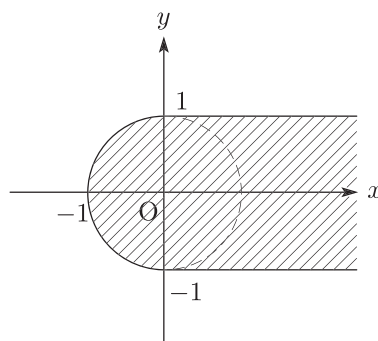
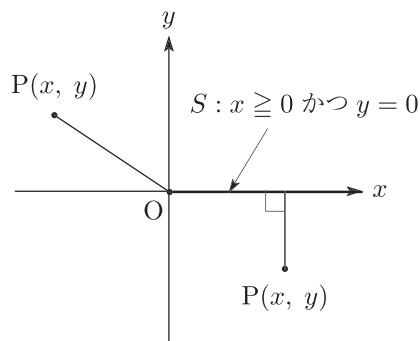
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$\iff x^2 + y^2 \leq 1$$

で表される領域であり, これを図示

すると右図の斜線部 (境界を含む)

である. (答)



【5】 (1)  $C_1$  と  $C_2$  の交点の座標は, 連立方程式  $\begin{cases} 6x^2 + 4y^2 = 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 8x - 8y^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$  の解  $(x, y)$  と

して得られる. ここで,  $\textcircled{2}$ より  $y^2 = x - \frac{1}{8}$  であり, これを $\textcircled{1}$ に代入して

$$6x^2 + 4\left(x - \frac{1}{8}\right) = 3 \quad \therefore (2x - 1)(6x + 7) = 0$$

$$y^2 = x - \frac{1}{8} \geq 0 \text{ すなわち } x \geq \frac{1}{8} \text{ に注意して } x = \frac{1}{2}$$

したがって,  $C_1, C_2$  の交点の座標は  $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$  である.

一方,  $\textcircled{1}$ の両辺を  $x$  で微分して

$$12x + 8y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore 3x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ゆえに,  $C_1$  上の点  $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$  における接線の傾き  $m_1$  は, 複号同順で

$$m_1 = -\frac{\frac{3}{2}}{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}} = \mp\frac{3}{\sqrt{6}}$$

次に,  $\textcircled{2}$ の両辺を  $x$  で微分して

$$8 - 16y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore 1 - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ゆえに,  $C_1$  上の点  $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$  における接線の傾き  $m_2$  は, 複号同順で

$$m_2 = \frac{1}{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}} = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}$$

したがって、複号同順で

$$m_1 m_2 = \left( \mp \frac{3}{\sqrt{6}} \right) \left( \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = -1$$

となるので、交点における  $C_1$  と  $C_2$  の接線は直交する。

(証終)

- (2)  $C_1$  と  $C_2$  のグラフは右図のようになり、題意の領域は右図の斜線部分のようになる。ここで、 $C_1$  の  $x \geq 0$  の部分を表す方程式は

$$x = \sqrt{\frac{3-4y^2}{6}}$$

であるから、求める面積  $S$  は

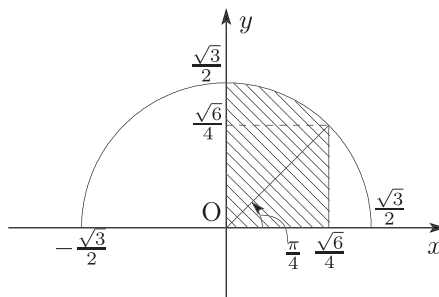
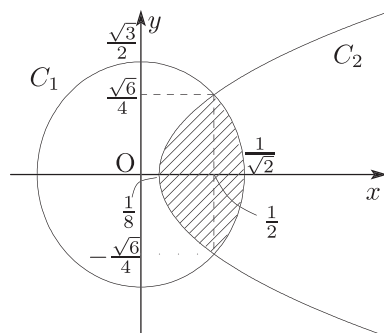
$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left\{ \sqrt{\frac{3-4y^2}{6}} - \left( y^2 + \frac{1}{8} \right) \right\} dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{4} - y^2} dy - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \left( y^2 + \frac{1}{8} \right) dy \end{aligned}$$

ここで、 $\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \sqrt{\frac{3}{4} - y^2} dy$  は右図の斜線部分の面積を表すので

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} \sqrt{\frac{3}{4} - y^2} dy \\ &= \frac{\pi}{8} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{6}}{4} \right)^2 = \frac{3\pi+6}{32} \end{aligned}$$

したがって

$$S = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3\pi+6}{32} - 2 \left[ \frac{y^3}{3} + \frac{y}{8} \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6}\pi}{16} \quad (\text{答})$$



- 【6】  $x = 1 - \cos \theta$ ,  $y = \theta - \sin \theta$  より

$$\frac{dx}{d\theta} = \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos \theta$$

$0 < \theta < \pi$  より  $\sin \theta \neq 0$  なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{答})$$

次に  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$  であり

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\sin \theta \sin \theta - \cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \end{aligned}$$

なので

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin^3 \theta} \quad (\text{答})$$

【7】 (1)  $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ ,  $y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad (\text{答})$$

(2) (1) より,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$  となるのは

$$\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1}{2} \iff \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^{2t} - 2 = e^{2t} + 1$$

$$\iff e^{2t} = 3$$

したがって

$$t = \frac{\log 3}{2} \quad (\text{答})$$

(3)  $t = \frac{\log 3}{2}$  に対応する  $x, y$  は,  $e^t = \sqrt{3}$  より

$$x = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって, 点  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$  における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{答})$$

(4) (1) より,  $\frac{dx}{dt} > 0$ ,  $y > 0$  なので, 求める面積  $S$  は

$$S = \int_0^{\sqrt{2}} y \, dx$$

で与えられる. いま,  $x = \sqrt{2}$  のとき

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sqrt{2} \iff e^{2t} - 2\sqrt{2}e^t - 1 = 0$$

$e^t > 0$  より

$$e^t = \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ すなわち } t = \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

よって,  $\alpha = \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$  とおくと, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} y \, dx = \int_0^{\alpha} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\alpha} (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + 2t \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} + 2\alpha \right) \end{aligned}$$

ここで

$$e^{2\alpha} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad e^{-2\alpha} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

なので

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{5 + 2\sqrt{6}}{2} - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{2} + 2 \log(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

【8】 (1)  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  より

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

であるから

$$0 < x < e \text{ のとき } f'(x) > 0$$

$$x = e \text{ のとき } f'(x) = 0$$

$$x > e \text{ のとき } f'(x) < 0$$

したがって、 $f(x)$  は  $x \geq e$  において単調に減少する.

(証終)

(2)  $n > m \geq 3 > e$  をみたとす  $m, n$  に対して、 $f(n) < f(m)$  が成り立ち

$$\begin{aligned} f(n) < f(m) &\iff \frac{\log n}{n} < \frac{\log m}{m} \\ &\iff m \log n < n \log m \\ &\iff n^m < m^n \end{aligned}$$

と同値変形できる. ゆえに、 $n > m \geq 3$  のとき、 $m^n > n^m$  が成り立つ.

(証終)

(3) 自然数  $n$  について

|       |   |   |   |    |    |     |
|-------|---|---|---|----|----|-----|
| $n$   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | ... |
| $2^n$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | ... |
| $n^2$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | ... |

ここで、 $n \geq 5$  において、 $2^n > n^2$  が成り立つことを数学的帰納法で証明する.

(I)  $n = 5$  のとき、上表より成立する.

(II)  $n = k$  ( $k \geq 5$ ) のときの成立、すなわち

$$2^k > k^2$$

の成立を仮定する. ここで、上式の両辺に 2 をかけて

$$2^{k+1} > 2k^2$$

であるから、 $2k^2$  と  $(k+1)^2$  の大小を比較すると

$$2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k-3)(k+1) + 2 > 0 \quad (\because k \geq 5)$$

ゆえに

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

したがって、 $n \geq 5$  で  $2^n > n^2$  が成立するので、これと表を合わせると、 $2^n \leq n^2$

をみたす  $n$  は

$$\mathbf{n = 2, 3, 4} \quad (\text{答})$$

(4)  $m = n$  のとき、すべての自然数について  $n^m = m^n$  が成り立つ.

$m \neq n$  のときを考える.

(1) より,  $y = f(x)$  のグラフは右図  
 のようになる.  $f(x_1) = f(x_2)$  をみ  
 たす  $x_1, x_2$  (ただし  $x_1 \neq x_2$ ) は曲  
 線  $y = f(x)$  と直線  $y = l$  ( $0 < l <$   
 $f(e)$ ) の共有点の  $x$  座標として与え  
 られ,  $x_1 < x_2$  とすると

$$1 < x_1 < e < x_2$$

よって,  $f(m) = f(n)$ ,  $m < n$  をみたす

$m$  は

$$1 < m < e (< 3) \quad \therefore m = 2$$

であるから, (3) と  $m < n$  であることを考えると

$$(m, n) = (2, 4)$$

$m > n$ ,  $m = n$  の場合も含めると, 求める自然数の組  $(m, n)$  は

$$(m, n) = (2, 4), (4, 2), (k, k) \quad (\text{答})$$

ただし,  $k$  は自然数である.

[9] (1) 曲線  $C_2: y = -\frac{a}{x}$  上の点  $(X, -\frac{a}{X})$  における接線の方程式は  $y' = \frac{a}{x^2}$  より

$$y = \frac{a}{X^2}(x - X) - \frac{a}{X}$$

であり, この直線が  $C_1$  上の点  $P(t, \frac{1}{t})$  を通るので

$$\frac{1}{t} = \frac{a}{X^2}(t - X) - \frac{a}{X}$$

$$\therefore X^2 + 2atX - at^2 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$$

①の判別式を  $D$  とすると,  $\frac{D}{4} = (at)^2 + at^2 > 0$  ( $\because a > 0, t > 0$ ) なので①は異  
 なる 2 解をもつ.

ここで, 点  $P$  から曲線  $C_2$  へ 2 本の接線を引くとき, その接点の  $x$  座標は,  $X$  の 2  
 次方程式①の 2 実解に他ならないので, 接点  $Q, R$  の  $x$  座標をそれぞれ  $q, r$  とす  
 ると, 解と係数の関係より

$$q + r = -2at, qr = -at^2$$

ここで,  $\triangle PQR$  の重心を  $G(x_G, y_G)$  とおくと

$$x_G = \frac{t + q + r}{3} = \frac{t - 2at}{3} = \frac{(1 - 2a)t}{3}$$

であり, 点  $P$  が動くとき, 重心  $G$  が定点であるためには

$$\frac{(1 - 2a)t}{3} = (\text{定数}) \text{ すなわち } 1 - 2a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

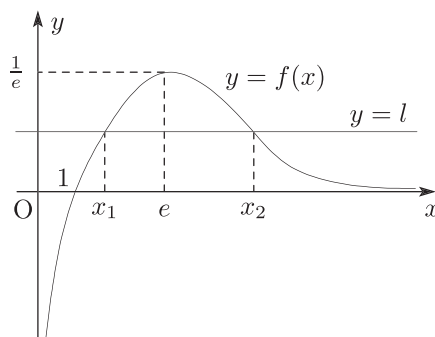
が必要である. このとき

$$y_G = \frac{\frac{1}{t} - \frac{1}{2q} - \frac{1}{2r}}{3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{t} - \frac{q + r}{2qr} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2} \right) = 0$$

であり,  $G = O$  となる.

以上より, 求める  $a$  の値は

$$a = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$





(2) (1) より

$$q + r = -t, \quad qr = -\frac{t^2}{2}$$

であり, このとき,  $\overrightarrow{GQ} = \left(q, -\frac{1}{2q}\right)$ ,  $\overrightarrow{GR} = \left(r, -\frac{1}{2r}\right)$  より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GQ} \cdot \overrightarrow{GR} &= qr + \frac{1}{4qr} \\ &= -\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\end{aligned}$$

$t^2 > 0$  なので, 相加相乗平均の関係より

$$t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2 \quad \left(\text{等号成立は } t^2 = \frac{1}{t^2} \text{ すなわち } t = 1 \text{ のとき}\right)$$

が成り立ち, 関数の連続性および  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) = \infty$  より,  $\overrightarrow{GQ} \cdot \overrightarrow{GR}$  の取る値の範囲は

$$\overrightarrow{GQ} \cdot \overrightarrow{GR} \leq -1 \quad (\text{答})$$

(3)  $\overrightarrow{GQ} = \left(q, -\frac{1}{2q}\right)$ ,  $\overrightarrow{GR} = \left(r, -\frac{1}{2r}\right)$  より

$$|\overrightarrow{GQ}|^2 |\overrightarrow{GR}|^2 = \left(q^2 + \frac{1}{4q^2}\right) \left(r^2 + \frac{1}{4r^2}\right)$$

ここで

$$\begin{aligned}\left(q^2 + \frac{1}{4q^2}\right) \left(r^2 + \frac{1}{4r^2}\right) &= q^2 r^2 + \frac{q^2}{4r^2} + \frac{r^2}{4q^2} + \frac{1}{16q^2 r^2} \\ &= q^2 r^2 + \frac{1}{16q^2 r^2} + \frac{q^4 + r^4}{4q^2 r^2} \\ &= q^2 r^2 + \frac{1}{16q^2 r^2} + \frac{\{(q+r)^2 - 2qr\}^2 - 2q^2 r^2}{4q^2 r^2} \\ &= \frac{t^4}{4} + \frac{1}{4t^4} + \frac{(t^2 + t^2)^2 - \frac{t^4}{2}}{t^4} \\ &= \frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + 3\end{aligned}$$

ゆえに

$$\cos \theta = \frac{-\frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 + 3}}$$

ここで,  $T = t^2 + \frac{1}{t^2}$  とおくと,  $T \geq 2$  であり

$$\cos \theta = \frac{-T}{\sqrt{T^2 + 12}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12}{T^2}}}$$

よって,  $T$  の関数  $\cos \theta$  は単調に減少する関数であるから

$$\cos \theta \leq -\frac{1}{2} \quad (\text{等号は } T = 2 \text{ すなわち } t = 1 \text{ のとき成立})$$

したがって,  $\theta$  の最小値は

$$\frac{2}{3}\pi \quad (\text{答})$$

【10】 (1)  $x(t) = e^{-3t} \cos 4t$ ,  $y(t) = e^{-3t} \sin 4t$  より

$$r(t) = \sqrt{\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2} = e^{-3t}$$

よつて,  $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ ,  $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$  であるから  
 $\theta(t) = 4t$

以上より, 点 P の極座標は

$$(e^{-3t}, 4t) \quad (\text{答})$$

(2) 直線  $y = (\tan \alpha)x$  は  $x$  軸正方向となす角が  $\alpha$  の直線であるから  
 $4t_n = \alpha + (n-1)\pi$

$$\therefore t_n = \frac{\alpha + (n-1)\pi}{4} \quad (\text{答})$$

(3)  $x(t) = e^{-3t} \cos 4t$ ,  $y(t) = e^{-3t} \sin 4t$  より

$$x'(t) = -3e^{-3t} \cos 4t - 4e^{-3t} \sin 4t = e^{-3t}(-3 \cos 4t - 4 \sin 4t)$$

$$y'(t) = -3e^{-3t} \sin 4t + 4e^{-3t} \cos 4t = e^{-3t}(-3 \sin 4t + 4 \cos 4t)$$

であるから

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} \\ &= e^{-3t} \sqrt{(-3 \cos 4t - 4 \sin 4t)^2 + (-3 \sin 4t + 4 \cos 4t)^2} \\ &= e^{-3t} \sqrt{25 \cos^2 4t + 25 \sin^2 4t} \\ &= 5e^{-3t} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(4) (3) より

$$\begin{aligned} L_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} 5e^{-3t} dt \\ &= \left[ -\frac{5}{3} e^{-3t} \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ &= -\frac{5}{3} (e^{-3t_{n+1}} - e^{-3t_n}) \\ &= -\frac{5}{3} \left( e^{-\frac{3\alpha+3n\pi}{4}} - e^{-\frac{3\alpha+3(n-1)\pi}{4}} \right) \\ &= \frac{5}{3} e^{-\frac{3\alpha}{4}} \left( 1 - e^{-\frac{3\pi}{4}} \right) \left( e^{-\frac{3\pi}{4}} \right)^{n-1} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(5)  $0 < e^{-\frac{3\pi}{4}} < 1$  より, 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} L_n$  は収束し, その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{5}{3} e^{-\frac{3\alpha}{4}} \left( 1 - e^{-\frac{3\pi}{4}} \right) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{3\pi}{4}}} = \frac{5}{3} e^{-\frac{3\alpha}{4}} \quad (\text{答})$$





会員番号

氏 名