

1 章 総合演習 (1)

問題

■演習

【1】

《解答》

- (1) 鉛直方向の力のつりあいより,

$$\begin{cases} 0 = N_1 - mg - W \\ 0 = N_2 + W - Mg - N_1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} N_1 = mg + W \\ N_2 = (M + m)g \end{cases}$$

- (2) 運動エネルギーの変化と仕事の関係より,

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu' N_1 \cdot l \quad \therefore \quad l = \frac{mv^2}{2\mu'(mg + W)}$$

- (3) $W = W_1$ とした場合は, A が B 上で滑り始めるそのときに B は床面上で静止を保つ限界に達する. このとき, B について, 水平方向の力のつり合いより,

$$\begin{aligned} 0 &= \mu N_1 - \mu N_2 \\ &= \mu(mg + W_1) - \mu \cdot (M + m)g \quad \therefore \quad W_1 = Mg \end{aligned}$$

- (4) $t = t_1$ における速度を v_1 として, 運動量の変化と力積の関係より,

$$\begin{cases} mv_1 - mv = -\mu' N_1 \cdot t_1 \\ Mv_1 - 0 = (\mu' N_1 - \mu' N_2) \cdot t_1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} t_1 = \frac{Mmv}{\mu' W(M + m)} \\ v_1 = \frac{m(W - Mg)}{W(M + m)}v \end{cases}$$

- (5) A と B の間で作用する静止摩擦力の大きさを F とすると, $t_1 < t < t_2$ における運動方程式は,

$$\begin{cases} ma = -F \\ Ma = F - \mu' N_2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a = -\mu' g \\ F = \mu' mg \end{cases}$$

- (6) (a) $0 < t < t_1$ における A の加速度を a' とすると, 運動方程式は,

$$ma' = -\mu' N_1 \quad \therefore \quad a' = -\mu' \left(g + \frac{W}{m} \right)$$

加速度の大きさに注目すると $|a| < |a'|$ なので, QT が正しい.

- (b) 図 2 のグラフと t 軸の間の面積が床に対して移動する距離を表しているので, 三角形 QST の面積の分だけ運動 I の方が短い.

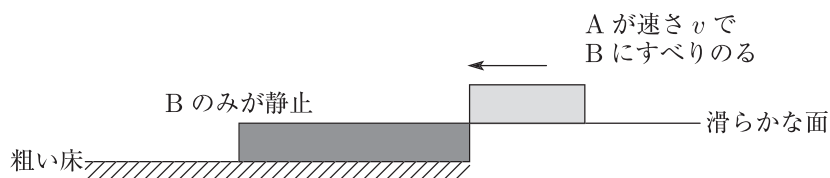
《解説》

(3) で W_1 を求めるに際して、問題文の丁寧な読み取りと慎重な判断が普段以上に必要である。以下で詳しく述べるが、 μ と μ' のとり違いが生じないように注意してほしい。(なお、本問では表立って書かれていないが、 μ と μ' に違いがあるときは $\mu > \mu'$ (あるいは $\mu \geq \mu'$) とみてよい。)

はじめに、運動 I が起きるための条件を確認しておこう。

$$B \text{ が } A \text{ から受ける摩擦力の最大値} < \mu N_2 \quad \cdots (*)$$

本問の状況とは似て非なる設定として、下図のような設定がある。



この図のように、A が B の上にすべりのるのであれば、A と B の間で作用する摩擦力ははじめから動摩擦 $\mu' N_1$ であり、運動 I となるための条件式 (*) は $\mu' N_1 < \mu N_2$ となる。(本問の状況把握としてこれは誤り。)

$$\mu'(mg + W) < \mu \cdot (M + m)g \quad \therefore W < \frac{\mu g(M + m)}{\mu'} - mg$$

ところが、本問でははじめに A と B が「床の上に重ねて置いてある」のだから、A は B とともに静止している ことが問題文から読み取れる。この静止状態から A に (撃力を加えて) 初速度 v を与えることにより、A をすべらせる のである。このとき、A と B の間で作用する摩擦力は A が B に対してすべり始める瞬間に μN_1 であり、A がすべり出すと $\mu' N_1$ にいきなり減少する。このため、運動 I となるための条件式 (*) は $\mu N_1 < \mu N_2$ となる。(本問の状況把握としてはこれが正しい。)

$$\mu(mg + W) < \mu \cdot (M + m)g \quad \therefore W < Mg$$

【2】

《解答》

- (1) 物体 A については下向きを正、物体 B については上向きを正とすると、A と B の加速度はともに a_1 とおける。糸 α の張力を T_1 とすると、A と B の運動方程式は、

$$\begin{cases} 3m \cdot a_1 = 3mg - T_1 & \cdots \textcircled{1} \\ ma_1 = T_1 - mg & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

- (ア) ① + ② より、

$$4ma_1 = 2mg \quad \therefore a_1 = \frac{1}{2}g$$

- (イ) a_1 を②に代入すると、

$$m \cdot \frac{g}{2} = T_1 - mg \quad \therefore T_1 = \frac{3}{2}mg$$

- (ウ) B が L だけ上昇する時間を t_1 とすると、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{2} \cdot t_1^2 = L \quad \therefore t_1 = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- (エ) 糸 β にたるみがなくなる直前における A と B の速さを v_1 とすると、

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 t_1 \\ &= \frac{g}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{L}{g}} \\ &= \sqrt{gL} \end{aligned}$$

- (2) 糸 α と糸 β の張力が撃力となったとき、張力の力積と比べて重力の力積は無視できる。糸 β にたるみがなくなった直後における 3 つの物体の速さを v_2 、糸 α による力積の大きさを I_α 、糸 β による力積の大きさを I_β とし、運動量変化と力積の関係より、

$$\begin{cases} 3m \cdot v_2 - 3m\sqrt{gL} = -I_\alpha & \cdots \textcircled{3} \\ mv_2 - m\sqrt{gL} = +I_\alpha - I_\beta & \cdots \textcircled{4} \\ 4m \cdot v_2 - 0 = +I_\beta & \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

- (オ) ③ + ④ + ⑤ より、

$$8mv_2 - 4m\sqrt{gL} = 0 \quad \therefore v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{gL}$$

- (カ) 糸 β にたるみがなくなる直前における運動エネルギーの和を K_1 とすると、

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= 2m \cdot gL \end{aligned}$$

- 糸 β にたるみがなくなった直後における運動エネルギーの和を K_2 とすると、

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4m \cdot v_2^2 \\ &= 4m \cdot \frac{1}{4}gL \\ &= mgL \quad \therefore \frac{K_2}{K_1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

物体 C が台から離れているとき、物体 A については下向きを正、物体 B と C については上向きを正とすると、3つの物体の加速度はすべて a_2 とおける。糸 α の張力を T_2 、糸 β の張力を S とすると、各物体の運動方程式は、

$$\begin{cases} 3m \cdot a_2 = 3mg - T_2 & \dots \textcircled{6} \\ ma_2 = T_2 - S - mg & \dots \textcircled{7} \\ 4m \cdot a_2 = S - 4mg & \dots \textcircled{8} \end{cases}$$

(キ) $\textcircled{6} + \textcircled{7} + \textcircled{8}$ より、

$$8ma_2 = -2mg \quad \therefore \quad a_2 = -\frac{1}{4}g$$

$\textcircled{6}$ に代入すると、

$$3m \cdot \left(-\frac{g}{4}\right) = 3mg - T_2 \quad \therefore \quad T_2 = \frac{15}{4}mg$$

(ク) a_2 を $\textcircled{8}$ に代入すると、

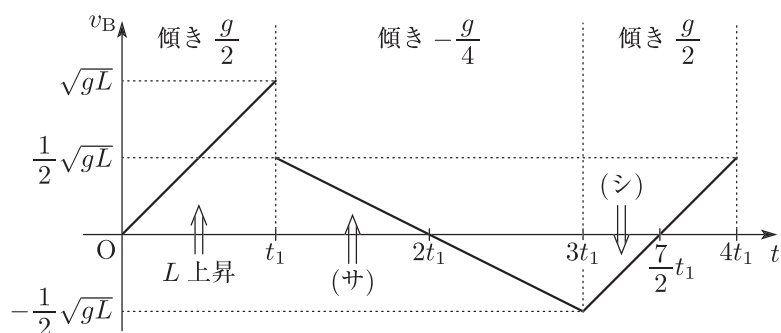
$$4m \cdot \left(-\frac{g}{4}\right) = S - 4mg \quad \therefore \quad S = 3mg$$

(ケ) $|a_2| = \frac{1}{4}g$

(3)(コ) 物体 C が台を離れてから最高点まで上昇する時間を t_2 とすると、

$$0 = -\frac{g}{4} \cdot t_2 + \frac{1}{2}\sqrt{gL} \quad \therefore \quad t_2 = 2\sqrt{\frac{L}{g}} (= t_1)$$

C が最高点に到達した後、C が下降して床に戻ると、糸 β がたるんで A と B の加速度は a_1 に戻る。よって、再び糸 β にたるみがなくなる直前までについて、上向き正とした B の速度 v_B と手をはなしてからの時間 t との関係は下図のようになることが分かる。



(サ) グラフより、

$$\int_{t_1}^{2t_1} v_B dt = \frac{1}{2}L$$

(シ) グラフより、

$$\int_{3t_1}^{\frac{7}{2}t_1} |v_B| dt = \frac{1}{4}L$$

(ス) $\frac{1}{4}$

【3】

《解答》

- (1) 重力と遠心力の合力の向きを考えることにより,

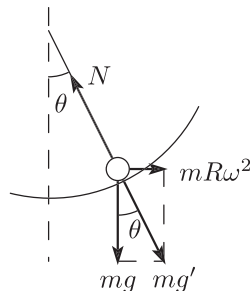
$$\tan \theta = \frac{mR\omega^2}{mg} = \frac{R\omega^2}{g}$$

- (2) みかけの重力加速度の大きさを g' とすると,

$$mg' = \sqrt{(mg)^2 + (mR\omega^2)^2} \quad \therefore \quad g' = \sqrt{g^2 + (R\omega^2)^2}$$

- (3) 周期 T と T_0 の比を考えると,

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{a}{g'}}}{2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g'}} \quad \therefore \quad T = T_0\sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2 + (R\omega^2)^2}}}$$



- (4) (3) で $R\omega^2 \ll g$ のとき,

$$T = T_0 \left\{ 1 + \left(\frac{R\omega^2}{g} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{4}} \approx T_0 \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R\omega^2}{g} \right)^2 \right\}$$

ここで, T が T_0 より 0.25% 短いときでは,

$$1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R\omega^2}{g} \right)^2 = 1 - \frac{0.25}{100} \quad \therefore \quad mR\omega^2 = \frac{1}{10}mg$$

- (5) (a) 回転台から見て外向きに作用するみかけの重力は $mR\omega^2$ であることをふまえて, エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mR\omega^2 \cdot a \quad \therefore \quad v_1 = \omega\sqrt{2aR}$$

- (b) 垂直抗力の大きさを N とすると, 円筒の向心方向の運動方程式は,

$$m\frac{v^2}{a} = N - mR\omega^2 \cos \phi \quad \therefore \quad N = \frac{mv^2}{a} + mR\omega^2 \cos \phi$$

円筒から離れることなく円運動を続ける限界のときは $N_{\min} = 0$ なので,

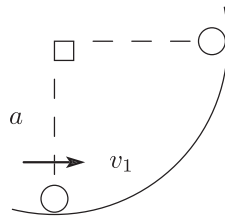
$$\frac{mv_{\min}^2}{a} + mR\omega^2 \cos \pi = 0 \quad \therefore \quad v_{\min} = \omega\sqrt{aR}$$

また, エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 + mR\omega^2 \cdot 2a = \frac{1}{2}mv_2^2$$

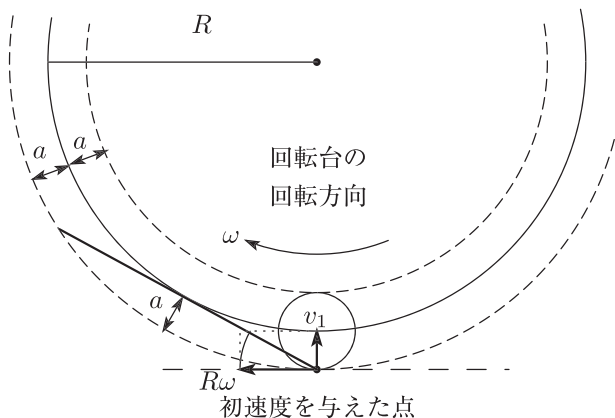
これらより, $v_{\min}$ を消去すると,

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 a R + 2mR\omega^2 a \quad \therefore \quad v_2 = \omega\sqrt{5aR}$$



(6) 回転台の外部から見た初速度は、回転台から見た向心方向の v_1 と、台の回転による接線方向の $R\omega$ を合成した速度であり、その後は力を受けないので一定の速度を保って直進する。

また、回転台から見ると、(5)(a) と同じく円筒中心の高さまで上昇することもふまえると、小物体の運動の軌跡は下図のようになる。



《解説》

回転台から見ると、本来は慣性力として「遠心力」の他に「コリオリ力」も作用する。ここでコリオリ力は、向きが回転台から見た速度と垂直で、大きさは回転台から見た速さに比例している。(コリオリ力の特徴を知っておくことは入試上は必要ない。)

本問では、 a が微小とされているので (5)(a) の v_1 も微小となる。このため (6) でも回転台から見た速さは微小で、回転台から見たときの慣性力としては遠心力のみを考えればよい。(6) の解答は、これを前提として取り扱っていることに注意すること。

【4】

《解答》

$$(1) \begin{cases} 0 = N_B - F_A \\ 0 = N_A - Mg \end{cases}$$

$$(2) 0 = \frac{L}{2} \sin \theta \cdot Mg - L \cos \theta \cdot N_B$$

(3) (1), (2) より,

$$N_A = Mg, \quad F_A = \frac{1}{2} Mg \tan \theta$$

A において棒が滑らずにいる限界では $F_A = \mu N_A$ なので,

$$\frac{1}{2} Mg \tan \theta_m = \mu Mg \quad \therefore \tan \theta_m = 2\mu$$

- (4) 荷台から見ると、棒の重心に左向きで大きさ Ma_1 の慣性力も働くので、力のつりあいと点 A のまわりの力のモーメントのつりあいの式は、

$$\begin{cases} 0 = N_B - F_A - Ma_1 \\ 0 = N_A - Mg \\ 0 = \frac{L}{2} \sin \theta \cdot Mg + \frac{L}{2} \cos \theta \cdot Ma_1 - L \cos \theta \cdot N_B \end{cases}$$

これらより、

$$\begin{cases} N_A = Mg \\ N_B = \frac{M}{2}(g \tan \theta + a_1) \\ F_A = \frac{M}{2}(g \tan \theta - a_1) \end{cases}$$

ここで、 F_A は大きさとして設定されていることに注意して、改めて大きさを F_A で表すと、

$$F_A = \frac{M}{2} |g \tan \theta - a_1|$$

- (5) A において、棒が滑らないための条件 $F_A \leq \mu N_A$ より、

$$\frac{M}{2} |g \tan \theta - a_1| \leq \mu \cdot Mg \quad \therefore |g \tan \theta - a_1| \leq 2\mu g$$

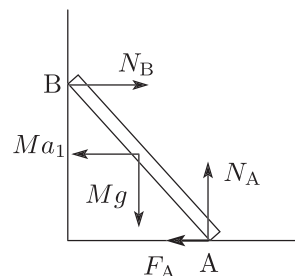
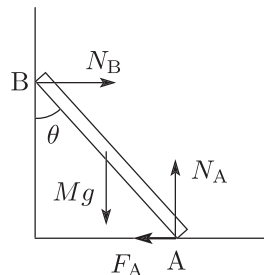
絶対値記号を外して整理すると、

$$\begin{cases} -2\mu g \leq g \tan \theta - a_1 \\ g \tan \theta - a_1 \leq 2\mu g \end{cases} \quad \therefore g(\tan \theta - 2\mu) \leq a_1 \leq g(\tan \theta + 2\mu) \quad \cdots (*)$$

ここで $\theta \leq \theta_m$ のとき $\tan \theta \leq 2\mu$ であることをふまえると、(*) の下限値は $a_1 > 0$ を満たさないため無意味となる。

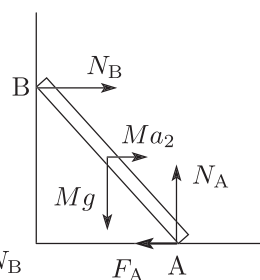
以上より、 a_1 と $\tan \theta$ の関係は、

$$0 < a_1 \leq g(\tan \theta + 2\mu)$$



- (6) 荷台から見ると、棒の重心に右向きで大きさ Ma_2 の慣性力も働くので、力のつりあいと点 A のまわりの力のモーメントのつりあいの式は、

$$\begin{cases} 0 = N_B - F_A + Ma_2 \\ 0 = N_A - Mg \\ 0 = \frac{L}{2} \sin \theta \cdot Mg - \frac{L}{2} \cos \theta \cdot Ma_2 - L \cos \theta \cdot N_B \end{cases}$$



これらより、

$$\begin{cases} N_A = Mg \\ N_B = \frac{M}{2}(g \tan \theta - a_2) \\ F_A = \frac{M}{2}(g \tan \theta + a_2) \end{cases}$$

- (7) B において、棒が離れないための条件 $N_B \geq 0$ より、

$$\frac{M}{2}(g \tan \theta - a_2) \geq 0 \quad \therefore \quad a_2 \leq g \tan \theta$$

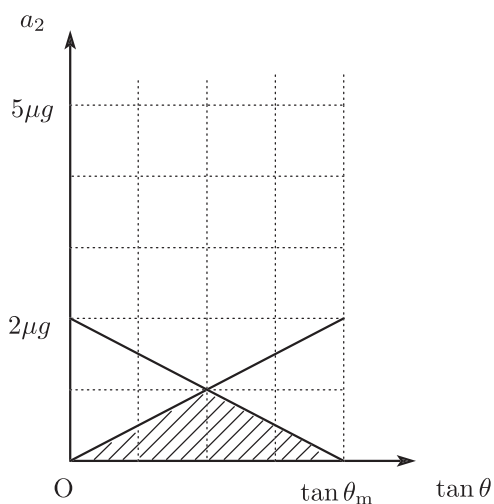
A において、棒が滑らないための条件 $F_A \leq \mu N_A$ より、

$$\frac{M}{2}(g \tan \theta + a_2) \leq \mu Mg \quad \therefore \quad a_2 \leq g(2\mu - \tan \theta)$$

ここで $a_2 > 0$ も考慮すると、

$$\begin{cases} 0 < a_2 \leq g \tan \theta \\ 0 < a_2 \leq g(2\mu - \tan \theta) \end{cases}$$

- (8)



【5】

《解答》

(1) $x = x_0$ の直前における力のつりあいより,

$$0 = k(d - x_0) - \mu_1 \cdot mg \quad \therefore \quad x_0 = d - \frac{\mu_1 mg}{k}$$

(2) $ma = k(d - x) - \mu_2 \cdot mg$

(3) 位置 x において物体に作用する力が (2) の合力と等しいので,

$$k(L - x) = k(d - x) - \mu_2 mg \quad \therefore \quad L = d - \frac{\mu_2 mg}{k}$$

(4) 運動は $x = L$ を中心とする単振動なので, 左端が $x = x_0$ 場合の振幅は $L - x_0$ と分かり,

$$x_M - L = L - x_0 \quad \therefore \quad x_M = 2L - x_0$$

(5) 摩擦のない水平面上の運動に置きかえたので, 力学的エネルギーは変化しない. $x > L$ で速度が $-w$ となったときに, 物体がベルトに対して静止することをふまえると,

$$\frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}k(x - L)^2 = 0 + \frac{1}{2}k(L - x_0)^2 \quad \therefore \quad x = L + \sqrt{(L - x_0)^2 - \frac{mw^2}{k}}$$

(6) $w \leq w_c$ の場合は (5) を満たす実数解 x が存在するが, $w > w_c$ の場合には存在しなくなるので,

$$(L - x_0)^2 - \frac{mw_c^2}{k} = 0$$

これと (1), (3) より,

$$\left\{ \left(d - \frac{\mu_2 mg}{k} \right) - \left(d - \frac{\mu_1 mg}{k} \right) \right\}^2 - \frac{mw_c^2}{k} = 0 \quad \therefore \quad w_c = (\mu_1 - \mu_2)g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

【6】

《解答》

- (1) (a) 運動方程式の x 成分より,

$$0 = -k(\ell_1 - \ell_0) + mg \sin \theta_1 \quad \therefore \quad \ell_1 = \ell_0 + \frac{mg \sin \theta_1}{k}$$

- (b) 同じく,

$$ma = -k(x - \ell_0) + mg \sin \theta_1 = -k(x - \ell_1) \\ \therefore \quad L_1 = \ell_1 + (\ell_1 - \ell_0) = 2\ell_1 - \ell_0$$

- (2) (a) 静止摩擦の最大値が作用するので, 垂直抗力 N , 静止摩擦 R (それぞれ大きさ) について,

$$\frac{R}{N} = \frac{mg \sin \theta_2}{mg \cos \theta_2} = \tan \theta_2 = \mu \quad \therefore \quad \mu = \tan \theta_2$$

- (b) エネルギー収支より, $x = \ell_0$ を位置エネルギーの基準にとって,

$$\left\{ 0 - mg(\ell_2 - \ell_0) \sin \theta_1 + \frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2 \right\} - (0 + 0 + 0) = -\mu' mg \cos \theta_1 (\ell_2 - \ell_0) \\ \therefore \quad \ell_2 = \ell_0 + \frac{2mg}{k}(\sin \theta_1 - \mu' \cos \theta_1)$$

- (c) 静止摩擦の x 成分を f' として,

$$0 = f' - k(\ell_2 - \ell_0) + mg \sin \theta_1 \quad \therefore \quad f' = k(\ell_2 - \ell_0) - mg \sin \theta_1$$

$\ell_2 < \ell_1$ および (1)(a) より $f' < 0$. さらに f' が静止摩擦ゆえ,

$$\frac{|f'|}{N} \leq \mu$$

整理して,

$$\tan \theta_1 \geq 2\mu' - \mu$$

- (3) (a) 物体 1 の振動中心は $x = \ell_1 - \ell_0$. 静止からスタートゆえ振幅は $\ell_1 - \ell_0$. よって縮みの最大値は $2(\ell_1 - \ell_0)$. このとき物体 2 が静止ゆえ,

$$\frac{k \cdot 2(\ell_1 - \ell_0) + mg \sin \theta_1}{mg \cos \theta_1} \leq \mu$$

整理して,

$$\mu \geq 3 \tan \theta_1 = \mu_c$$

- (b) エネルギー収支より,

$$\left\{ 0 + 0 - mgx_1 \sin \theta_1 - mg(x_2 - \ell_0) \sin \theta_1 + \frac{1}{2}k(L_2 - \ell_0)^2 \right\} - (0 + 0 + 0 + 0 + 0) \\ = -\mu' mg \cos \theta_1 (x_2 - \ell_0)$$

$L_2 = x_2 - x_1$ および $\mu' = 2 \tan \theta_1$ を代入, 整理して,

$$\frac{1}{2}k(L_2 - \ell_0)^2 = mg(\ell_0 - L_2) \sin \theta_1$$

この解のうち大きい方を選んで,

$$L_2 = \ell_0$$

(c) 前問の結果より, $t = t_2$ で重心は移動するが, 相対運動に関しては初期状態に戻り以後同じ運動を繰り返すので, (ア)

《参考》

(2)(c) について. 一般に, $\mu \geq \mu'$ という関係があるので,

$$\mu \geq 2\mu' - \mu$$

という不等式が成り立つ. また, $\theta_1 > \theta_2$ から

$$\tan \theta_1 > \tan \theta_2 = \mu$$

となるので,

$$\tan \theta_1 > 2\mu' - \mu$$

という不等式は無条件で成り立つ. つまり, $\ell_2 < \ell_1$ の場合, 小物体 2 は必ず静止し続ける.

■自習

【1】

《解答》

- I (1) $x = 0$ におけるバネの伸びを s として、力のつりあいより、

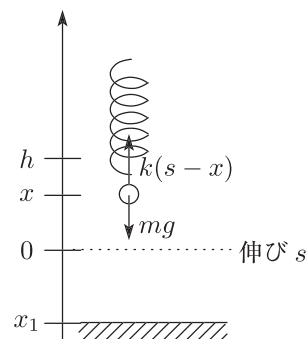
$$0 = ks - mg \quad \therefore \quad s = \frac{mg}{k}$$

位置 x における運動方程式は、

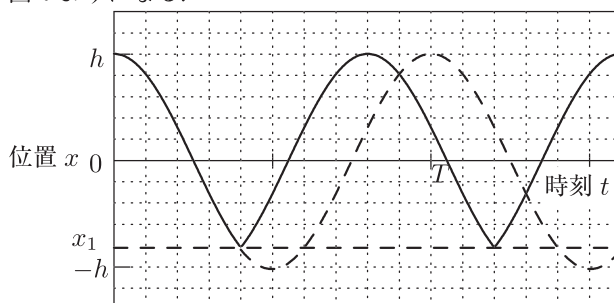
$$m\ddot{x} = k(s - x) - mg \quad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

運動は単振動で、角振動数 ω は、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



- II (2) 小球が床と弾性衝突すると、衝突前と同じ速さで上向きにはね返るので、位置 x と時刻 t の関係は下図のようになる。



- (3) (a) $\Delta t = 2t_1$
(b) 角速度 ω が一定なので、

$$\omega = \frac{\theta_1}{t_1} = \frac{2\pi}{T} \quad \therefore \quad \theta_1 = 2\pi \frac{t_1}{T}$$

$$(c) \theta_1 = \frac{\pi \Delta t}{T}$$

$$(d) \cos \theta_1 = \frac{x_1}{h}$$

- III (4) (e) 位置 x で作用する合力による位置エネルギーは $\frac{1}{2}kx^2$ と表せる。これをふまえて、エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kh^2 \quad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{k(h^2 - x_1^2)}{m}}$$

- (f) エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}kh_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m(ev_0)^2 \quad \therefore \quad h_1 = \sqrt{x_1^2 + \frac{e^2mv_0^2}{k}}$$

- (g) 振幅が h から h_1 に小さくなると、参考円における回転角は $2\theta_1 < 2\theta_2$ となり、衝突によって大きくなる。(c) をふまえると、これは衝突の間隔が長くなることを表している。

- (5) 衝突するたびに速さが e 倍になるので、

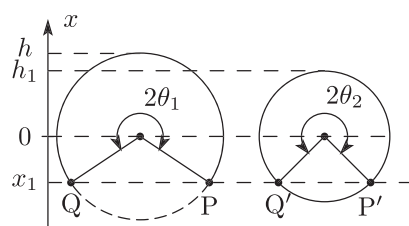
$$v_n = ev_{n-1} = e^2 v_{n-2} = \cdots = e^n v_0$$

これをふまえて、エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}kh_n^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m(e^n v_0)^2 \quad \therefore \quad h_n = \sqrt{x_1^2 + \frac{e^{2n}mv_0^2}{k}}$$

- (6) (5) で n が十分大きくなると h_n は $-x_1$ に収束するので、小球の運動は振幅が $-x_1$ の単振動となる。なお、振幅の中心は $x = 0$ 、周期は T のままである。
- (7) 振幅が h から $-x_1$ に減少したので、

$$(\text{失った力学的エネルギー}) = \frac{1}{2}k(h^2 - x_1^2)$$



【2】

《解答》

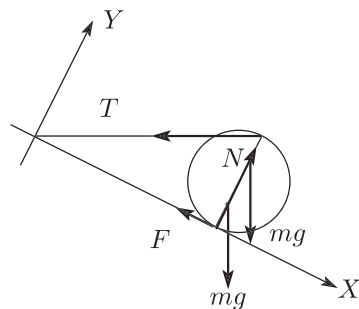
- (1) (a) 垂直抗力を N ，張力を T とすると，力のモーメントのつりあいの式は，

$$0 = 2R \cdot T \cos 30^\circ - \frac{3}{2} R \cdot mg \sin 30^\circ - \frac{R}{2} \cdot mg \sin 30^\circ$$

$$\therefore T = \frac{1}{\sqrt{3}} \times mg$$

- (b) 静止摩擦力を F とすると，力のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = 2mg \sin 30^\circ - T \cos 30^\circ - F \\ 0 = N - 2mg \cos 30^\circ - T \sin 30^\circ \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} F = \frac{1}{2} mg \\ N = \frac{7}{2\sqrt{3}} mg \end{cases}$$



静止摩擦係数を μ とおくと，車輪が滑り出さないための条件は $F \leq \mu N$ なので，

$$\frac{1}{2} mg \leq \mu \cdot \frac{7}{2\sqrt{3}} mg \quad \therefore \mu \geq \frac{\sqrt{3}}{7}$$

- (2) (c) 車輪が滑らないとき，車輪の中心からみた外周の回転する速さは V と等しい．また，車輪全体で角速度は共通なので，

$$\frac{v}{R/2} = \frac{V}{R} \quad \therefore v = \frac{1}{2} \times V$$

- (d) A と B の運動エネルギーの合計が車輪の運動エネルギーなので，

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m \{ (V_x + v_x)^2 + (V_y + v_y)^2 \} + \frac{1}{2} m \{ (V_x - v_x)^2 + (V_y - v_y)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot (V_x^2 + V_y^2 + v_x^2 + v_y^2) \\ &= m(V^2 + v^2) \end{aligned}$$

- (c) をふまえると，

$$K = m \left\{ V^2 + \left(\frac{V}{2} \right)^2 \right\} = \frac{5}{4} \times mV^2$$

- (e) エネルギーの保存より，

$$\frac{5}{4} mV^2 = 2mgh \quad \therefore V = \sqrt{\frac{8}{5}} \times \sqrt{gh}$$

- (3) (f) おもりに A と B が 3 組あるので，

$$3K = 3 \cdot \frac{5}{4} mV^2 = \frac{15}{4} \times mV^2$$

- (g) エネルギーの保存より，

$$\frac{15}{4} mV^2 = 6mgh \quad \therefore V = \sqrt{\frac{8}{5}} \times \sqrt{gh}$$

【3】

《解答》

(1) (ア) $\frac{\mu_0 N I}{l} \cdot S$

(イ) 磁束変化を $\Delta\Phi$ とすると,

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 N S}{l} \Delta I$$

(ウ) 電流 I を流す向きを正とする誘導起電力 V_L は,

$$V_L = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \cdot N = -\frac{\mu_0 N^2 S}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

(エ) 自己インダクタンスを L とすると,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$$

(2) (オ) 電流が I_0 で一定の定常状態における回路の方程式は,

$$V + (-L \cdot 0) = R I_0 \quad \therefore I_0 = \frac{V}{R}$$

(カ) $\Phi = \frac{\mu_0 N I_0}{l + \Delta l} \cdot S$

(キ) 与えられた近似式を用いて (カ) を書き換えると, $\Phi \doteq \mu_0 N I_0 S \left(\frac{1}{l} - \frac{\Delta l}{l^2} \right)$ となるので,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &\doteq \mu_0 N I_0 S \left(\frac{1}{l} - \frac{\Delta l}{l^2} \right) - \frac{\mu_0 N I_0}{l} \cdot S \\ &= -\frac{\mu_0 N S I_0}{l^2} \Delta l \end{aligned}$$

(ク) 電流 I を流す向きを正とする誘導起電力 V_L は,

$$V_L = -\frac{\Delta\Phi}{T} \cdot N = \frac{\mu_0 N^2 S I_0}{l^2 T} \Delta l$$

(ケ) 電流が $I_0 + \Delta I$ で一定の定常状態における回路の方程式は,

$$V + \frac{\mu_0 N^2 S I_0}{l^2 T} \Delta l = R \left(\frac{V}{R} + \Delta I \right) \quad \therefore \Delta I = \frac{\mu_0 N^2 S I_0}{l^2 T R} \Delta l$$

(コ) 定常電流 $I_0 + \Delta I$ が時間 T にわたって流れたとみなすことにより,

$$P \doteq V(I_0 + \Delta I) \cdot T$$

(サ) $W = F \Delta l$

(シ) 電流が I_0 の定常状態なので,

$$U_1 = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2l}$$

$$(ス) U_2 = \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2(l + \Delta l)}$$

(セ) 与えられた近似式を用いて (ス) を書き換えると, $U_2 \doteq \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{\Delta l}{l^2} \right)$ となるので,

$$\begin{aligned} \Delta U &\doteq \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{\Delta l}{l^2} \right) - \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2l} \\ &= -\frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2l^2} \Delta l \end{aligned}$$

(ソ) 電池と外力 F の仕事はコイルのエネルギー変化とジュール熱になるので,

$$P + W = \Delta U + J$$

(タ) まず, (オ), (ケ), (コ) より,

$$P = RI_0 \left(I_0 + \frac{\mu_0 N^2 S I_0}{l^2 T R} \Delta l \right) \cdot T = RI_0^2 T \left(1 + \frac{\mu_0 N^2 S}{l^2 T R} \Delta l \right)$$

次に, J の近似式と (ケ) より,

$$J = \left(RI_0^2 + 2RI_0 \cdot \frac{\mu_0 N^2 S I_0}{l^2 T R} \Delta l \right) \cdot T = RI_0^2 T \left(1 + \frac{2\mu_0 N^2 S}{l^2 T R} \Delta l \right)$$

これらと (サ), (セ) を (ソ) に代入すると,

$$\begin{aligned} RI_0^2 T \left(1 + \frac{\mu_0 N^2 S}{l^2 T R} \Delta l \right) + F \Delta l &= -\frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2l^2} \Delta l + RI_0^2 T \left(1 + \frac{2\mu_0 N^2 S}{l^2 T R} \Delta l \right) \\ \therefore F &= \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{2l^2} \end{aligned}$$

(チ) $F > 0$ なので, コイルの伸びる方向に外力を加えた.

《解説》

本問の (1), (2) では, ΔI の表している内容が大きく異なっている. 以下では, (2) について詳しく考えてみることにしよう.

コイルの長さ $l(t)$ の初期値 l を改めて l_0 とおき, 自己インダクタンス $L(t)$ の初期値 L を改めて L_0 とおくことにする. $I(t)$ を流す向きを正とする誘導起電力 V_L は,

$$\begin{aligned} V_L &= -\frac{d\Phi}{dt} \times N \\ &= -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu_0 N S}{l(t)} \cdot I(t) \right\} \times N \\ &= +\frac{\mu_0 N^2 S}{l(t)^2} \cdot \frac{dl}{dt} \times I(t) - \frac{\mu_0 N^2 S}{l(t)} \cdot \frac{dI}{dt} \\ &\doteq \frac{\mu_0 N^2 S}{l_0^2} \cdot \frac{dl}{dt} \cdot I(t) - \frac{\mu_0 N^2 S}{l_0} \cdot \frac{dI}{dt} \\ &= \frac{L_0}{l_0} \cdot \frac{dl}{dt} \cdot I(t) - L_0 \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

$$V + \left(\frac{L_0}{l_0} \cdot \frac{dl}{dt} \cdot I - L_0 \frac{dI}{dt} \right) = RI \quad \dots (*)'$$
$$V - L_0 \frac{dI}{dt} = RI \quad \therefore \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L_0} I + \frac{V}{L_0}$$
$$0 = -\frac{R}{L_0} I_0 + \frac{V}{L_0} \quad \therefore \quad I_0 = \frac{V}{R}$$
$$V + \frac{L_0}{l_0} \cdot \frac{\Delta l}{T} \cdot I - L_0 \frac{dI}{dt} = RI \quad \therefore \quad \frac{dI}{dt} = - \left(\frac{R}{L_0} - \frac{\Delta l}{l_0 T} \right) I + \frac{V}{L_0}$$
$$0 = -\left(\frac{R}{L_0} - \frac{\Delta l}{l_0 T}\right)(I_0 + \Delta I) + \frac{V}{L_0} \quad \therefore \quad I_0 + \Delta I = \frac{V}{R} \left(1 - \frac{L_0 \Delta l}{R l_0 T}\right)^{-1}$$
$$\qquad \qquad \qquad \equiv I_0 \left(1 + \frac{L_0 \Delta l}{R l_0 T}\right)$$
$$V + \frac{L_0}{l_0} \cdot \frac{\Delta l}{T} \cdot I_0 - L_0 \times 0 = R(I_0 + \Delta I) \quad \therefore \quad I_0 + \Delta I = \frac{V}{R} + \frac{L_0 \Delta l}{R l_0 T} I_0$$

$$= I_0 \left(1 + \frac{L_0 \Delta l}{R l_0 T} \right)$$


本問における電流変化の概略は前ページの図のようになるが、「電流が I_0 と $I_0 + \Delta I$ の間を移り変わる時間と比べて T は十分に大きい」とみなしておかないと、電池のした仕事 P とジュール熱 J の表式を正当化できない。(コイルを「ゆっくりと引き伸ばした」ことから T が十分に大きいことを読み取る。)

また、(カ)～(セ)では I_0 を用いて答えるのか否かについて述べられていないが、(2)の後半で問題文が I_0 を用いて書かれていることを考慮し、答に I_0 を用いてある。 I_0 を消去しておきたいのであれば、それぞれの答に(オ)を代入すればよい。

【4】

《解答》

I (1) 合計の極板間隔が $2d - x$ なので,

$$(C_1, C_2 \text{の合成容量}) = \frac{\varepsilon_0 S}{2d - x}$$

(2) 極板 A を $x = 0$ に固定して電池に接続したので, コンデンサー C_1, C_2 の電荷はともに $Q = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} V$ と表せる. これをふまえて, 各コンデンサーの極板間の電位差をそれぞれ V_1, V_2 とすると, 各コンデンサーの電荷の保存より,

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_0 S}{d - x} V_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} V \\ \frac{\varepsilon_0 S}{d} V_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} V \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} V_1 = \frac{d - x}{2d} V \\ V_2 = \frac{1}{2} V \end{cases}$$

(3) 全体の静電エネルギー U は,

$$U = \frac{1}{2} Q V_1 + \frac{1}{2} Q V_2 = \frac{\varepsilon_0 S V^2 (2d - x)}{8d^2}$$

(4) 極板 A の質量を m , 速度を v として, エネルギーの保存より,

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{\varepsilon_0 S V^2 (2d - x)}{8d^2} = \frac{\varepsilon_0 S V^2 \cdot 2d}{8d^2}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{8d^2} x - \frac{1}{2} k x^2$$

(5) x が最大値 x_1 のとき, I(4) で $v = 0$ となるので,

$$0 = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{8d^2} x_1 - \frac{1}{2} k x_1^2 \quad \therefore \quad x_1 = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{4kd^2}$$

II (1) $Q(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{2d - x} V$

(2) 回路の方程式と電荷の保存より,

$$\begin{cases} V = V_1(x) + V_2(x) \\ -\frac{\varepsilon_0 S}{d - x} V_1(x) + \frac{\varepsilon_0 S}{d} V_2(x) = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} V_1(x) = \frac{d - x}{2d - x} V \\ V_2(x) = \frac{d}{2d - x} V \end{cases}$$

(3) 全体の静電エネルギーは,

$$U = \frac{1}{2} Q(x) V_1(x) + \frac{1}{2} Q(x) V_2(x) = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2(2d - x)}$$

「運動エネルギー + 弾性エネルギー + 静電エネルギー」の変化分が電池のする仕事と一致するので,

$$\left\{ \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 + \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2(2d - x)} \right\} - \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2 \cdot 2d} = \{Q(x) - Q(0)\} V$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{\varepsilon_0 SV^2}{4d} - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2(2d-x)} + V \left(\frac{\varepsilon_0 SV}{2d-x} - \frac{\varepsilon_0 SV}{2d} \right) \\
&= \frac{\varepsilon_0 SV^2 x}{4d(2d-x)} - \frac{1}{2}kx^2
\end{aligned}$$

(4) x が最大値 x_2 のとき, II(3) で $v = 0$ となるので,

$$0 = \frac{\varepsilon_0 SV^2 x_2}{4d(2d-x_2)} - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \therefore \quad x_2 \left(x_2^2 - 2dx_2 + \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2kd} \right) = 0$$

$0 < x_2 < d$ を満たす解は,

$$x_2 = d - \sqrt{d^2 - \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2kd}}$$

【5】

《解答》

金属板の面積を S ，ばねのばね定数を k ，金属板間の誘電率を ε とする．コンデンサーの電荷が Q で極板間の電場が E のとき，

$$(\text{極板間引力}) = \frac{1}{2}QE \quad \cdots (*)$$

と表せるので，金属板 B の高さを l にして電圧 V_0 をかけたときに作用する極板間引力 f_0 は，

$$f_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon S}{l} V_0 \cdot \frac{V_0}{l} = \frac{\varepsilon S V_0^2}{2l^2}$$

これをふまえると，力のつりあいの式は，

$$0 = \frac{5}{2}Mg - Mg - \frac{\varepsilon S V_0^2}{2l^2} \quad \therefore \quad \varepsilon S = \frac{3Mgl^2}{V_0^2}$$

また，電圧をかけないで金属板 B をばねで支えたときの力のつりあいより，

$$0 = k \cdot \frac{l}{4} - Mg \quad \therefore \quad k = \frac{4Mg}{l}$$

以下では，必要に応じてこれらを代入するものとする．

I (1) 金属板 A, B 間の距離を $\frac{3}{4}l$ にして電圧 V_0 をかけたので，静電エネルギー U_e は，

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon S}{\frac{3}{4}l} \cdot V_0^2 = 2 \times Mgl$$

(2) 極板間引力を f として，(*) をふまえると，

$$f = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon S}{\frac{3}{4}l} V_0 \cdot \frac{V_0}{\frac{3}{4}l} = \frac{8}{3} \times Mg$$

II (3) 金属板 A, B 間の距離を l' とおくと，力のつりあいの式は，

$$0 = k(l - l') - Mg - f \quad \therefore \quad l' = \frac{1}{12} \times l$$

(4) 金属板 B を下げた後の電圧を V' として，電荷の保存より，

$$\frac{\varepsilon S}{l'} V' = \frac{\varepsilon S}{\frac{3}{4}l} V_0 \quad \therefore \quad V' = \frac{1}{9} V_0$$

このときの静電エネルギー U_e' は，

$$U_e' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon S}{l'} \cdot V'^2 = \frac{2}{9} \times Mgl$$

- (5) バネの縮みが $\frac{1}{4}l$ から $\frac{11}{12}l$ になったので、弾性エネルギー U_s の増加は、

$$\Delta U_s = \frac{1}{2}k\left(\frac{11}{12}l\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{14}{9} \times Mgl$$

- (6) 金属板 A に対する金属板 B の高さが $\frac{3}{4}l$ から l' になったので、重力による位置エネルギー U_g の変化は、

$$\Delta U_g = Mgl' - Mg \cdot \frac{3}{4}l = -\frac{2}{3}Mgl \quad \therefore (U_g \text{の減少}) = \frac{2}{3} \times Mgl$$

- (7) (1), (4) より、静電エネルギーの変化は、

$$\Delta U_e = \frac{2}{9}Mgl - 2Mgl = -\frac{16}{9}Mgl$$

金属板 A と B およびばねから成る系のエネルギーと、この系が外部にした仕事 W の関係より、

$$\Delta U_e + \Delta U_s + \Delta U_g = -W \quad \therefore W = \frac{8}{9} \times Mgl$$

添削課題

《解答》

I 運動量の x 成分の保存及びエネルギーの保存より,

$$\begin{cases} mu_1 + MV_1 = 0 \\ \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 = mgh \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} u_1 = -\sqrt{\frac{M}{M+m}} \cdot 2gh \\ V_1 = \sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}} \cdot 2gh \end{cases}$$

また, 小球が C 点から D 点に達するまでの台からみた相対速度は $u_1 - V_1$ なので,

$$(u_1 - V_1)t_1 = -l \quad \therefore \quad t_1 = \frac{l}{V_1 - u_1} = l\sqrt{\frac{1}{2gh} \cdot \frac{M}{M+m}}$$

II 衝突の式より, 台からみた相対速度は $-e(u_1 - V_1)$ となるので,

$$-e(u_1 - V_1)t_2 = l \quad \therefore \quad t_2 = \frac{l}{e(V_1 - u_1)} = \frac{1}{e} \times t_1$$

III 衝突の前も後も運動量の x 成分は 0 である. 衝突後について, 小球の速度を u_2 , 台の速度を V_2 とすると,

$$\begin{cases} mu_2 + MV_2 = 0 \\ mu_2 + MV_2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} u_2 = -\frac{M}{m}V_2 \\ u_2 = -\frac{M}{m}V_2 \end{cases} \quad \dots (*)$$

また, 衝突の式は,

$$e = -\frac{u_2 - V_2}{u_1 - V_1} \quad \therefore \quad V_2 - u_2 = e(u_1 - V_1)$$

(*) を代入すると,

$$V_2 + \frac{M}{m}V_2 = e\left(-\frac{M}{m}V_1 - V_1\right) \quad \therefore \quad V_2 = -eV_1$$

これと II をふまえると, 小球が最初に C 点に達してから小球が C 点に戻るまでの間の台の変位は,

$$\begin{aligned} V_1t_1 + V_2t_2 &= V_1t_1 + (-eV_1) \cdot \frac{t_1}{e} \\ &= 0 \end{aligned}$$

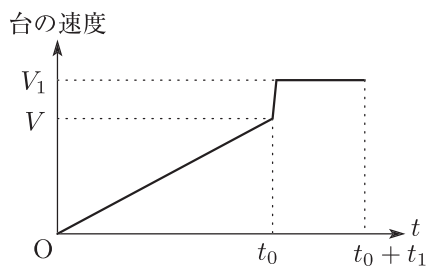
IV (1) B 点での小球の速度の x 成分を u_x とすると, 運動量の x 成分の保存及びエネルギーの保存より,

$$\begin{cases} mu_x + MV = 0 \\ \frac{1}{2}m(u_x^2 + u_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 = mgh \end{cases}$$

これらより, u_x を消去すると,

$$V = \sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)} \cdot (2gh - u_y^2)}$$

- (2) 小球が B 点を通過するまでは、台の加速度が一定で、その後、小球が B 点から C 点に達する極めて短い間に、台の速度は V から急激に増加して V_1 になるので、グラフは下図のようになる。



配点

100 点

I 各 10 点 $\times 3$

II 20 点

III 20 点

IV(1) 10 点

(2) 20 点

2章 総合演習 (2)

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) ピストンが受ける力積は、分子の運動量の減少と一致するので、

$$m_A v_{Az} - m_A (-v_{Az}) = 2m_A v_{Az}$$

$$(2) \frac{t}{2d/v_{Az}} = \frac{v_{Az}t}{2d}$$

(3) (1), (2) をふまえると、時間 t の間に 1 個の分子から受ける力積は、

$$2m_A v_{Az} \cdot \frac{v_{Az}t}{2d} = \frac{m_A v_{Az}^2}{d} t \quad \therefore \quad (\text{平均の力積}) = \frac{m_A \langle v_{Az}^2 \rangle}{d} t$$

N_A 個の分子から受ける力積は、

$$Ft = \frac{m_A \langle v_{Az}^2 \rangle}{d} t \cdot N_A \quad \therefore \quad F = \frac{N_A m_A}{d} \times \langle v_{Az}^2 \rangle$$

(4) $\langle v_{Az}^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v_A^2 \rangle$ をふまえると、

$$P_A = \frac{F}{S} = \frac{N_A m_A}{3Sd} \times \langle v_A^2 \rangle$$

$$(5) P_B = \frac{N_B m_B}{3Sd} \times \langle v_B^2 \rangle$$

(6) 分子の平均運動エネルギーと温度の関係より、

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT \quad \therefore \quad m \langle v^2 \rangle = 3kT$$

これをふまえると、

$$\begin{cases} P_A = \frac{N_A \cdot 3kT}{3Sd} \\ P_B = \frac{N_B \cdot 3kT}{3Sd} \end{cases} \quad \therefore \quad \frac{P_A}{P_B} = \frac{N_A}{N_B}$$

$$(7) W = Mgh$$

(8) 熱力学第 1 法則より、

$$\frac{3}{2} kT'(N_A + N_B) - \frac{3}{2} kT(N_A + N_B) = 0 - W$$

$$\therefore \quad T' = -\frac{2}{3k(N_A + N_B)} \times Mgh + T$$

(9) B のみに注目すると、体積一定で仕事は 0 なので、

$$\frac{3}{2}kT' \cdot N_B - \frac{3}{2}kT \cdot N_B = Q_B - 0 \quad \therefore \quad Q_B = \frac{3}{2}N_B k(T' - T)$$

(10) A と B の全体では断熱なので、

$$0 = Q_A + Q_B \quad \therefore \quad Q_A = -\frac{3}{2}N_B k(T' - T)$$

(11) (6) のときと同様に、

$$\begin{cases} P_A' = \frac{N_A \cdot 3kT'}{3S(d+h)} \\ P_B' = \frac{N_B \cdot 3kT'}{3Sd} \end{cases} \quad \therefore \quad \frac{P_A'}{P_B'} = \frac{N_A d}{N_B(d+h)}$$

これと (6) より、

$$\frac{P_A'}{P_B'} = \frac{d}{d+h} \times \frac{P_A}{P_B}$$

(12) フィルターの上下の圧力差は、B の分圧と一致する。ここで、圧力と体積を用いて (9) の式を書き換えると、

$$\frac{3}{2}P_B' \cdot Sd - \frac{3}{2}P_B \cdot Sd = Q_B - 0 \quad \therefore \quad P_B' = P_B + \frac{2}{3Sd} \times Q_B$$

【2】

《解答》

(1) (あ) $\Delta U = \Delta Q + AT \cdot \Delta L$

(い) $\Delta U = C \Delta T$

(う) $\Delta Q = 0$ のとき, (あ), (い) より,

$$C \Delta T = AT \Delta L \quad \therefore \quad \Delta T = \frac{AT}{C} \Delta L$$

(え) (う) で $\Delta L > 0$ のとき, $\Delta T > 0$ なので, ③

(2) (a) (う) を書き換えると,

$$\frac{\Delta L}{\Delta T} - \frac{C}{AT} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\Delta \left(L - \frac{C}{A} \log T \right)}{\Delta T} = 0$$

これは, $L - \frac{C}{A} \log T$ が一定であることを表している.

(3) (お) $W = AT(L - L_0)$

(か) $\Delta U = 0$ のとき, (あ), (お) より,

$$0 = Q + AT(L - L_0) \quad \therefore \quad Q = -AT(L - L_0)$$

(4) (き) (う) を書き換えると $\frac{\Delta T}{\Delta L} = \frac{AT}{C}$ となり, 断熱変化におけるグラフの傾きが正なので, 図 1 のサイクルと分かる. また, 等温変化で L が増加するときは (か) の Q が負となり, 熱を放出する. よって, 温度 T_1 では A から D に変化させることが必要で, サイクルを回る向きは反時計回りとなる. これらを満たしているのは, ②

(b) $B \rightarrow A$, $D \rightarrow C$ では, それぞれ $L - \frac{C}{A} \log T$ が一定なので,

$$\begin{cases} L_B - \frac{C}{A} \log T_2 = L_A - \frac{C}{A} \log T_1 \\ L_C - \frac{C}{A} \log T_2 = L_D - \frac{C}{A} \log T_1 \end{cases} \quad \therefore \quad L_C - L_B = L_D - L_A$$

(5) (く) 1 サイクルで物体が外にする正味の仕事を W_T とおく. 1 サイクルを終えると $\Delta U = 0$ なので,

$$0 = (Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}) - W_T \quad \therefore \quad W_T = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}$$

このサイクルの熱効率を e とおくと,

$$e = \frac{W_T}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}$$

(c) (か) をふまえると,

$$\begin{cases} C \rightarrow B \text{ での吸収熱量} \cdots Q_{\text{in}} = AT_2(L_C - L_B), \\ A \rightarrow D \text{ での放出熱量} \cdots Q_{\text{out}} = AT_1(L_D - L_A) \end{cases}$$

これらを (く) に代入して, (b) をふまえると,

$$e = 1 - \frac{AT_1(L_D - L_A)}{AT_2(L_C - L_B)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

【3】

《解答》

(a) 状態 1 における力のつりあいより,

$$0 = P_1 A + mg - P_0 A$$

$$\therefore P_1 = P_0 - \frac{mg}{A}$$

気体の物質量を $n[\text{mol}]$ とすると, 状態 0 における状態方程式は,

$$P_0 V_0 = nRT \quad \therefore n = \frac{P_0 V_0}{RT}$$

また, 状態 2 でも圧力は P_1 なので, 状態 2 における状態方程式は,

$$\left(P_0 - \frac{mg}{A}\right) V_2 = \frac{P_0 V_0}{RT} \cdot RT' \quad \therefore V_2 = \frac{P_0 A}{P_0 A - mg} \cdot \frac{T'}{T} V_0$$

(b) 状態 1 における状態方程式は,

$$\left(P_0 - \frac{mg}{A}\right) V_1 = \frac{P_0 V_0}{RT} \cdot RT \quad \therefore V_1 = \frac{P_0 A}{P_0 A - mg} V_0$$

状態 1 から状態 2 への過程で, 圧力は P_1 なので,

$$W_{12} = P_1(V_2 - V_1) = P_0 V_0 \left(\frac{T'}{T} - 1\right)$$

定圧モル比熱 $C_p = \frac{5}{2}R$ を用いて,

$$Q_{12} = nC_p(T' - T) = \frac{5P_0 V_0}{2} \left(\frac{T'}{T} - 1\right)$$

(c) 状態 0 と状態 1 の圧力差に注目すると,

$$\frac{25.0 \text{ kg} \times 9.80 \text{ m/s}^2}{0.00245 \text{ m}^2} < P_0 \leq \frac{25.5 \text{ kg} \times 9.80 \text{ m/s}^2}{0.00245 \text{ m}^2}$$

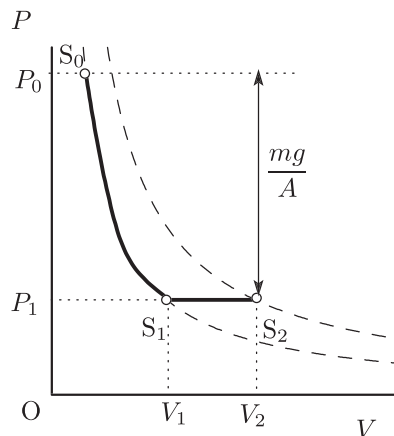
$$\therefore 1.00 \times 10^5 \text{ Pa} < P_0 \leq 1.02 \times 10^5 \text{ Pa}$$

(d) バネの伸びを x とすると, 状態 4 では,

$$\Delta V_{34} = Ax_4 \quad \therefore x_4 = \frac{\Delta V_{34}}{A}$$

これをふまえて, 状態 4 における力のつりあいより,

$$0 = P_4 A + mg - P_0 A - k \cdot \frac{\Delta V_{34}}{A} \quad \therefore P_4 = P_0 - \frac{mg}{A} + \frac{k}{A^2} \Delta V_{34}$$

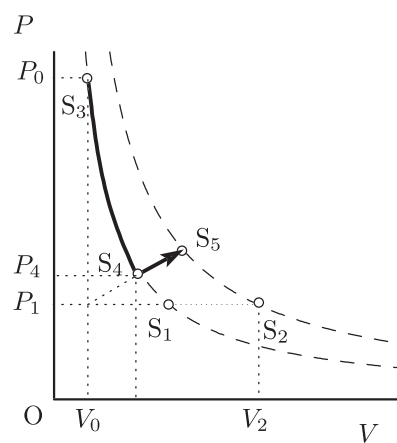


(e) 状態 4 から状態 5 への途中で, (d) と同様に

$$\begin{cases} V - V_0 = Ax \\ 0 = PA + mg - P_0A - kx \end{cases}$$

$$\therefore P = \left(P_0 - \frac{mg}{A}\right) + \frac{k}{A^2}(V - V_0)$$

これは傾きが $\frac{k}{A^2}$ で, $P = P_1$ のとき $V = V_0$ となる直線を表している.



【4】

《解答》

(1) (あ) 体積 V_0 の気体に注目すると、状態方程式は、

$$P_0 V_0 = \frac{\rho_0 V_0}{w} R T_0 \quad \therefore \quad P_0 = \frac{\rho_0 R T_0}{w}$$

(い) 状態方程式より、 n モルの気体では $V = \frac{n R T}{P}$ と表すことができ、さらにここでは $P V^\gamma = (\text{一定})$ なので、

$$P \cdot \left(\frac{n R T}{P} \right)^\gamma = P_0 \left(\frac{n R T_0}{P_0} \right)^\gamma \quad \therefore \quad P = \frac{\rho_0 R T_0}{w} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

(う) (あ) と同様に、

$$P V = \frac{\rho V}{w} R T \quad \therefore \quad \rho = \frac{w P}{R T} = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(2) (え) (あ) の圧力で温度 T_1 にした気体の密度を ρ_1 とすると、

$$\frac{\rho_1 R T_1}{w} = \frac{\rho_0 R T_0}{w} \quad \therefore \quad \rho_1 = \frac{T_0}{T_1} \rho_0 \quad \cdots (*)$$

これをふまえて、気球が浮上する限界における浮力と重力のつりあいより、

$$0 = \rho_0 V_1 g - \left(M + \frac{T_0}{T_1} \rho_0 \cdot V_1 \right) g \quad \therefore \quad V_1 = \frac{M T_1}{\rho_0 (T_1 - T_0)}$$

(お) (*) をふまえると、

$$n = \frac{\rho_1 V}{w} = \frac{T_0 \rho_0 V}{T_1 w}$$

(か) 求める熱量を Q とする。圧力一定で熱を吸収するので、定圧モル比熱 $C_P = C_V + R$ を用いて、

$$Q = n C_P (T_1 - T_0) = \frac{T_0 \rho_0 V}{T_1 w} (C_V + R) (T_1 - T_0)$$

(き) 内部エネルギーを U とすると、 $U = n C_V T$ と表せるので、

$$\Delta U = n C_V (T_1 - T_0) = \frac{T_0 \rho_0 V}{T_1 w} \cdot C_V (T_1 - T_0)$$

(3) (く) 周囲の大気の密度を ρ とすると、(*) をふまえて、重力と浮力のつりあいより、

$$0 = \rho V g - \left(M + \frac{T_0}{T_1} \rho_0 \cdot V \right) g \quad \therefore \quad \rho = \frac{T_0}{T_1} \rho_0 + \frac{M}{V}$$

このとき、(う) より、

$$\frac{T_0}{T_1} \rho_0 + \frac{M}{V} = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \therefore \quad T = T_0 \left(\frac{T_0}{T_1} + \frac{M}{\rho_0 V} \right)^{\gamma-1}$$

(け) (い), (く) より, 大気の圧力は,

$$P = \frac{\rho_0 R T_0}{w} \left(\frac{T_0}{T_1} + \frac{M}{\rho_0 V} \right)^\gamma$$

気球の下部を開いても重力と浮力のつりあいが保たれたままとなると, 気体の質量は不変なので, 気体の出入りは起きていない. また, このとき, 気球内部の圧力は大気圧と等しい. 求める温度を T_2 とすると, 状態方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0 R T_0}{w} \left(\frac{T_0}{T_1} + \frac{M}{\rho_0 V} \right)^\gamma \cdot V &= \frac{T_0 \rho_0 V}{T_1 w} R T_2 \\ \therefore T_2 &= T_1 \left(\frac{T_0}{T_1} + \frac{M}{\rho_0 V} \right)^\gamma \end{aligned}$$

(こ) 体積が一定のとき, 状態方程式より温度は圧力と比例する. ここで, 気球の下部を開いてあるときの圧力は大気圧と等しく, 大気圧は上空で小さくなる. このため, 気球内部の温度 T_2 は T_1 より低い. →②

【5】

《解答》

(1) 熱量保存

(2) 金属球の失った熱量と水と容器が得た熱量が等しいので、

$$Mx'(T_B - T_1) = Wc_0(T_1 - T_0) + mc_m(T_1 - T_0) \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore x' = \frac{(Wc_0 + mc_m)(T_1 - T_0)}{M(T_B - T_1)}$$

(3) AB 間で容器の外部に逃げた熱量を q とすると、

$$Mx(T_B - T_1) = \{Wc_0(T_1 - T_0) + mc_m(T_1 - T_0)\} + q \cdots \textcircled{2}$$

これと ① より、

$$Mx(T_B - T_1) = Mx'(T_B - T_1) + q \quad \therefore x = x' + \frac{q}{M(T_B - T_1)}$$

熱が逃げたことを無視して求めた x' は正確な x よりも小さく得られる。

(4) BC 間で容器の外部に逃げた熱量 Q は、

$$Q = Mx(T_1 - T_2) + Wc_0(T_1 - T_2) + mc_m(T_1 - T_2)$$

所要時間は $t_2 - t_1$ なので、1 秒あたりでは、

$$\frac{Q}{t_2 - t_1} = \frac{(Mx + Wc_0 + mc_m)(T_1 - T_2)}{t_2 - t_1}$$

(5) AB 間でも (4) の割合で熱が逃げていたとすると、

$$q = \frac{(Mx + Wc_0 + mc_m)(T_1 - T_2)}{t_2 - t_1} \times (t_1 - t_0)$$

これを ② に代入して、 x を x'' とおくことにより、

$$Mx''(T_B - T_1) = (Wc_0 + mc_m)(T_1 - T_0) + \frac{(Mx'' + Wc_0 + mc_m)(T_1 - T_2)}{t_2 - t_1} \cdot (t_1 - t_0)$$

(6) 容器の外部へ熱が逃げる速さは、容器と外部の温度差が大きくなるほど増大すると考えられる。このため、AB 間で熱が逃げる速さは BC 間での速さよりも小さくなっていて、(4) をそのまま用いると AB 間で逃げた熱を大きく見積もりすぎてしまい、 x'' が x よりも大きく得られた。

(7) T_1 と T_0 のちょうど中間に室温があれば、温度変化の前半では熱が周囲から入ってきて、後半では周囲に逃げていき熱の出入りはほぼ相殺されると考えられるので、

$$(\text{初めの水温}) = T_R - \frac{T_1 - T_0}{2} \quad \therefore \textcircled{b}$$

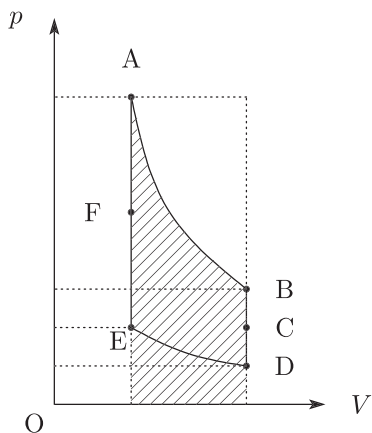
【6】

《解答》

(1) $Q_1 = W_1$

(2) A→B の過程は温度 T_1 [K] の等温変化であるから、気体の内部エネルギーの変化が 0 J である。従って、熱力学の第 1 法則より、気体が外部から受け取った熱量 Q_1 [J] は、気体が外部にした仕事 W_1 [J] に等しい。

(3) 右図。



(4) , (5)

$$\frac{3}{2}n_0RT_0 + \frac{3}{2}nRT_1 = \frac{3}{2}(n+n_0)RT_0'$$

$$\therefore T_0' = \frac{n_0}{n+n_0} \times T_0 + \frac{n}{n+n_0} \times T_1$$

(6)

$$Q_2 = W_2$$

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{\int_{V_1}^{V_2} nRT_2 \frac{dV}{V}}{\int_{V_1}^{V_2} nRT_1 \frac{dV}{V}} = \frac{T_2 \log \frac{V_2}{V_1}}{T_1 \log \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_2}{T_1}$$

(7)

$$nC_V(T_0 - T_2)$$

(8) , (9)

$$\frac{3}{2}n_0RT_0' + \frac{3}{2}nRT_2 = \frac{3}{2}(n+n_0)RT_0$$

$$\therefore T_0 = \frac{n_0}{n+2n_0} \times T_1 + \frac{n+n_0}{n+2n_0} \times T_2$$

(10)

$$e(n_0) = \frac{W_1 - W_2}{Q_1 + q_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + nC_V(T_1 - T_0)}$$

ここで,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{nC_V}{Q_1} = \alpha$$
$$e(n_0) = \frac{1 - \frac{Q_2}{Q_1}}{1 + \frac{nC_V}{Q_1}(T_1 - T_0)} = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{1 + \alpha(T_1 - T_0)}$$

$n_0 = 0$ のとき, (8), (9) の T_0 の式より,

$$T_0 = T_2$$

よって,

$$e_0 = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{1 + \alpha(T_1 - T_2)}$$

したがって, (8), (9) の T_0 を用いて,

$$\frac{e(n_0)}{e_0} = \frac{1 + \alpha(T_1 - T_2)}{1 + \alpha(T_1 - T_0)} = \frac{1 + \alpha(T_1 - T_2)}{1 + \frac{n + n_0}{n + 2n_0} \times \alpha(T_1 - T_2)}$$

■自習

【1】

《解答》

(a) スクリーン上の位置 x に届く 2 つの光に注目すると,

$$\begin{aligned} (\text{経路差}) &\doteq d \sin \phi \\ &\doteq d \tan \phi = d \frac{x}{l} \end{aligned}$$

m を整数として, 明条件は,

$$d \frac{x}{l} = \frac{\lambda}{2} \times 2m \quad \therefore x = \frac{l\lambda}{d} m$$

(b) A, B に入射する前に生じた差も含めて,

$$\begin{aligned} (\text{経路差}) &\doteq d \sin \theta + d \sin \phi \\ &\doteq d(\theta + \tan \phi) = d \left(\theta + \frac{x}{l} \right) \end{aligned}$$

m を整数として, 明条件は,

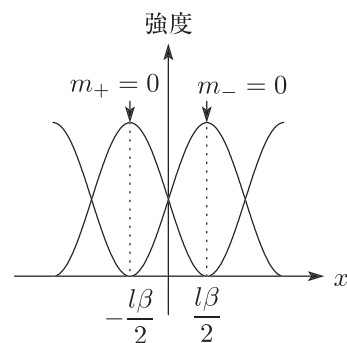
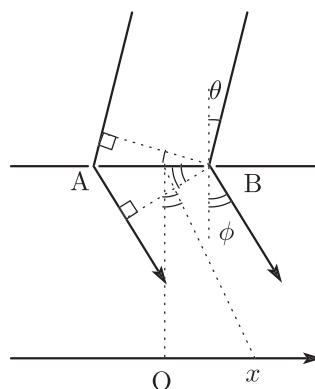
$$d \left(\theta + \frac{x}{l} \right) = \frac{\lambda}{2} \times 2m \quad \therefore x = \frac{l\lambda}{d} m - l\theta$$

(c) 2 つの星からの光による明線位置は,

$$\begin{cases} \theta = +\frac{\beta}{2} \text{ で入射する光} \cdots x_+ = \frac{l\lambda}{d} m_+ - l\frac{\beta}{2} \\ \theta = -\frac{\beta}{2} \text{ で入射する光} \cdots x_- = \frac{l\lambda}{d} m_- + l\frac{\beta}{2} \end{cases}$$

それぞれの明線間隔は $\Delta x = \frac{l\lambda}{d}$ なので, d を 0 から増加させていくと Δx は減少してくる. 初めて縞模様が消滅したとき, 右図のようになるので,

$$\frac{l\beta}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times \frac{l\lambda}{d_0} \quad \therefore \beta = \frac{\lambda}{2d_0}$$



- (d) 連星が出す光の振動数を f とおく．連星の円運動の角速度を ω ，速さを v として，右図の位置で出された光の波長は，

$$\frac{c \pm v \cos(\omega t)}{f} = \frac{c}{f} \pm \frac{v}{f} \cos(\omega t)$$

これと観測した波長より，

$$\begin{cases} \frac{c}{f} = \lambda \\ \frac{v}{f} = \Delta \end{cases} \quad \therefore \quad v = \frac{\Delta}{\lambda} c$$

また，連星の運動の周期が T なので，

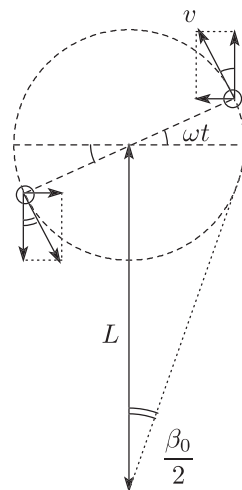
$$\frac{2\pi r}{v} = T \quad \therefore \quad r = \frac{T}{2\pi} \times \frac{\Delta}{\lambda} c$$

さらに，連星までの距離 L は十分大きいので，

$$r = L \cdot \frac{\beta_0}{2} \quad \therefore \quad L = \frac{2}{\beta_0} \times \frac{cT\Delta}{2\pi\lambda} = \frac{cT\Delta}{\pi\lambda\beta_0}$$

- (e) 向心方向の運動方程式は，

$$M \frac{v^2}{r} = G \frac{M^2}{(2r)^2} \quad \therefore \quad M = \frac{4rv^2}{G} = \frac{2T}{\pi G} \left(\frac{c\Delta}{\lambda} \right)^3$$



【2】

《解答》

- (1) 温度 T が一定のとき, 状態方程式より,

$$P \cdot A(l_0 - x) = \left(P_e + \frac{Mg}{A}\right) Al_0 \quad \therefore \quad P = \frac{l_0}{l_0 - x} \left(P_e + \frac{Mg}{A}\right)$$

このとき, 下向き正とした合力 F' は,

$$\begin{aligned} F' &= P_e A + Mg - PA \\ &= (P_e A + Mg) \left(1 - \frac{l_0}{l_0 - x}\right) \end{aligned}$$

- (2) 与えられた近似式を用いると,

$$\begin{aligned} F' &\doteq (P_e A + Mg) \left\{1 - l_0 \left(\frac{1}{l_0} + \frac{x}{l_0^2}\right)\right\} \\ &= -\frac{P_e A + Mg}{l_0} x \end{aligned}$$

$\frac{P_e A + Mg}{l_0} = k$ とおくと, 与えられた振動数の表式を用いることができ,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P_e A + Mg}{M l_0}}$$

- (3) l_0 程度の範囲で圧力のむらを見捨てるためには, 「 l_0 が λ より十分小さい」という関係を満たさなければならない.
- (4) 断熱曲線の方が等温曲線とくらべて傾きが急なので, ピストンが振動したときの圧力変化のしかたが急となっている. このとき, 合力 F' の変化のしかたも急となり, これは図 1 でばね定数 k が大きいことに相当する. よって, 断熱変化の場合の振動数 f は大きくなる.

【3】

《解答》

(1) 媒質となる空気等を伝わる縦波 (疎密波) のうち, 振動数がおよそ 20~20000 Hz の波.

(2) 440 Hz より振動数 f が小さく, うなりが 1 秒間に 2 回なので,

$$440 - f = 2 \quad \therefore \quad f = 438 \text{ Hz}$$

(3) 基本音で波長が $\lambda = 2L$ なので,

$$f = \frac{v_0}{\lambda} = \frac{v_0}{2L}$$

(4) K の線密度が ρ なので,

$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta L} = \frac{\Delta M}{v \Delta T} \quad \therefore \quad \Delta M = \rho v \Delta T$$

運動量の y 成分を p とおくと,

$$p = \Delta M \cdot w = \rho v w \Delta T$$

(5) $F \sin \theta \cdot \Delta T$

(6) 運動量と力積の関係より,

$$\rho v w \Delta T = F \sin \theta \cdot \Delta T \quad \therefore \quad \rho v w = F \sin \theta$$

$w = v \tan \theta$ を代入すると,

$$\rho v^2 \tan \theta = F \sin \theta \quad \therefore \quad v = \sqrt{\frac{F \cos \theta}{\rho}}$$

(7) (6) で, $\cos \theta \doteq 1$ のとき, $v \doteq \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ と近似でき, これを (3) で $v_0 = v$ とした式に代入すると,

$$f = \frac{v}{2L} \doteq \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

【4】

《解答》

- (1) 境界面が A_0 点から B 点まで進む時間と、 A_0 点の空気が A 点まで移動する時間が一致しているので、

$$\frac{\overline{A_0B}}{U} = \frac{\Delta x}{v} \quad \therefore \quad \Delta x = \frac{v}{U} \times \overline{A_0B}$$

- (2) $\overline{O_0B} = Ut$, $\overline{OB} = Ut - vt$ をふまえると、

$$p\{(Ut - vt)S\}^\gamma = p_0(Ut \cdot S)^\gamma \quad \therefore \quad p = p_0 \left(1 - \frac{v}{U}\right)^{-\gamma}$$

$\frac{v}{U}$ が微小なので、近似式を用いることができ、

$$p = p_0 \left(1 - \gamma \cdot \frac{-v}{U}\right) = p_0 \left(1 + \gamma \frac{v}{U}\right)$$

- (3) O_0B にあった空気の質量は $m = d \times Ut \cdot S$ なので、図 (c) のときの運動量 P は、

$$P = mv = dUtSv$$

- (4) O_0B にあった空気は、ピストンから右向きに pS 、右側の空気から左向きに p_0S の力を受けているので、与えられた力積 I は、

$$I = pS \cdot t - p_0S \cdot t = \frac{v}{U} \gamma p_0 \cdot St$$

- (5) 運動量と力積の関係より、

$$dUtSv = \frac{v}{U} \gamma p_0 St \quad \therefore \quad U = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{d}}$$

- (6) (5) に数値を代入すると、

$$U_0 = \sqrt{\frac{1.40 \times 1.01 \times 10^5}{1.29}} = 3.31 \times 10^2 [\text{m/s}]$$

- (7) 空気 1 モルあたりの質量を M とおく。注目する気体の圧力・体積・密度を、温度 $T_0 = 273 \text{ K}$ のときは p_0 , V_0 , d_0 、また温度 $T_0 + T$ のときは p_0' , V_0' , d_0' とすると、状態方程式は、

$$\begin{cases} p_0 V_0 = \frac{d_0 V_0}{M} R T_0 \\ p_0' V_0' = \frac{d_0' V_0'}{M} R (T_0 + T) \end{cases} \quad \therefore \quad \frac{p_0'}{p_0} = \frac{d_0' (T_0 + T)}{d_0 T_0}$$

これと (5) より、温度 $T_0 + T$ での速さは、

$$U = \sqrt{\frac{\gamma}{d_0'} \cdot \frac{d_0' (T_0 + T)}{d_0 T_0} p_0} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{d_0} \left(1 + \frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{T}{T_0}$ が微小のとき，近似式を用いることができ，

$$U \doteq \sqrt{\frac{\gamma p_0}{d_0}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{T_0} \right) = U_0 + \frac{U_0}{2T_0} T$$

数値を代入すると，

$$U = U_0 + \frac{331 \text{ m/s}}{2 \cdot 273 \text{ K}} \cdot T = U_0 + 0.6 [\text{m}/(\text{s} \cdot \text{K})] \times T$$

【5】

《解答》

- (1)(ア) 微小時間 Δt での磁束の変化は $\Delta\Phi = Bl\Delta x$ なので、時計回りを正とした誘導起電力は、

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \therefore |V| = l\frac{\Delta x}{\Delta t} \times B$$

- (イ) $V < 0$ なので、誘導起電力の向きは反時計回りとなり、電流の向きも反時計回り。

- (ウ) 反時計回りを正とする自己誘導起電力 $-L\frac{\Delta I}{\Delta t}$ も考慮すると、回路方程式は、

$$l\frac{\Delta x}{\Delta t} \times B - \frac{\Delta I}{\Delta t} \times L = 0 \cdot I$$

- (エ) (ウ) を書き換えると、 $\frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{Bl}{L}$ (定数) なので、

$$\frac{I-0}{x-0} = \frac{Bl}{L} \quad \therefore I = \frac{Bl}{L}x$$

- (オ) 辺 bc の電流 I が磁場から受ける力は、

$$F = -IBl = -\frac{B^2 l^2}{L}x \quad \therefore |F| = \frac{B^2 l^2}{L}x$$

- (2)(カ) コイルの運動方程式は、

$$M\ddot{x} = -\frac{B^2 l^2}{L}x \quad \therefore \ddot{x} = -\frac{B^2 l^2}{LM}x$$

コイルの運動は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{B^2 l^2}{LM}}$ の単振動で、初期条件 $x(0) = 0$ と $\dot{x}(0) = v_0$ を満たす解は、

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad \therefore x_{\max} = \frac{v_0}{\omega} = v_0 \sqrt{\frac{LM}{B^2 l^2}}$$

$x_{\max} < l$ であるためには、

$$v_0 \sqrt{\frac{LM}{B^2 l^2}} < l \quad \therefore v_0 < \frac{Bl^2}{\sqrt{LM}}$$

- (キ) $x = 0$ に戻った時刻では、

$$\omega t = \pi \quad \therefore t = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{LM}{B^2 l^2}}$$

- (ク) $x > l$ の位置では、コイルに電流が流れていても、コイルが磁場から受ける合力は 0 となるので、コイルの運動は等速度運動となる。

- (ケ) $x > l$ における回路の方程式は、

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \cdot I \quad \therefore I = (\text{一定})$$

電流は $x = l$ のときの値に保たれ、

$$I = \frac{Bl}{L} \cdot l = \frac{Bl^2}{L} \quad \therefore \frac{1}{2}LI^2 = \frac{B^2 l^4}{2L}$$

添削課題

《解答》

- (1) ピストンが受ける力のつりあいより、おもり F をつける前の圧力は室 I, II ともに大気圧と等しく p_0 . 室 II は温度が 0°C に保たれたまま容積が $\frac{V_2}{3}$ になるので, 状態方程式より,

$$p \cdot \frac{V_2}{3} = p_0 V_2 \quad \therefore \quad p = 3p_0$$

- (2) おもり F の質量を M として, B が受ける力のつりあいより,

$$0 = 3p_0 S - p_0 S - Mg \quad \therefore \quad M = \frac{2p_0 S}{g}$$

- (3) 変化前後における室 I の温度を T, T' とおくと, 状態方程式は,

$$\begin{cases} p_0 V_1 = nRT \\ 3p_0 \cdot \frac{V_2}{3} = nRT' \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} T = \frac{p_0 V_1}{nR} \\ T' = \frac{p_0 V_2}{nR} \end{cases}$$

よって, 室 I の内部エネルギー変化は

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2} nRT' - \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} p_0 (V_2 - V_1)$$

また, 室 II の気体の温度は 273K なので, 内部エネルギーの変化は,

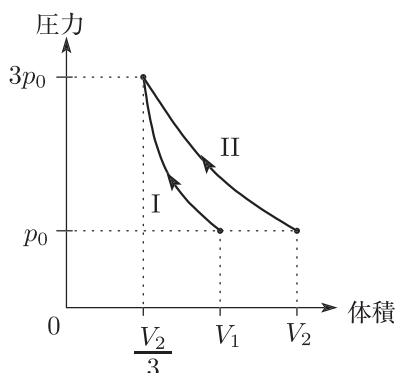
$$\Delta U_2 = \frac{3}{2} nR \cdot 273 - \frac{3}{2} nR \cdot 273 = 0$$

- (4) 質量 m の氷が融解するので, 気体は mQ の熱を放出する. このとき, 外部から気体がされた仕事を W とすると, 熱力学第 1 法則より,

$$\begin{aligned} \Delta U_1 + \Delta U_2 &= -mQ + W \\ \therefore \quad W &= mQ + \frac{3}{2} p_0 (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

- (5) 室 I の気体は断熱変化をし, 室 II の気体は等温変化をする.

断熱曲線は等温曲線よりも傾きが急なので, グラフは右図のようになる.



配点

100 点

(1)10 点, (2)10 点, (3)20 点, (4)30 点, (4)30 点

3章 総合演習 (3)

問題

■演習

【1】

《解答》

- (1) 波源が点 A を通過する時刻に出された波は、1 周期 T の後に、A を中心とする半径 vT の円周上まで広がっている。この時刻に、波源は A から VT 離れた点 B にいる。右図をふまえると、左右に出された波の波長は、

$$\lambda_1 = (v \pm V)T = \frac{v \pm V}{f_0}$$

この波を、静止して観測するときの振動数が f_1 なので、

$$v = f_1 \lambda_1 \quad \therefore \quad f_1 = \frac{v}{v \pm V} f_0$$

- (2) $V > v$ の場合について、波が出されてから 1 周期後の位置関係を図にすると右図のようになるので、出された波の波長は、

$$\lambda_2 = (V \pm v)T = \frac{V \pm v}{f_0}$$

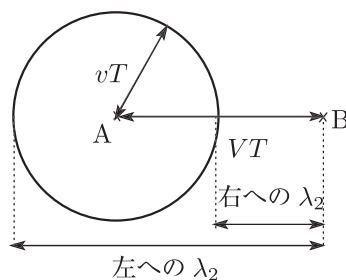
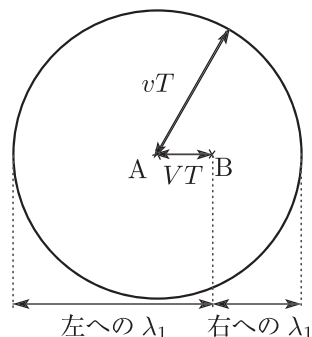
この波を静止して観測するときの振動数は、

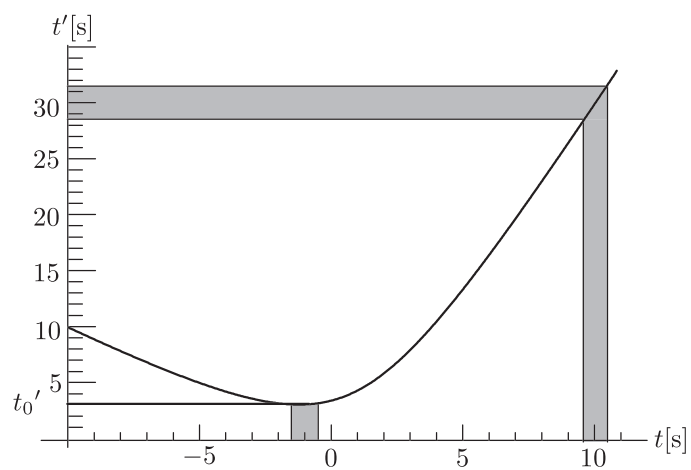
$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{v}{V \pm v} f_0$$

- (3) 時刻 t に波源 S を出た波は、 $\overline{OS} = \sqrt{l^2 + (Vt)^2}$ だけ伝わって O に届くので、

$$t' = t + \frac{\overline{OS}}{v} = t + \frac{\sqrt{l^2 + (Vt)^2}}{v}$$

- (4) 次ページの図から分かるように、 $t' = t_0'$ の付近では、1 秒間に出された波が非常に短い時間内に集中して観測されるので、 $t' = t_0'$ の直後には振動数が極めて大きく振幅も極めて大きい波が観測される。





【2】

《解答》

(1) Δt の間の音源の振動回数と Δt_1 の間に観測する振動回数が等しいので,

$$f_1 \Delta t_1 = f_0 \Delta t \quad \therefore \quad f_1 = \frac{\Delta t}{\Delta t_1} f_0$$

(2) 図 1 で $\overline{AA'} = v \Delta t$ なので, $d - d' = v \Delta t$ が成り立ち,

$$ct_1 - c(t_1 + \Delta t_1 - \Delta t) = v \Delta t \quad \therefore \quad \frac{\Delta t}{\Delta t_1} = \frac{c}{c - v}$$

$$(3) \quad f_1 = \frac{c}{c - v} f_0$$

(4) $t \geq t_0$ では, みかけの音速が $c + w$ となるので,

$$d = ct_0 + (c + w)(t_2 - t_0)$$

(5) 音速 c で伝わる時間が $t_0 - \Delta t$ であることに注意して, (4) と同様に考えると,

$$d' = c(t_0 - \Delta t) + (c + w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0)$$

(6) (2) と同様に, $d - d' = v \Delta t$ が成り立つので,

$$\{ct_0 + (c + w)(t_2 - t_0)\} - \{c(t_0 - \Delta t) + (c + w)(t_2 + \Delta t_2 - t_0)\} = v \Delta t$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta t}{\Delta t_2} = \frac{c + w}{c - v}$$

(7) (1) と同様に, 振動回数に注目すると,

$$f_2 \Delta t_2 = f_0 \Delta t \quad \therefore \quad f_2 = \frac{\Delta t}{\Delta t_2} f_0 = \frac{c + w}{c - v} f_0$$

(8) (3) で, 音速 c をみかけの音速 $c' = c + w$ で置きかえることにより,

$$f_2' = \frac{c'}{c' - v} f_0 = \frac{c + w}{c + w - v} f_0$$

$$(9) \quad s = wt_3$$

$$(10) \quad s' = ct_3$$

(11) (9), (10) をふまえて, $\triangle OAB$ に注目すると,

$$(ct_3)^2 = (wt_3)^2 + d^2 \quad \therefore \quad d = t_3 \sqrt{c^2 - w^2}$$

(12) A' 点で発した音が O 点に達するまでの時間は $(t_3 + \Delta t_3) - \Delta t$ と表せるので, (11) の t_3 をこの時間でおきかえると,

$$d' = (t_3 + \Delta t_3 - \Delta t) \sqrt{c^2 - w^2}$$

(2) と同様に, $d - d' = v\Delta t$ が成り立つので,

$$t_3\sqrt{c^2 - w^2} - (t_3 + \Delta t_3 - \Delta t)\sqrt{c^2 - w^2} = v\Delta t \quad \therefore \quad \frac{\Delta t}{\Delta t_3} = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v}$$

(1) と同様に, 振動回数に注目すると,

$$f_3\Delta t_3 = f_0\Delta t \quad \therefore \quad f_3 = \frac{\Delta t}{\Delta t_3}f_0 = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v}f_0$$

【3】

《解答》

I (1) すき間 A と B から点 P に届く 2 つの波の経路差が $\frac{\lambda}{2}$ となって打ち消し合うので、

$$b \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \therefore \quad b = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

(2) すき間 D の位置を $x = d$ とおく. すき間 C と D から点 P に届く 2 つの波も経路差が $\frac{\lambda}{2}$ となって打ち消し合うので、

$$(d - c) \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \therefore \quad d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} + c$$

II (1) $x_1 \sin \theta$

(2) 互いに打ち消し合う波のペアが存在しなければよい. ここで I(1) より, $w \geq b$ の場合は互いに打ち消し合う波のペアが存在してしまうので, 求める条件は,

$$w < b \quad \therefore \quad w < \frac{\lambda}{2 \sin \theta}$$

(3) $w = 0$ から $w = b$ まではすき間を通る波が増加しても打ち消し合うペアができることはない. このため, 点 P での波の振幅は単調に増加する. $w = b$ から $w = 2b$ まではすき間を通る波が増加することで打ち消し合うペアが増加していく. このため, 点 P での波の振幅は単調に減少していき, $w = 2b$ で振幅は 0 になる.

III すき間内の 2 つの点から点 P に届く 2 つの波の経路差が最大であるのは, すき間の中央と端から届く波に注目した場合で, その経路差は $\sqrt{r^2 + L^2} - L$ と表せる.

この経路差が $\frac{\lambda}{2}$ を上回っていると, すき間を通して点 P に届く波の中に打ち消し合うペアが存在してしまうので, 点 P での振幅が最大になったときは,

$$\sqrt{r^2 + L^2} - L = \frac{\lambda}{2} \quad \therefore \quad r = \sqrt{L\lambda + \frac{\lambda^2}{4}}$$

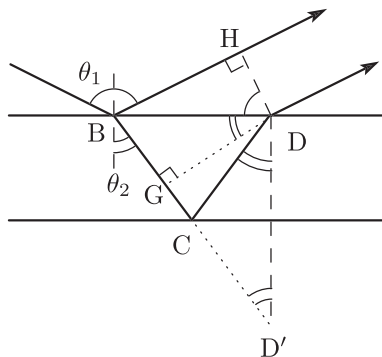
【4】

《解答》

(ア) $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$

(イ) 空気中での波長は $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$, 板 I 中での波長は

$\lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}$ なので, 右図の BCD と BH に含まれる波の数の差は,



$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\lambda_2} - \frac{\overline{BH}}{\lambda_1} &= \frac{\overline{BG} + \overline{GD'}}{\lambda/n_2} - \frac{\overline{BH}}{\lambda/n_1} \\ &= \frac{n_2(\overline{BD} \sin \theta_2 + \overline{DD'} \cos \theta_2)}{\lambda} - \frac{n_1 \cdot \overline{BD} \sin \theta_1}{\lambda} \\ &= \frac{\overline{BD} \cdot (n_2 \sin \theta_2 - n_1 \sin \theta_1) + n_2 \cdot 2d \cos \theta_2}{\lambda} \\ &= \frac{n_2 \cdot 2d \cos \theta_2}{\lambda} \end{aligned}$$

これに 2π を乗じたものが経路のちがいに起因する位相差となる. また, $n_2 > n_1$ のとき, 点 B での反射では位相が π 変化することもふまえると, 強め合う条件は,

$$2\pi \cdot \frac{n_2 \cdot 2d \cos \theta_2}{\lambda} + \pi = \pi \times (\text{偶数}) \quad \therefore \quad 2n_2 d \cos \theta_2 = \frac{\lambda}{2} \cdot (2k + 1)$$

(ウ) $n_2 < n_1$ のときは, 点 C での反射でのみ位相が π 変化するので, 強め合う条件は,

$$2\pi \cdot \frac{n_2 \cdot 2d \cos \theta_2}{\lambda} + \pi = \pi \times (\text{偶数}) \quad \therefore \quad 2n_2 d \cos \theta_2 = \frac{\lambda}{2} \cdot (2k + 1)$$

(エ) $\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1}$

(オ) $\lambda_1 < \lambda$ なので, 波の数の差は,

$$\frac{L}{\lambda_1} - \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}(n_1 - 1)$$

(カ) (オ) の波の数の差が 1 増加すると, 明暗の変化が 1 回起こるので,

$$\frac{L}{\lambda}(n_1 - 1) = N \quad \therefore \quad n_1 = \frac{N\lambda}{L} + 1$$

(キ) N の計測で $|\Delta N| = \frac{1}{4}$ に相当する不確定さを生じるとき, (カ) より,

$$|\Delta n_1| = \frac{\lambda}{L} \cdot |\Delta N| = \frac{\lambda}{4L}$$

$\lambda = 400 \text{ nm}$ で, $|\Delta n_1| < 10^{-6}$ とするためには,

$$\frac{400 \times 10^{-9} \text{ m}}{4L} < 10^{-6} \quad \therefore \quad L > 0.1 \text{ m}$$

【5】

《解答》

- (a) (1) $\frac{\lambda}{n}$
 (2) $d \sin \theta_n$
 (3) 屈折の法則より,

$$1 \cdot \sin \theta = n \sin \theta_n \quad \therefore \sin \theta_n = \frac{\sin \theta}{n}$$

- (4) (1)～(3) をふまえると, 強め合う条件は,

$$d \cdot \frac{\sin \theta}{n} = m \cdot \frac{\lambda}{n} \quad \therefore d \sin \theta = m \lambda$$

- (b) θ_n が大きくなりすぎると透明基板と空気の境界面で全反射してしまい, 空气中へ出て行く光がなくなる. 空气中へ出て行く光が存在しているときは, (3) で $\theta < \frac{\pi}{2}$ なので,
 $\sin \theta_n < \frac{1}{n}$ を満たす. よって, 全反射となるための条件は $\sin \theta_n > \frac{1}{n}$ となる.
 (c) (4) より, 一つの回折光では,

$$d \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2 + l^2}} = 1 \cdot \lambda \quad \therefore d = \lambda \sqrt{1 + \left(\frac{l}{p}\right)^2}$$

与えられた数値をふまえると,

$$d = 0.50 \mu\text{m} \times \sqrt{1 + \left(\frac{300 \text{ mm}}{100 \text{ mm}}\right)^2} \doteq 1.6 \mu\text{m}$$

- (d) 図 3 の l が z で, p が $\sqrt{x^2 + y^2}$ で置き換わる状況とみなせるので, 強め合う条件は,

$$d \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}} = m \lambda$$

ここで, $x^2 + y^2 + z^2 \doteq z^2$ とみなすと,

$$d \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = m \lambda \quad \therefore x^2 + y^2 = \left(\frac{m \lambda z}{d}\right)^2$$

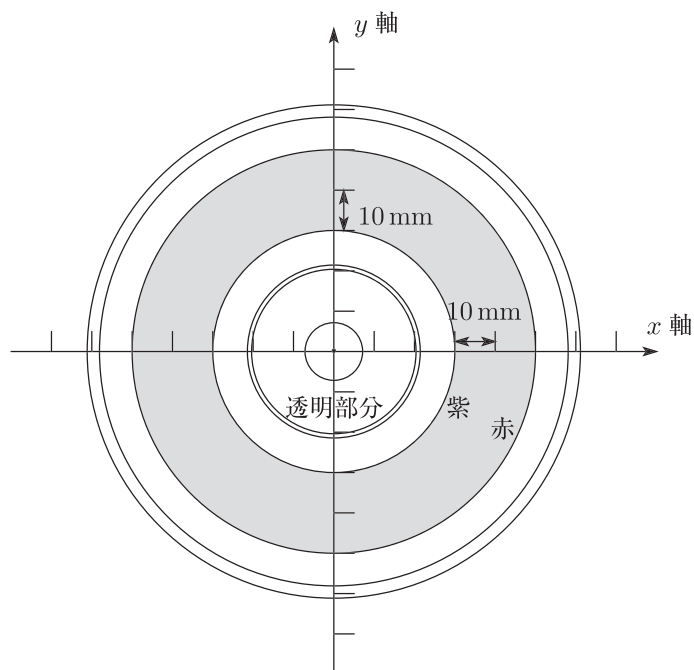
- (e) (d) より, 点 Q で強め合う波長 λ の回折光を生じる記録面上の位置は半径 $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m \lambda z}{d}$ の円周付近と分かる. この半径を r_m とおくと,

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1 \times \lambda \times (120 \times 10^{-3} \text{ m})}{1.58 \times 10^{-6} \text{ m}} = (7.59 \times 10^4) \times \lambda \\ r_2 = \frac{2 \times \lambda \times (120 \times 10^{-3} \text{ m})}{1.58 \times 10^{-6} \text{ m}} = (1.52 \times 10^5) \times \lambda \end{cases}$$

ここで, $0.40\mu\text{m} \leq \lambda \leq 0.64\mu\text{m}$ なので,

$$\begin{cases} 30\text{ mm} \leq r_1 \leq 49\text{ mm} \cdots \text{記録面に含まれている} \\ 61\text{ mm} \leq r_2 \leq 97\text{ mm} \cdots \text{記録面に含まれていない} \end{cases}$$

$m \geq 3$ の回折光も記録面には含まれていないので, 観測されるのは 1 次回折光のみと分かる. また, λ が大きい方が r_1 が大きいので, 外側から順に赤橙黄緑青藍紫と並び, 下図のような回折パターンとなる.



【6】

《解答》

$$\text{あ } \overline{PS} = \frac{v_1(t_S - t)}{\sin \theta_1}$$

$$\text{い } \overline{PQ} = v_2(t_S - t)$$

$$\text{う } \sin \theta_2 = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PS}} = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1$$

$$\text{問 1 } \sin \theta = \frac{c}{V} < 1 \quad \therefore c < V$$

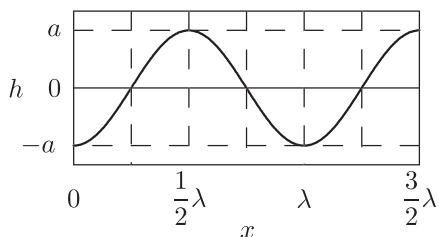
$$\text{え } c = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{問 2 } t = \frac{1}{4f} \text{ で,}$$

$$h = a \sin \left(kx - \frac{\omega}{4f} \right) = a \sin \left(kx - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore h = -a \cos kx$$

概略図は下図.



お

$$h_1 = a \sin \{ (k + \Delta k)x - (\omega + \Delta \omega)t \}$$

$$= a \sin \{ (kx - \omega t) + (\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t) \}$$

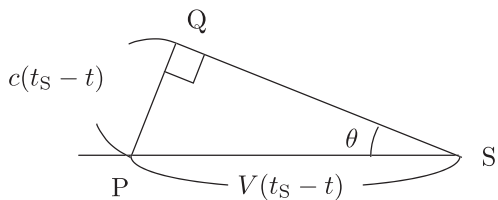
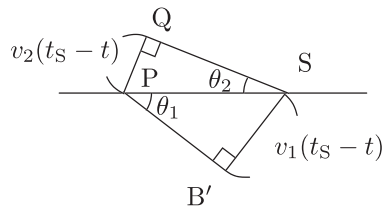
$$h_2 = a \sin \{ (k - \Delta k)x - (\omega - \Delta \omega)t \}$$

$$= a \sin \{ (kx - \omega t) - (\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t) \}$$

$$\therefore h = h_1 + h_2 = 2a \cos(\Delta k \cdot x - \Delta \omega \cdot t) \sin(kx - \omega t)$$

か 波 1 と 波 2 の位相速度が等しく c ゆえ,

$$c_1 = c_2 = c = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{2\Delta\omega}{2\Delta k} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v_G \rightarrow \textcircled{2}$$



き $x = 0$ の点では,

$$h = -2a \cos(\Delta\omega \cdot t) \cdot \sin \omega t$$

$\cos(\Delta\omega \cdot t) = \pm 1$ となるには,

$$\Delta\omega \cdot t = n\pi \quad \therefore \quad t = \frac{n\pi}{\Delta\omega}$$

よって, 単位時間あたりの回数 n は $\Delta t = \frac{\pi}{\Delta\omega}$ から,

$$n = \frac{1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$$

問 3 $\omega = \sqrt{gk}$ より位相速度は,

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

一方,

$$\begin{aligned} \pm \Delta\omega &= \omega(k \pm \Delta k) - \omega(k) \\ &= \sqrt{g(k \pm \Delta k)} - \sqrt{gk} \\ &= \sqrt{gk \left(1 \pm \frac{\Delta k}{k}\right)} - \sqrt{gk} \\ &\doteq \sqrt{gk} \left(1 \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta k}{k}\right) - \sqrt{gk} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \Delta k \end{aligned}$$

よって群速度は,

$$\begin{aligned} v_G &= \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \\ \therefore \quad \frac{v_G}{c} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■自習

【1】

《解答》

定積モル比熱が cR の気体 1 モルなので、内部エネルギーは $U = cR \cdot T$ と表せる。

(ア) 熱力学第 1 法則より、

$$\Delta U = Q - P\Delta V \quad \therefore \quad Q = cR\Delta T + P\Delta V \quad \cdots (1)$$

(イ) 圧力一定のとき、変化前後の状態方程式は、

$$\begin{cases} PV = RT \\ P(V + \Delta V) = R(T + \Delta T) \end{cases}$$

これらより、

$$P\Delta V = R\Delta T \quad \therefore \quad \Delta V = \frac{R}{P} \times \Delta T \quad \cdots (2)$$

(ウ) 式 (2) を式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} Q &= cR\Delta T + P \cdot \frac{R}{P} \Delta T \\ &= (c+1)R \times \Delta T \quad \cdots (1)' \end{aligned}$$

(エ) (温度) $\times$ (体積) $^{\frac{1}{c}} = \text{一定}$ より、

$$(T + \Delta T)(V + \Delta V)^{\frac{1}{c}} = TV^{\frac{1}{c}} \quad \therefore \quad \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{\frac{1}{c}} = 1$$

ここで、与えられた近似式を用いて、微小量の 1 次まで残すと、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{\frac{1}{c}} &\doteq \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \left(1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{\Delta V}{V}\right) \\ &\doteq 1 + \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\Delta V}{V} \end{aligned}$$

以上より、

$$1 + \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\Delta V}{V} = 1 \quad \therefore \quad \Delta V = -\frac{cV}{T} \Delta T$$

さらに、与えられていない V は状態方程式を用いて消去すると、

$$\Delta V = -\frac{c}{T} \cdot \frac{RT}{P} \cdot \Delta T = -\frac{cR}{P} \times \Delta T \quad \cdots (3)$$

(オ) 式 (3) を式 (1) に代入すると、

$$Q = cR\Delta T + P \cdot \left(-\frac{cR}{P} \Delta T\right) = 0$$

(カ) A から B へ移動する過程で, $(\text{圧力}) \times (\text{体積})^{\frac{c+1}{c}} = \text{一定}$ および $(\text{温度}) \times (\text{体積})^{\frac{1}{c}} = \text{一定}$ より,

$$\begin{cases} P_B V_B^{\frac{c+1}{c}} = P_A V_A^{\frac{c+1}{c}} \\ T_B V_B^{\frac{1}{c}} = T_A V_A^{\frac{1}{c}} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{c+1}{c}} \\ \frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\frac{1}{c}} \end{cases}$$

これらより,

$$\frac{P_B}{P_A} = \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{c+1} \quad \therefore \quad T_B = T_A \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{1}{c+1}}$$

(キ) 圧力一定なので, 式 (1)' を用いることができ,

$$L = (c+1)R\Delta T_{BC} \quad \therefore \quad \Delta T_{BC} = \frac{L}{(c+1)R}$$

(ク) (キ) と式 (2) をふまえると,

$$\Delta V_{BC} = \frac{R}{P_B} \Delta T_{BC} = \frac{L}{P_B(c+1)} \quad \therefore \quad W_{BC} = P_B \Delta V_{BC} = \frac{L}{c+1}$$

(ケ) (カ), (キ) より,

$$T_C - T_A \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{1}{c+1}} = \frac{L}{(c+1)R} \quad \therefore \quad T_C = T_A \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{1}{c+1}} + \frac{L}{(c+1)R}$$

また, C から D へ移動する過程で, (カ) のときと同様に立式すると,

$$\begin{cases} P_A V_D^{\frac{c+1}{c}} = P_B V_C^{\frac{c+1}{c}} \\ T_D V_D^{\frac{1}{c}} = T_C V_C^{\frac{1}{c}} \end{cases} \quad \therefore \quad T_D = T_C \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1}{c+1}}$$

以上より,

$$T_D = T_A + \frac{L}{(c+1)R} \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1}{c+1}} \cdots L > 0 \text{ のとき, } T_D > T_A \text{ となる.}$$

(コ) 状態方程式を用いて, $T_D > T_A$ を書き換えると,

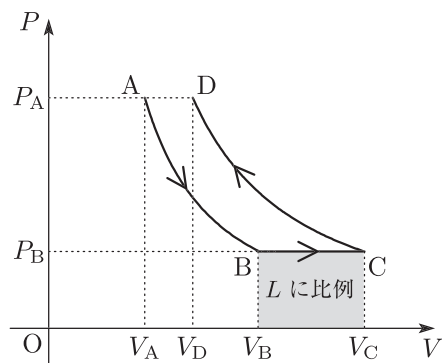
$$\frac{P_A V_D}{R} > \frac{P_A V_A}{R} \quad \therefore \quad V_D > V_A$$

D における体積は, A での体積より大きい. $\rightarrow \textcircled{3}$

(サ) (ケ) で $L = 0$ のとき $T_D = T_A$ なので $\Delta U_{AD} = 0$ となる. またこのとき, 全過程で断熱なので, 気塊がする仕事も 0 となる. $\rightarrow \textcircled{2}$

《解説》

本問は表立ってグラフを与えられておらず、またグラフを描くことも要求されていない。しかし、本問で考えている状態変化の全体像をつかむためには $P-V$ グラフを描くことが効果的である。本問のように「考察をすすめるための道具」として自分でグラフを活用する問題も、グラフに関連した問題の1つのタイプと言えよう。



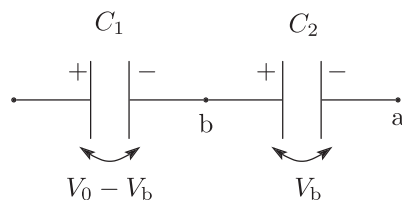
【2】

《解答》

スイッチ S の特性より, $|V_b| \leq V_g$ である. また, スイッチ S を通過して b 側に n 個の電子が流入したとき, b 点につながった 2 枚の極板の合計の電荷は,

$$-ne = -C_1(V_0 - V_b) + C_2V_b$$

$$\therefore V_b = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V_0 - \frac{ne}{C_1 + C_2} \quad \dots (*)$$



(1)

$$\begin{cases} V_b = \frac{Q_2}{C_2} \\ V_0 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \end{cases}$$

(2) (*) で, $n = 0$ のとき,

$$V_b = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V_0 \quad \therefore A = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

(3) $-Q_1 + Q_2 = -e$

(4) (*) で, $V_0 = \frac{V_g}{A}$ かつ $n = 1$ のとき,

$$V_b = A \cdot \frac{V_g}{A} - \frac{e}{C_1 + C_2} = V_g - \frac{e}{C_1 + C_2}$$

(5) (*) で, $n = 1$ のとき,

$$V_b = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V_0 - \frac{e}{C_1 + C_2} \quad \therefore (\text{グラフの傾き}) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

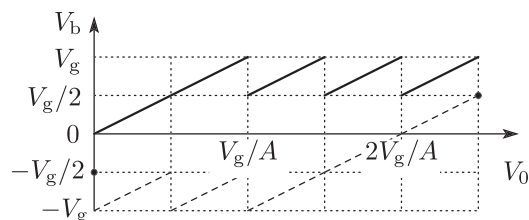
(6) $V_g = \frac{2e}{C_1 + C_2}$ のとき, (*) より,

$$V_b = AV_0 - \frac{V_g}{2} \cdot n \quad \dots (*)'$$

スイッチ S の特性より, $|V_b| \leq V_g$ なので, V_0 が増加していき $V_b = V_g$ に達するたびに電子 1 個が b 側に流入して V_b が $\frac{V_g}{2}$ だけ減少する.

よって, $n = 4$ となるまでの V_0 と V_b の関係を表すグラフは下図の実線で示される.

(7) (6) のときと同様に (*)' が成立する. 今度は, V_0 が減少していき $V_b = -V_g$ に達するたびに電子 1 個が b 側から流出して V_b が $\frac{V_g}{2}$ だけ増加するので, V_0 と V_b の関係を表すグラフは下図の破線で示される.



【3】

《解答》

- (a) 長さ $|x|$ で誘電体の入っていない部分と、長さ $2a - |x|$ で誘電体の入っている部分が並列なので、全体の電気容量 $C(x)$ は、

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{\varepsilon_0 \cdot a|x|}{d} + \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 \cdot a(2a - |x|)}{d} \\ &= \frac{\varepsilon_0 a}{d} \left\{ 2\varepsilon_r a - (\varepsilon_r - 1)|x| \right\} \end{aligned}$$

- (b) $C(x)$ が最大となる $x = 0$ のとき、電圧は最小となる。 $x = -a$ と $x = 0$ における電荷の保存より、

$$\frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 a^2}{d} \cdot \frac{2}{3} V_0 = \frac{(\varepsilon_r + 1)\varepsilon_0 a^2}{d} \cdot V_0 \quad \therefore \varepsilon_r = 3$$

- (c) 誘電体の移動がゆっくりなので、極板間電圧は V_0 とみなすことができ、 $0 < x < a$ では、

$$\begin{cases} W(x) = \frac{1}{2} C(x) V_0^2 = \frac{\varepsilon_0 a V_0^2}{2d} \left\{ 2\varepsilon_r a - (\varepsilon_r - 1)x \right\} \\ Q(x) = C(x) V_0 = \frac{\varepsilon_0 a V_0}{d} \left\{ 2\varepsilon_r a - (\varepsilon_r - 1)x \right\} \end{cases}$$

誘電体が位置 x まで移動する間に電池を上向きに通過する電荷は $Q(x) - Q(0)$ なので、

$$U(x) = \left\{ Q(x) - Q(0) \right\} V_0 = -\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{d} x$$

- (d) エネルギーの収支を表す式は $\Delta W = \Delta U + F(x)\Delta x$ なので、

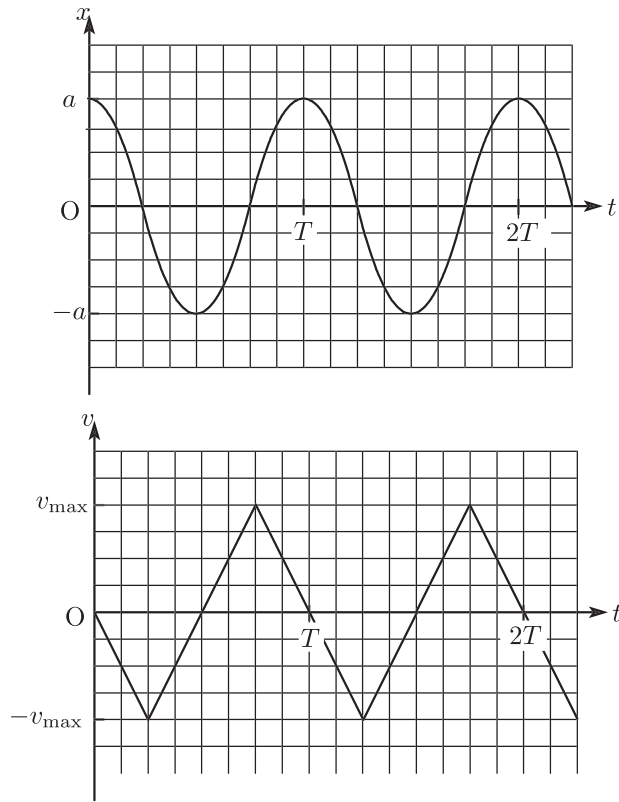
$$-\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2d} \Delta x = -\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{d} \Delta x + F(x)\Delta x$$

$$\therefore F(x) = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2d}$$

- (e) (d) より、誘電体に作用する電気力は大きさが $\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2d}$ で、向きは $x = 0$ からのずれと逆向きと分かる。これをふまえると、運動方程式は、

$$\begin{aligned} x > 0 \text{ のとき } \dots m \frac{dv}{dt} &= -\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2d} & \therefore \frac{dv}{dt} &= -\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2md} \\ x < 0 \text{ のとき } \dots m \frac{dv}{dt} &= +\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2d} & \therefore \frac{dv}{dt} &= +\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2md} \end{aligned}$$

これらと初期条件をふまえると、位置 x と速度 v の時間変化のグラフはそれぞれ下図のようになる。



ここで, $0 \leq t < \frac{T}{4}$ での運動に注目すると,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}v_{\max} \cdot \frac{T}{4} = -a \\ -v_{\max} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 a V_0^2}{2md} \cdot \frac{T}{4} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} T = \frac{8}{V_0} \sqrt{\frac{md}{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0}} \\ v_{\max} = aV_0 \sqrt{\frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0}{md}} \end{cases}$$

【4】

《解答》

- (1) (ア) 極板 A と A' の距離は $d - x$, 極板 B と B' の距離は $2d + x$ なので, 各コンデンサーの容量は,

$$\begin{cases} \text{コンデンサー } C_A \cdots C_A = \frac{\varepsilon_0 S}{d - x} \\ \text{コンデンサー } C_B \cdots C_B = \frac{\varepsilon_0 \cdot 2S}{2d + x} \end{cases}$$

- (イ) コンデンサー C_A, C_B の電荷はともに Q なので,

$$U(x) = \frac{Q^2}{2C_A} + \frac{Q^2}{2C_B} = \frac{Q^2(4d - x)}{4\varepsilon_0 S}$$

- (ウ) 静電気力のする仕事と静電エネルギーの関係 $\Delta U = -F \Delta x$ より,

$$\begin{aligned} -\frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S} \Delta x &= -F \Delta x \\ \therefore F &= \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S} \\ \therefore |F| &= \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S} \end{aligned}$$

- (エ) $F > 0$ なので, 静電気力は x 軸の正の向きに作用する.

- (オ) 力のつり合いより,

$$0 = \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S} - kx_0 \quad \therefore x_0 = \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 kS}$$

- (カ) 位置 x における運動方程式は,

$$m\ddot{x} = \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 S} - kx \quad \therefore \ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - x_0)$$

H の運動は振動中心 $x = x_0$, 角振動数 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ($= \omega$ とする) の単振動で, 初期条件を満たす解は,

$$x(t) = x_0 - x_0 \cos(\omega t) \quad \therefore x_{\max} = 2x_0 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 kS}$$

(キ) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

- (ク) $Q = Q_0$ のとき, $x_{\max} = d$ となるので,

$$\frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 kS} = d \quad \therefore Q_0 = \sqrt{2\varepsilon_0 kSd}$$

(2) H が $x_{\max} = d$ に達して極板 A と A' が接触し, C_A の電荷が 0 になった後では,

$$U(x) = \frac{Q_0^2}{2C_B} = \frac{Q_0^2(2d+x)}{4\varepsilon_0 S}$$

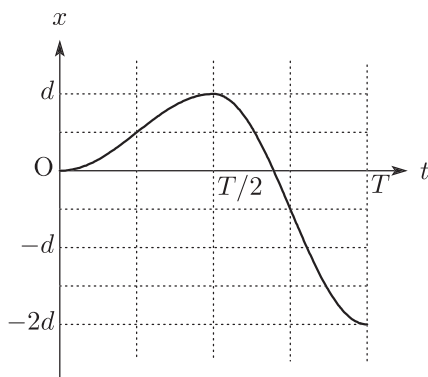
(ウ) のときと同様に, $\Delta U = -F\Delta x$ より,

$$\frac{Q_0^2}{4\varepsilon_0 S} \Delta x = -F\Delta x \quad \therefore \quad F = -\frac{Q_0^2}{4\varepsilon_0 S} = -\frac{1}{2}kd$$

これをふまえると, 運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}kd - kx \quad \therefore \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}\left(x + \frac{d}{2}\right)$$

H の運動は振動中心 $x = -\frac{d}{2}$, 角振動数 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ の単振動となる. $x_{\max} = d$ に達する前の運動と合わせると, H の運動を表すグラフは下図のようになる.



【5】

《解答》

(1) g

(2) まず，磁束の定義式より， $[\text{Wb}] = [\text{T} \cdot \text{m}^2]$

次に，電流が磁場から受ける力の表式より， $[\text{N}] = [\text{A} \cdot \text{T} \cdot \text{m}]$

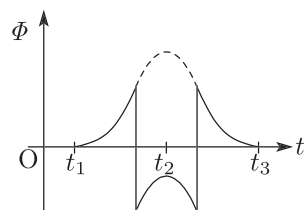
また，運動方程式より， $[\text{N}] = [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2]$

これらを組み合わせると，磁束の単位 Wb は以下のように d となる．

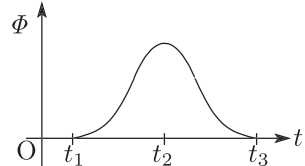
$$\begin{aligned} [\text{Wb}] &= [\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m})] \cdot [\text{m}^2] \\ &= [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2] \cdot [\text{m}/\text{A}] \\ &= [\text{kg} \cdot \text{m}^2/(\text{A} \cdot \text{s}^2)] = [\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}] \end{aligned}$$

(3) V の符号が $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ の符号と反対なので，a と c が正しい．

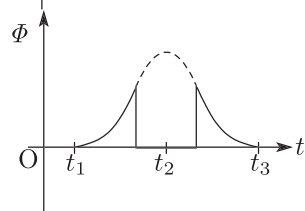
(4) 図 4 の a の形とすると，コイルを下向きに貫く磁束は右図のように変化する．よって，この場合に発生する起電力の時間変化を表すグラフは g となる．



(5) 図 4 の b の形とすると，コイルを下向きに貫く磁束は右図のように変化する．よって，この場合に発生する起電力の時間変化を表すグラフは c となる．



(6) 図 4 の c の形とすると，コイルを下向きに貫く磁束は右図のように変化する．よって，この場合に発生する起電力の時間変化を表すグラフは e となる．



(7) 図 6 で $t = 0.34 \text{ s}$ に磁石の N 極がコイルを通過し， $t = 0.37 \text{ s}$ に磁石の S 極がコイルを通過したとみなすと，この間の落下距離は，

$$\frac{1}{2} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.37 \text{ s})^2 - \frac{1}{2} \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times (0.34 \text{ s})^2 \approx 0.10 \text{ m}$$

よって，磁石の長さを表すのは c と推定できる．

(8) b

添削課題

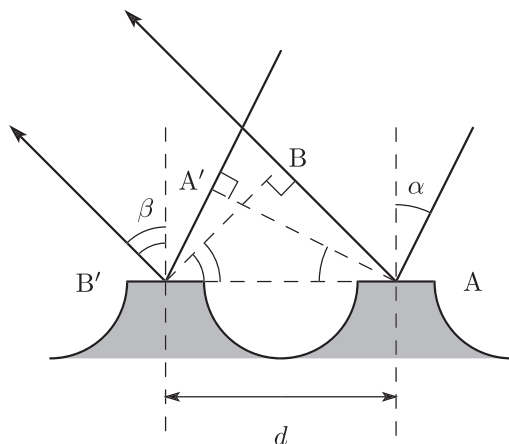
《解答》

(1) 図のように A, A', B, B' をとる. 隣り合う平らな部分で回折する光の経路差は,

$$\overline{A'B'} - \overline{AB} = d \sin \alpha - d \sin \beta$$

また, A, B' での反射により位相はともに π 変化して相殺するので, 強め合う条件は,

$$d(\sin \alpha - \sin \beta) = n\lambda$$



(2) (1) より,

$$\sin \beta = \sin \alpha - \frac{n\lambda}{d} \quad \dots (*)$$

ここでの数値を代入すると,

$$\sin \beta = \sin 30^\circ - \frac{n \cdot 5 \times 10^{-7}}{1 \times 10^{-6}} = \frac{1-n}{2}$$

これを満たすのは $n = -1 \sim 3$ の場合で, それぞれに対応する β を求めると,

$$(n, \beta) = (-1, 90^\circ), (0, 30^\circ), (1, 0^\circ), (2, -30^\circ), (3, -90^\circ)$$

(3) 紫の光では, $\lambda = 4 \times 10^{-7} \text{m}$ となる. このとき, (2) と同様に (*) より,

$$\sin \beta = \sin 30^\circ - \frac{n \cdot 4 \times 10^{-7}}{1 \times 10^{-6}} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}n$$

$n = -1$ の回折光では,

$$\sin \beta = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot (-1) = \frac{9}{10} \quad \dots \quad \beta \text{ は } 90^\circ \text{ よりもやや小さい.}$$

$n = 0$ の回折光では,

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \beta = 30^\circ$$

$n = 1$ の回折光では,

$$\sin \beta = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{1}{10} \quad \cdots \quad \beta \text{は } 0^\circ \text{ よりもやや大きい.}$$

これらと (2) を表にまとめると, 次のようになる.

光の色	n	スクリーン上の位置
緑	-1	A
	0	C
	1	E
紫	-1	B
	0	C
	1	D

- (4) 白熱電球の光を入射した場合は, C に近い側が短波長で C から遠い側が長波長となる連続スペクトルが得られる. これに対して, ナトリウムランプは単色光なので, この光を入射した場合は線スペクトルが得られる. なお, C に届く光は通常の反射光に相当していて, どの波長の光でも C では強め合う. このため, 白熱電球の光を入射した場合でも, C に届く光は分光されない.

配点

100 点

各 25 点

4章 総合演習 (4)

問題

■演習

【1】

《解答》

$$(1) q = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V$$

$$(2) \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$(3) \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot V^2$$

(4) 電池 B_1 のした仕事 W は,

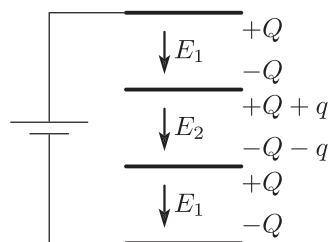
$$W = qV = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot V^2$$

(3) の結果を U , 抵抗で発生した熱量を H として, エネルギーの保存より,

$$W = U + H \quad \therefore H = W - U = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{2d}$$

(5) 金属板表面の電荷は右図のようになるので, 各領域に生じる電界の強さは,

$$\begin{cases} \text{KL 間及び MN 間} \cdots E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \\ \text{LM 間} \cdots E_2 = \frac{Q+q}{\varepsilon_0 A} \end{cases}$$

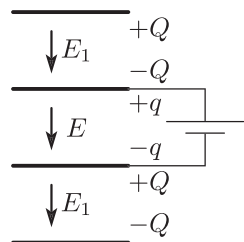


(6) 回路の方程式より, 電池 B_2 の起電力 V' は,

$$\begin{aligned} V' &= E_1(D-d) + E_2d \\ &= \frac{QD+qd}{\varepsilon_0 A} \end{aligned}$$

(7) 金属板 L と M で構成されたコンデンサーの電荷が q に戻るので, 各表面の電荷は右図のようになり,

$$q' = (-Q) + q = q - Q$$

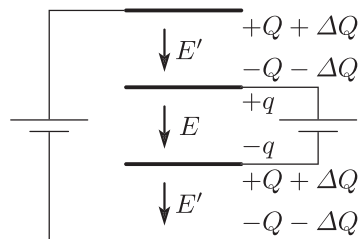


(8) (5) と同様に, 各領域に生じる電界の強さは,

$$\begin{cases} \text{KL 間及び MN 間} \cdots E' = \frac{Q+\Delta Q}{\varepsilon_0 A} \\ \text{LM 間} \cdots E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \end{cases}$$

(6) と同様に, 回路の方程式より,

$$\begin{aligned} V' &= E'(D-d) + Ed \\ &= \frac{(Q+\Delta Q)(D-d) + qd}{\varepsilon_0 A} \end{aligned}$$



これと (6) より,

$$\frac{(Q + \Delta Q)(D - d) + qd}{\varepsilon_0 A} = \frac{QD + qd}{\varepsilon_0 A} \quad \therefore \quad \Delta Q = \frac{d}{D - d} Q$$

このとき, 金属板 L の電荷の変化分は,

$$\Delta q' = -\Delta Q = -\frac{d}{D - d} Q$$

【2】

《解答》

以下、容量 C のコンデンサーを「 C 」、容量 $2C$ のコンデンサーを「 $2C$ 」とよぶものとする。

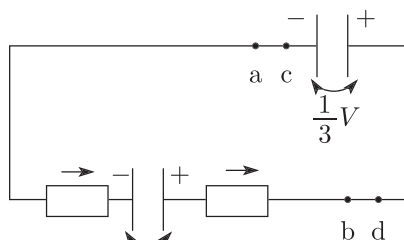
- (1) ① C の電荷を q_1 、 $2C$ の電荷を Q_1 とする。電位差の関係と電荷の保存より、

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C} + \frac{Q_1}{2C} = V \\ +q_1 - Q_1 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} q_1 = \frac{2}{3} \times CV \\ Q_1 = \frac{2}{3} \times CV \end{cases}$$

- ② 全静電エネルギーを U_1 とすると、

$$U_1 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{Q_1^2}{2 \cdot 2C} = \frac{1}{3} \times CV^2$$

- (2) ③ ① をふまえると、回路 II のように接続した直後に 2 つのコンデンサーの電位差は右図のようになるので、電流の向きは d.



- ④ C の右極板の電荷を q_2 、 $2C$ の右極板の電荷を Q_2 とする。電位差の関係と電荷の保存より、

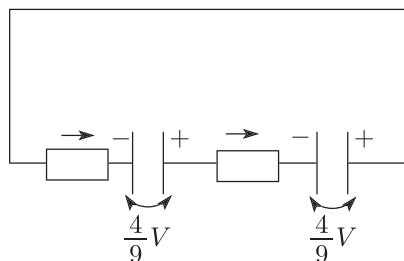
$$\begin{cases} \frac{q_2}{C} = \frac{Q_2}{2C} \\ +q_2 + Q_2 = +q_1 + Q_1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} q_2 = \frac{4}{9} \times CV \\ Q_2 = \frac{8}{9} \times CV \end{cases}$$

- ⑤ 全静電エネルギーを U_2 とすると、

$$U_2 = \frac{q_2^2}{2C} + \frac{Q_2^2}{2 \cdot 2C} = \frac{8}{27} \times CV^2$$

$$⑥ \quad U_1 - U_2 = \frac{1}{27} \times CV^2$$

- (3) ⑦ ④ をふまえると、回路 III のように接続した直後に、2 つのコンデンサーの電位差は右図のようになるので、電流の向きは d.



- ⑧ C の左極板の電荷を q_3 、 $2C$ の右極板の電荷を Q_3 とする。電位差の関係と電荷の保存より、

$$\begin{cases} \frac{q_3}{C} = \frac{Q_3}{2C} \\ +q_3 + Q_3 = -q_2 + Q_2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} q_3 = \frac{4}{27} \times CV \\ Q_3 = \frac{8}{27} \times CV \end{cases}$$

$$⑨ \quad 0 - \frac{q_3}{C} = -\frac{4}{27} \times V$$

- ⑩ 全静電エネルギーを U_3 とすると、

$$U_3 = \frac{q_3^2}{2C} + \frac{Q_3^2}{2 \cdot 2C} = \frac{8}{243} \times CV^2$$

【3】

《解答》

- (1) ローレンツ力が右図のように作用するので、運動方程式は、

$$\begin{cases} ma_x = -ev_y B \\ ma_y = +ev_x B \end{cases}$$

- (2) z 方向で作用する力のつりあいより、

$$N = mg \cos \theta + ev_x B \sin \theta$$

- (3) (1) の図で B が $B \cos \theta$ に置き換わり、 y 方向では重力も作用するので、運動方程式は、

$$\begin{cases} ma_x = -ev_y B \cos \theta \\ ma_y = +ev_x B \cos \theta - mg \sin \theta \end{cases}$$

- (4) $v_y = 0$ に保たれるとき、(3) で $a_y = 0$ なので、

$$0 = ev_0 B \cos \theta - mg \sin \theta \quad \therefore \quad v_0 = \frac{mg \sin \theta}{eB \cos \theta}$$

- (5) 初期条件 $v_x(0) = v_1$ より、

$$v_0 + w_x(0) = v_1 \quad \therefore \quad w_x(0) = v_1 - v_0$$

最高点では $w_x = -(v_1 - v_0)$ となるので、

$$v_x = v_0 + \{-(v_1 - v_0)\} = 2v_0 - v_1$$

- (6) 速さ v_0 で移動する中心の周りで円運動する周期は、与えられた周期の表式に含まれている B を $B \cos \theta$ で置き換えたものなので、半周する時間を t とすると、

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi m}{eB \cos \theta} = \frac{\pi m}{eB \cos \theta}$$

半周する間の中心の変位と質点の x 方向の変位は等しいので、

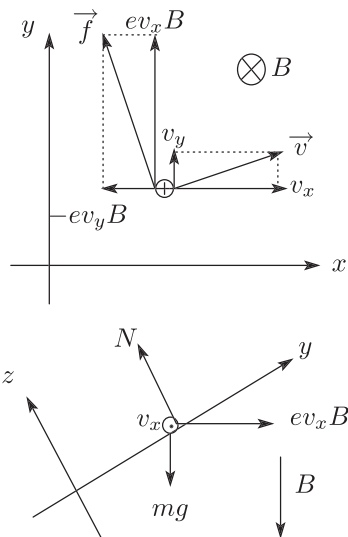
$$x = v_0 t = \frac{\pi m v_0}{eB \cos \theta}$$

円運動の半径を r とすると、円運動の速さが $v_1 - v_0$ なので、

$$2\pi r = (v_1 - v_0) \cdot \frac{2\pi m}{eB \cos \theta} \quad \therefore \quad r = \frac{m(v_1 - v_0)}{eB \cos \theta}$$

最高点の y 座標は、

$$y = 2r = \frac{2m(v_1 - v_0)}{eB \cos \theta}$$



【4】

《解答》

- I (1) 微小時間 Δt での磁束変化 $\Delta\Phi$ は $\Delta\Phi = B \cdot lv_0\Delta t$ なので、上から見て反時計回りを正とする起電力 V は、

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -Blv_0 \quad \dots \quad \text{時計回りを正として } Blv_0$$

このとき、回路の方程式は、

$$Blv_0 = RI_0 \cdot 2 \quad \therefore \quad I_0 = \frac{Blv_0}{2R}$$

- (2) 微小時間 Δt での磁束変化 $\Delta\Phi_1$, $\Delta\Phi_2$ は、

$$\begin{cases} \text{棒 1 の移動による変化} & \dots & \Delta\Phi_1 = -B \cdot lu\Delta t \\ \text{棒 2 の移動による変化} & \dots & \Delta\Phi_2 = +B \cdot lv\Delta t \end{cases}$$

上から見て反時計回りを正とする起電力は、

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = +Blu \\ V_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -Blv \quad \dots \quad \text{時計回りを正として } Blv \end{cases}$$

上から見て反時計回りを正として、流れる電流を I とすると、回路の方程式は、

$$Blu - Blv = RI \cdot 2 \quad \therefore \quad I = \frac{Bl(u-v)}{2R}$$

このとき、棒 1 と棒 2 が磁場から受ける力は、

$$\begin{cases} F_1 = -IBl = -\frac{B^2l^2(u-v)}{2R} \\ F_2 = +IBl = +\frac{B^2l^2(u-v)}{2R} \end{cases}$$

- II (1) 回路の方程式は、

$$Blu + Blv = RI \cdot 2 \quad \therefore \quad I = \frac{Bl(u+v)}{2R}$$

- (2) P と Q' の電位は等しいので、P' を基準とする Q' の電位を求めればよく、その値は、

$$+Blv - RI = \frac{1}{2}Bl(v-u)$$

- III 電流の符号と速度の増減の対応は以下ようになる。

$$\begin{cases} \text{① } I > 0 \text{ のとき} & \dots & \text{力は } y \text{ 軸負方向に作用して減速する.} \\ \text{② } I = 0 \text{ のとき} & \dots & \text{力は作用しないので変わらない.} \\ \text{③ } I < 0 \text{ のとき} & \dots & \text{力は } y \text{ 軸正方向に作用して加速する.} \end{cases}$$

この対応をふまえることにより,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{(a) のとき} & \cdots & I = 0 \text{ なので (ウ)} \\ \text{(b) のとき} & \cdots & I > 0 \text{ なので (イ)} \\ \text{(c) のとき} & \cdots & I = 0 \text{ なので (ウ)} \\ \text{(d) のとき} & \cdots & I = 0 \text{ なので (ウ)} \end{array} \right.$$

【5】

《解答》

(1) 微小時間 Δt での磁束変化 $\Delta\Phi$ は,

$$\Delta\Phi = +B \cdot Lv_2\Delta t - B \cdot Lv_1\Delta t$$

上から見て反時計回りを正とする起電力 V は,

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BL(v_1 - v_2)$$

このとき, 回路の方程式は,

$$BL(v_1 - v_2) = RI \cdot 2 \quad \therefore \quad I = \frac{BL}{2R} \times (v_1 - v_2)$$

$$(2) \quad \begin{cases} F_1 = -IBL \\ F_2 = +IBL \end{cases}$$

(3) F_1, F_2 の力積は, 大きさが等しく逆向きで, 合計が 0 であるから.

(4) 求める速度を v_{1f}, v_{2f} とする. 運動量の保存と磁場から受ける力が 0 であることより,

$$\begin{cases} m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_0 \\ \frac{B^2L^2}{2R}(v_{1f} - v_{2f}) = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 \\ v_{2f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 \end{cases}$$

(5) 運動量と力積の関係および電流の定義より,

$$\begin{cases} \Delta P_2 = IBL \cdot \Delta t \\ \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I \end{cases} \quad \therefore \quad \frac{\Delta P_2}{\Delta Q} = BL(\text{一定})$$

(6) $v_2 = 0$ から v_{2f} になる過程で, (5) より,

$$\frac{m_2v_{2f} - 0}{Q} = BL \quad \therefore \quad Q = \frac{m_2}{BL} \cdot \frac{m_1v_0}{m_1 + m_2}$$

(7) (1) と電流の定義より,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{BL}{2R}(v_1 - v_2) \quad \therefore \quad \frac{(v_1 - v_2)\Delta t}{\Delta Q} = \frac{2R}{BL}(\text{一定})$$

よって, A_1, A_2 が接触する限界のときは,

$$\frac{d_c}{Q} = \frac{2R}{BL} \quad \therefore \quad d_c = \frac{2RQ}{BL}$$

【6】

《解答》

I. 問 1 $\frac{\omega BDL}{2} \cos \omega t$

問 2 $I_{ac} = \frac{\omega BDL}{R} \cos \omega t, \quad P_{ac} = \frac{(\omega BDL)^2}{R} \cos^2 \omega t$

問 3 $P = \frac{(\omega BDL)^2}{R}$

問 4 $F_I = \frac{2P}{\omega D}$

II. 問 5 $|M| = IBLD \cos \phi$

問 6 $F_{II} = 2IBL \cos \phi$

問 7 $P_M = RI^2 + \omega BDLI \cos \phi$

《解説》

問 1 右図で、速度の磁場に垂直な成分 v_a は、

$$v_a = \frac{\omega D}{2} \cos \omega t$$

$$\therefore V_a = v_a BL = \frac{\omega BDL}{2} \cos \omega t$$

問 2 同様に、

$$V_c = \frac{\omega BDL}{2} \cos \omega t$$

$$\therefore I_{ac} = \frac{V_a + V_c}{R} = \frac{\omega BDL}{R} \cos \omega t$$

$$\therefore P_{ac} = (V_a + V_c) \times I_{ac} = \frac{(\omega BDL)^2}{R} \cos^2 \omega t$$

問 3

$$V_b = V_d = \frac{\omega BDL}{2} \sin \omega t$$

$$\therefore I_{bd} = \frac{V_b + V_d}{R} = \frac{\omega BDL}{R} \sin \omega t$$

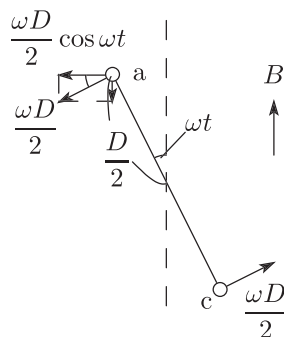
$$\therefore P_{bd} = (V_b + V_d) \times I_{bd} = \frac{(\omega BDL)^2}{R} \sin^2 \omega t$$

回転子全体では、

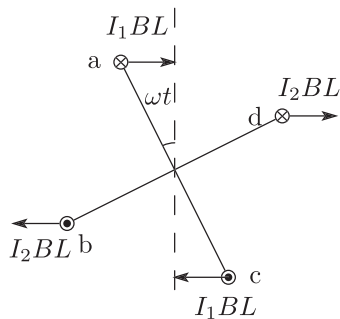
$$P = P_{ac} + P_{bd} = \frac{(\omega BDL)^2}{R}$$

問 4 仕事率について、

$$F_I \times \frac{\omega D}{2} = P \quad \therefore F_I = \frac{2P}{\omega D}$$



問 5 各部分に作用する力は下図. 力のモーメント M は, 反時計まわりを正として,



$$\begin{aligned}
 M &= 2 \times (-I_1 BL) \times \frac{D}{2} \cos \omega t + 2 \times (-I_2 BL) \times \frac{D}{2} \sin \omega t \\
 &= IBLD \{ \cos(\omega t - \phi) \cdot \cos \omega t + \sin(\omega t - \phi) \cdot \sin \omega t \} \\
 &= IBLD \cos \phi \\
 \therefore |M| &= IBLD \cos \phi
 \end{aligned}$$

問 6 反時計まわりを正として,

$$0 = M - F_{II} \times \frac{D}{2} \quad \therefore F_{II} = \frac{2M}{D} = 2IBL \cos \phi$$

問 7 電流回路の方程式は,

$$RI_1 = V_1 + (V_a + V_c), \quad RI_2 = V_2 + (V_b + V_d)$$

よって,

$$V_1 = RI_1 - (V_a + V_c) = RI_1 - \omega BDL \cos \omega t$$

$$V_2 = RI_2 - (V_b + V_d) = RI_2 - \omega BDL \sin \omega t$$

必要な電力 P_M は,

$$\begin{aligned}
 P_M &= V_1 I_1 + V_2 I_2 \\
 &= RI^2 + \omega BDLI \cos \phi
 \end{aligned}$$

■自習

【1】

《解答》

- (a) 半径 r の球内に存在する電荷は $Q(r) = -\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ なので、原点 O から距離 r の位置における電場の大きさは、

$$E(r) = \left| \frac{k_0 Q(r)}{r^2} \right| = \frac{4}{3}\pi k_0 \rho r$$

よって、荷電粒子が受ける力の大きさは、

$$\begin{aligned} F(r) &= qE(r) \\ &= \frac{4}{3}\pi k_0 \rho q r \quad \therefore \quad C = \frac{4}{3}\pi k_0 \rho q \end{aligned}$$

(b) $U(r) = \frac{1}{2}Cr^2$

- (c) 絶縁体球の表面で速さ 0 となるときの、エネルギーの保存より、

$$0 + \frac{1}{2}CR^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \quad \therefore \quad v_0 = R\sqrt{\frac{C}{m}}$$

- (d) エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}CR^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \quad \therefore \quad v = \sqrt{v_1^2 - \frac{CR^2}{m}}$$

- (e) 時計回りに円運動するとき、角速度の大きさを ω_1 とすると、運動方程式の向心成分は、

$$mr\omega_1^2 = Cr + q \cdot r\omega_1 \cdot B \quad \therefore \quad \omega_1 = \frac{qB}{2m} + \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \frac{C}{m}}$$

また、反時計回りに円運動するとき、角速度の大きさを ω_2 とすると、運動方程式の向心成分は、

$$mr\omega_2^2 = Cr - q \cdot r\omega_2 \cdot B \quad \therefore \quad \omega_2 = -\frac{qB}{2m} + \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \frac{C}{m}}$$

- (f) (e) より、時計回りを正とする角速度は、

$$\begin{cases} \text{時計回りのとき} \cdots \omega_1 = \frac{qB}{2m} + \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \frac{C}{m}} \\ \text{反時計回りのとき} \cdots -\omega_2 = \frac{qB}{2m} - \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \frac{C}{m}} \end{cases}$$

(1) $\Omega = \frac{qB}{2m}$

(2) $\omega' = \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \frac{C}{m}}$

(3) Ω, ω' を用いて, (e) の運動方程式を書き換えると,

$$mr(\Omega \pm \omega')^2 = Cr + qBr(\Omega \pm \omega')$$

(1) を考慮して整理すると, 観測者 K から見た運動方程式としては,

$$mr\omega'^2 = Cr + qBr\Omega - mr\Omega^2$$

右辺に現れた力のうち, 遠心力 $mr\Omega^2$ を除いた部分が電場による力なので,

$$\begin{aligned} C'r &= Cr + qBr\Omega \\ &= (C + qB\Omega)r \quad \therefore \quad C' = C + \frac{q^2 B^2}{2m} \end{aligned}$$

【2】

《解答》

- (1) (イ) コイル L_n と重なっている磁石の長さは $b - (Vt - b)$ なので、コイル L_n を貫く磁束は、

$$\Phi_2 = B \cdot a[b - (Vt - b)] = Ba(2b - Vt)$$

- (ロ) コイル L_n を貫く磁束が $\Phi_1 = BaVt$ のとき、上から見て時計回りを正とした起電力は、

$$E_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -BaV$$

電流を I とすると、回路の方程式は、

$$-BaV = RI_1 \quad \therefore I_1 = -\frac{BaV}{R}$$

- (ハ) コイル L_n を貫く磁束が(イ)のとき、(ロ)と同様に起電力は、

$$E_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = +BaV$$

このとき、回路の方程式は、

$$BaV = RI_2 \quad \therefore I_2 = \frac{BaV}{R}$$

- (ニ) (ロ)の電流が流れるとき、コイル L_n の上側の辺が磁場から下向きの力を受けるので、

$$f_1 = (-I_1) \cdot Ba = \frac{B^2 a^2 V}{R}$$

- (ホ) (ハ)の電流が流れるとき、コイル L_n の下側の辺が磁場から下向きの力を受けるので、

$$f_2 = I_2 Ba = \frac{B^2 a^2 V}{R}$$

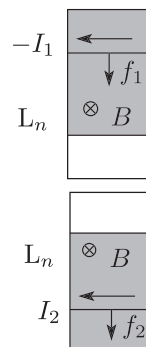
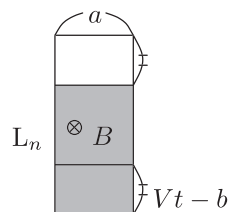
- (ヘ) 磁石と重なっている2つのコイルが受ける力の反作用の力を磁石は受けるので、

$$F = (-f_1) + (-f_2) = -\frac{2B^2 a^2}{R} V \quad \therefore C = \frac{2B^2 a^2}{R}$$

- (ト) 速さが V で一定のとき、磁石の運動方程式は、

$$m \cdot 0 = mg \sin \theta - \frac{2B^2 a^2}{R} V \quad \therefore V = \frac{mgR \sin \theta}{2B^2 a^2} \left(= \frac{mg \sin \theta}{C} \right)$$

- (2) (チ) $m \frac{\Delta v}{\Delta t} = mg \sin \theta - Cv(t)$



(リ) (へ), (ト) を用いて (チ) を書き換えると,

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = CV - Cv(t) \quad \therefore \quad m \frac{\Delta v}{\Delta t} = Cw(t)$$

また, $\frac{\Delta w}{\Delta t} = -\frac{\Delta v}{\Delta t}$ なので,

$$m \cdot \left(-\frac{\Delta w}{\Delta t} \right) = Cw(t) \quad \therefore \quad \frac{\Delta w}{\Delta t} = -\frac{C}{m} \times w$$

(ヌ) 初期条件 $v(0) = 0$ より,

$$w(0) = V - v(0) = V \quad \therefore \quad w(t) = Ve^{-\frac{C}{m}t}$$

$w(t) = V - v(t)$ なので,

$$Ve^{-\frac{C}{m}t} = V - v(t) \quad \therefore \quad v(t) = V \left(1 - e^{-\frac{C}{m}t} \right)$$

(ル) $w(t_0) = \frac{V}{e}$ より,

$$Ve^{-\frac{C}{m}t_0} = V \cdot e^{-1} \quad \therefore \quad t_0 = \frac{m}{C} \left(= \frac{mR}{2B^2a^2} \right)$$

(a) (ト) に数値を代入すると,

$$V = \frac{2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1.0 \times 10^{-3} \Omega \cdot 0.80}{2 \cdot (0.50 \text{ T})^2 \cdot (1.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 0.31 \text{ m/s}$$

(b) (へ) を (ル) に代入して, 数値を代入すると,

$$t_0 = \frac{2.0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot 1.0 \times 10^{-3} \Omega}{2 \cdot (0.50 \text{ T})^2 \cdot (1.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 4.0 \times 10^{-2} \text{ s}$$

【3】

《解答》

$$(1) 0 = (x + y)N_Y - x \cdot mg$$

$$(2) 0 = y \cdot mg - (x + y)N_X$$

$$(3) \frac{y}{x + y}mg$$

$$(4) \frac{x}{x + y}mg$$

$$(5) f = \mu' N_Y = \mu' \frac{x_0}{x_0 + y}mg$$

$$(6) \mu N_X = \mu \frac{y}{x_0 + y}mg$$

(7) 支点 X が滑り出す直前の $y = y_1$ のとき, $f = \mu N_X$ となるので,

$$\mu' \frac{x_0}{x_0 + y_1}mg = \mu \frac{y_1}{x_0 + y_1}mg \quad \therefore y_1 = \frac{\mu'}{\mu}x_0$$

(8) 支点 X が滑り出す直前について, (7) と同様に立式すると,

$$\mu' \frac{y_1}{x_1 + y_1}mg = \mu \frac{x_1}{x_1 + y_1}mg \quad \therefore x_1 = \frac{\mu'}{\mu}y_1$$

(9) (7) で x_0 を x_n に, y_1 を y_{n+1} に置き換えることにより, $y_{n+1} = \frac{\mu'}{\mu}x_n$

(10) (8) で x_1 を x_n に, y_1 を y_n に置き換えることにより, $x_n = \frac{\mu'}{\mu}y_n$

(11) (9), (10) をふまえると, x と y の関係を表すグラフは (d)

【4】

《解答》

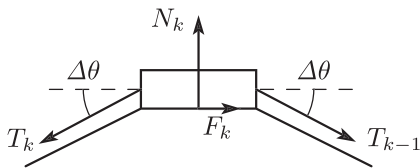
(1)

(a) $F_k = \mu N_k$

(b) $0 = N_k - T_k \sin \Delta\theta - T_{k-1} \sin \Delta\theta$

(c) $0 = T_k \cos \Delta\theta - T_{k-1} \cos \Delta\theta - \mu N_k$

(d) (b), (c) より N_k を消去すると,



$$0 = T_k \cos \Delta\theta - T_{k-1} \cos \Delta\theta - \mu(T_k \sin \Delta\theta + T_{k-1} \sin \Delta\theta)$$

$$\therefore \frac{T_k}{T_{k-1}} = \frac{1 + \mu \tan \Delta\theta}{1 - \mu \tan \Delta\theta}$$

(e) (d) をふまえると,

$$\frac{T_n}{T_0} = \frac{T_1}{T_0} \times \frac{T_2}{T_1} \times \frac{T_3}{T_2} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_{n-1}} = \left(\frac{1 + \mu \tan \Delta\theta}{1 - \mu \tan \Delta\theta} \right)^n$$

(2)

(f) $\Delta\theta = x$ とおくと,

$$\frac{\theta}{2n+1} = x \quad \therefore \quad n = \frac{\theta - x}{2x}$$

これを (e) に代入すると,

$$\frac{T_n}{T_0} = \left(\frac{1 + \mu \tan x}{1 - \mu \tan x} \right)^{\frac{\theta - x}{2x}} \quad \therefore \quad \log_e \frac{T_n}{T_0} = \frac{\theta - x}{2x} \log_e \left(\frac{1 + \mu \tan x}{1 - \mu \tan x} \right)$$

与えられた関係式を利用できる形に書き換えると,

$$\begin{aligned} \log_e \frac{T_n}{T_0} &= \frac{\theta}{2x} \{ \log_e (1 + \mu \tan x) - \log_e (1 - \mu \tan x) \} - \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + \mu \tan x}{1 - \mu \tan x} \right) \\ &= \frac{\mu\theta}{2} \cdot \frac{\tan x}{x} \left\{ \frac{1}{\mu \tan x} \log_e (1 + \mu \tan x) + \frac{1}{-\mu \tan x} \log_e (1 - \mu \tan x) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1 + \mu \tan x}{1 - \mu \tan x} \right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_n}{T_0} = \frac{Q}{P} \text{ なので,}$$

$$\log_e \frac{Q}{P} = \frac{\mu\theta}{2} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \log_e 1 \quad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\theta} \log_e \frac{Q}{P}$$

(g) $\theta = \pi$, $Q = 7P$ のとき, (f) より,

$$\mu = \frac{1}{\pi} \log_e 7 = \frac{1.95}{3.14} \doteq 0.62$$

【5】

《解答》

(1)(あ) $m\omega^2 x_1$

(い) $\overrightarrow{OA}$ 方向の力のつりあいより,

$$0 = -k(x_1 - x_0) + m\omega^2 x_1 \quad \therefore x_1 = \frac{kx_0}{k - m\omega^2}$$

(う) $x_1 \leq R$ であるためには,

$$\frac{kx_0}{k - m\omega^2} \leq R \quad \therefore k \geq \frac{mR\omega^2}{R - x_0}$$

(2)(え) 点 O からの距離が r のとき, 遠心力の大きさは $m\omega^2 r$ と表すことができ, この力のレール方向の成分の大きさは,

$$m\omega^2 r \cos \theta = m\omega^2 x_2$$

(お) レールに垂直方向の力のつりあいより,

$$0 = m\omega^2 r \sin \theta - N \quad \therefore N = m\omega^2 \cdot \frac{R}{2}$$

(か) $F_{\max} = \mu N = \frac{1}{2} \mu m R \omega^2 \dots x_2$ によらない.

(き) 静止摩擦力の大きさを F とすると, レールに平行方向の力のつりあいより,

$$0 = m\omega^2 x_2 - k(x_2 - x_0) + F \quad \therefore F = (k - m\omega^2)x_2 - kx_0$$

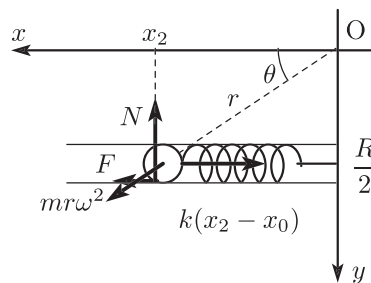
D に向かって滑り出す直前のとき, $F = F_{\max}$ なので,

$$(k - m\omega^2) \times (x_2 \text{ の上限}) - kx_0 = F_{\max} \quad \therefore (x_2 \text{ の上限}) = \frac{kx_0 + F_{\max}}{k - m\omega^2}$$

(3) 外部から見ると, 小球は選択肢の図で上向きに直進するが B は左側に動いていく. このため, 中心 O から見ると, 小球は AB から右側に外れていく. →(2)

(4) (3) と同様に考えると, 小球は CE から右側に外れていく. →(2)

(5) 円板から見た速度と点 E の回転速度の和が点 E における速度となり, レールから飛び出した後は直進する. →(3)



添削課題

《解答》

(a) 図(イ)のとき、磁場中の面積は、

$$S_1(t) = \frac{1}{2} \cdot 2vt \cdot vt = v^2 t^2$$

$$\therefore \Phi_1(t) = B \cdot S_1(t) = Bv^2 t^2$$

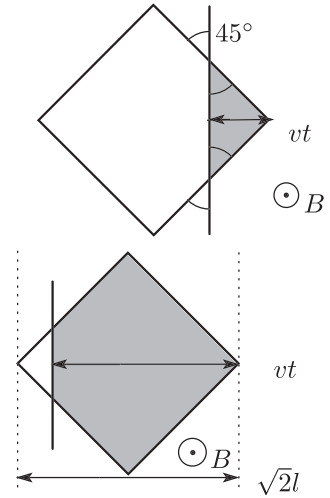
図(ウ)のとき、磁場中の面積は、

$$S_2(t) = l^2 - \frac{1}{2} \cdot 2(\sqrt{2}l - vt) \cdot (\sqrt{2}l - vt)$$

$$= l^2 - v^2 \left(t - \frac{\sqrt{2}l}{v} \right)^2$$

$$\therefore \Phi_2(t) = B \cdot S_2(t)$$

$$= Bl^2 - Bv^2 \left(t - \frac{\sqrt{2}l}{v} \right)^2$$



(b) 図(イ)のとき、反時計回りを正とする起電力は、

$$V_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -2Bv^2 t$$

$V_1 < 0$ なので、電流は時計回りに流れる。このときの回路の方程式は、

$$RI_1 = 2Bv^2 t \quad \therefore I_1 = \frac{2Bv^2 t}{R}$$

図(ウ)のとき、反時計回りを正とする起電力は、

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = 2Bv^2 \left(t - \frac{\sqrt{2}l}{v} \right)$$

$t < \frac{\sqrt{2}l}{v}$ なので $V_2 < 0$ であり、電流は時計回りに流れる。このときの回路の方程式は、

$$RI_2 = 2Bv^2 \left(\frac{\sqrt{2}l}{v} - t \right) \quad \therefore I_2 = \frac{2Bv^2}{R} \left(\frac{\sqrt{2}l}{v} - t \right)$$

(c) コイルの運動エネルギーが一定のとき、外力の仕事率は回路の消費電力と一致しているので、

$$fv = RI^2 \quad \therefore f = \frac{RI^2}{v}$$

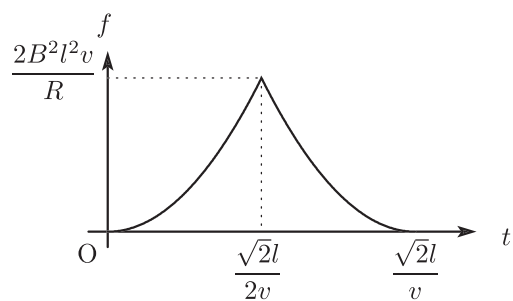
図(イ)のとき, $I = I_1$ なので,

$$f_1 = \frac{RI_1^2}{v} = \frac{4B^2v^3}{R}t^2$$

図(ウ)のとき, $I = I_2$ なので,

$$f_2 = \frac{RI_2^2}{v} = \frac{4B^2v^3}{R} \left(t - \frac{\sqrt{2}l}{v} \right)^2$$

これらを図示すると右のようになる.



配点

100 点

(a)30 点, (b)30 点, (c)40 点

5章 総合演習 (5)

問題

■演習

【1】

《解答》

I (1) コイルが落下すると、コイルを上向きに貫く磁束が減少するから、誘導起電力は上から見て反時計まわりの向きに生じる。よって、誘導電流の向きは (b) の向き。

(2) 微小時間 Δt の間の磁束変化は、

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= L^2C(z - v\Delta t) - L^2Cz \\ &= -L^2Cv\Delta t\end{aligned}$$

よって、上から見て反時計まわりを正とする起電力 V' は

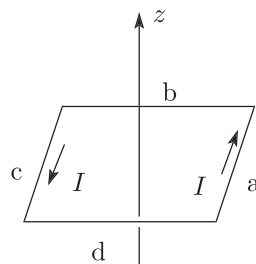
$$V' = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L^2Cv \quad \therefore V = |V'| = L^2Cv$$

このとき、回路の方程式は、

$$L^2Cv = RI \quad \therefore I = \frac{L^2Cv}{R}$$

II (1) コイルの各辺に右図のように記号を付けることにする。まず、b、dの電流は x 方向に流れているので、 B_x によって受ける力は0。次に、aの位置では $B_x = -C \cdot \frac{L}{2}$ なので、受ける力は上向きで、大きさを f_a とすると、

$$f_a = I \times C \cdot \frac{L}{2} \times L = \frac{L^4C^2v}{2R}$$



最後に、cの位置では $B_x = +C \cdot \frac{L}{2}$ なので、受ける力は上向きで、大きさを f_c とすると、

$$f_c = I \times C \cdot \frac{L}{2} \times L = \frac{L^4C^2v}{2R}$$

以上より、 B_x によってコイルが受ける力は上向きで、

$$|\vec{F}| = f_a + f_c = \frac{L^4C^2v}{R}$$

(2) まず、aの電流が B_z によって受ける力は x 軸正の向きに大きさ IB_zL 、cの電流が B_z によって受ける力は x 軸負の向きに大きさ IB_zL なので、これらの合力は0となる。同様に、bとdの電流が B_z によって受ける力の合力も0となる。以上より、 B_z によってコイルが受ける力は、

$$\vec{G} = \vec{0} \quad \therefore |\vec{G}| = 0$$

III (1) 一定速度 v_f で落下するとき, II の力 $\vec{F}$ と重力がつりあうので,

$$0 = -mg + \frac{L^4 C^2 v_f}{R} \quad \therefore \quad v_f = \frac{mgR}{L^4 C^2}$$

(2) 運動エネルギーは変化しないので, 位置エネルギーの減少分はすべてジュール熱に転化する.

【2】

《解答》

- I コイルに右図の電流 I を流す向きの自己誘導起電力を V とおくと、ネオンランプに電流が流れないときの回路の方程式は、

$$\begin{cases} 9.0 \text{ V} + V = 10 \Omega \cdot I + 35 \Omega \cdot I & \cdots \textcircled{1} \\ 9.0 \text{ V} = 10 \Omega \cdot I + V_A & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

- (1) スイッチを入れた直後は $I = 0 \text{ A}$ なので、 $\textcircled{2}$ より、

$$9.0 \text{ V} = 0 \text{ V} + V_A \quad \therefore V_A = +9.0 \text{ V}$$

- (2) I が一定で $\frac{dI}{dt} = 0 \text{ A/s}$ のとき、 $\textcircled{1}$ で $V = 0 \text{ V}$ なので、

$$9.0 \text{ V} + 0 \text{ V} = 45 \Omega \cdot I \quad \therefore I = 0.20 \text{ A}$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$9.0 \text{ V} = 10 \Omega \cdot 0.20 \text{ A} + V_A \quad \therefore V_A = +7.0 \text{ V}$$

- II 右図の向きに電流 I が流れるとき $V_A < 0 \text{ V}$ となり、回路の方程式は、

$$V = (-V_A) + 35 \Omega \cdot I \quad \cdots \textcircled{3}$$

- (1) 自己誘導作用により、コイルの電流は不連続にならないので、

$$I = 0.20 \text{ A} (\text{スイッチを切る直前と同じ})$$

- (2) II(1) のとき図 1 より $|V_A| = 103 \text{ V}$ と分かる。
また、 I の向きより $V_A < 0 \text{ V}$ なので、

$$V_A = -103 \text{ V} (\text{端子 B の方が } 103 \text{ V 高い})$$

- (3) II(1)、(2) の結果を $\textcircled{3}$ に代入すると、

$$V = +103 \text{ V} + 35 \Omega \cdot 0.20 \text{ A} = 110 \text{ V} \cdots \text{点灯開始直後}$$

また、点灯終了直前では図 1 より $|V_A| = 80 \text{ V}$ と分かる。このとき $\textcircled{3}$ より、

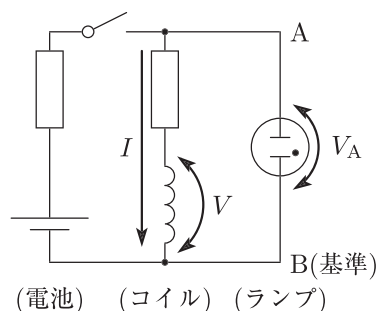
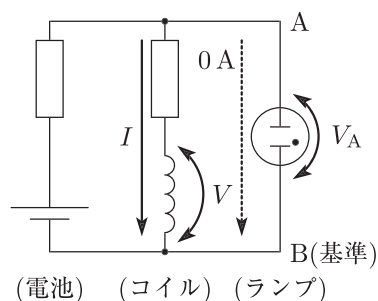
$$V = 80 \text{ V} + 35 \Omega \cdot 0 \text{ A} = 80 \text{ V}$$

- III (1) V を一定とみなしたとき、 $\frac{dI}{dt}$ も一定とみなせるので、

$$V_1 = -L \cdot \frac{-I_1}{T} \quad \therefore T = \frac{LI_1}{V_1}$$

- (2) 起電力の値として、点灯開始直後と終了直前の V の平均をとることにすると、

$$V_1 = \frac{110 \text{ V} + 80 \text{ V}}{2} = 95 \text{ V} \quad \therefore T = \frac{1.0 \text{ H} \times 0.20 \text{ A}}{95 \text{ V}} \approx 2 \times 10^{-3} \text{ s}$$



【3】

《解答》

I (1) $0 < t < T$ のとき, $V_1 = V_0$ なので,

$$n_1 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = V_0 \quad \therefore \quad \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{V_0}{n_1} \quad \dots (*)$$

コイル 1 を上向きに貫く磁束 Φ が増加しているので, I_1 は正の向きで増加する.

(2) $\Phi(0) = 0$ をふまえると, (*) より,

$$\frac{\Phi(T) - 0}{T} = \frac{V_0}{n_1} \quad \therefore \quad \Phi(T) = \frac{V_0 T}{n_1}$$

(3) スイッチ S が開いているとき, 式 (ア) で $I_2 = 0$ なので,

$$\Phi(T) = kn_1 I_1(T) + 0 \quad \therefore \quad I_1(T) = \frac{V_0 T}{kn_1^2}$$

(4) (a) $0 < t < T$ のとき, (2) と同様にして,

$$\frac{\Phi(t) - 0}{t} = \frac{V_0}{n_1} \quad \therefore \quad \Phi(t) = \frac{V_0}{n_1} t$$

(3) と同様に式 (ア) より,

$$\Phi(t) = kn_1 I_1(t) + 0 \quad \therefore \quad I_1(t) = \frac{V_0}{kn_1^2} t$$

1 次側の回路の方程式より,

$$E(t) = R_1 I_1(t) + V_0 = V_0 \left(\frac{R_1}{kn_1^2} t + 1 \right)$$

(b) $t > T$ のとき, $V_1 = 0$ なので,

$$n_1 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 0 \quad \therefore \quad \Phi(t) = (\text{定数})$$

コイル 1 の自己誘導作用により, I_1 は不連続にならないので Φ も不連続にならないことをふまえると,

$$\Phi(t) = \Phi(T) = \frac{V_0 T}{n_1} \quad \therefore \quad I_1(t) = I_1(T) = \frac{V_0 T}{kn_1^2}$$

1 次側の回路の方程式より,

$$E(t) = R_1 I_1(t) + 0 = \frac{R_1 T}{kn_1^2} V_0$$

II (1) I(2) のときと同様で, $\Phi(T) = \frac{V_0 T}{n_1}$

(2) 式 (イ) と同様にコイル 2 の電圧も表すと,

$$\begin{cases} V_1 = n_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ V_2 = n_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \end{cases} \quad \therefore \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$0 < t < T$ のとき, $V_1 = V_0$ なので,

$$\frac{V_0}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \therefore \quad V_2 = \frac{n_2}{n_1} V_0$$

$V_2 > 0$ となっているので, c' 点の電位が高くなる.

(3) $0 < t < T$ のとき $I_2 < 0$ となることに注意すると, 2 次側の回路の方程式は,

$$\frac{n_2}{n_1} V_0 = R_2 \cdot (-I_2) \quad \therefore \quad I_2 = -\frac{n_2 V_0}{n_1 R_2}$$

また, I(4) のときと同様に磁束は $\Phi(t) = \frac{V_0}{n_1} t$ と表せる. これらを式 (ア) に代入すると,

$$\frac{V_0}{n_1} t = k \left\{ n_1 I_1(t) + n_2 \cdot \left(-\frac{n_2 V_0}{n_1 R_2} \right) \right\} \quad \therefore \quad I_1(t) = \frac{V_0}{n_1^2} \left(\frac{t}{k} + \frac{n_2^2}{R_2} \right)$$

【4】

《解答》

(1) 容量 C_1 , C_2 のコンデンサーの電荷を Q_1 , Q_2 とすると, 回路の方程式は,

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} = V_1 \\ \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_1} = V_2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 \\ Q_2 = C_2 (V_2 - V_1) \end{cases}$$

このときの静電エネルギーは,

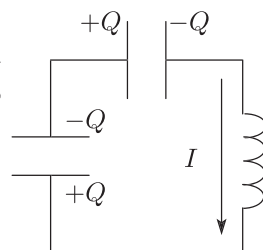
$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \\ &= \frac{1}{2}C_1 V_1^2 + \frac{1}{2}C_2 (V_2 - V_1)^2 \end{aligned}$$

(2) (1) で, $V_1 = 0$ の場合なので,

$$U_2 = 0 + \frac{1}{2}C_2 V_2^2 = \frac{1}{2}C_2 V_2^2$$

(3) 容量 C_2 のコンデンサーの左極板と容量 C_1 のコンデンサーの下極板の電荷は常に等しいので, これを $+Q$ とおき, $+Q$ に流入する向きを正とした電流を I とおくと, 回路の方程式と電流の定義より,

$$\begin{cases} \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = -L \frac{dI}{dt} \\ I = \frac{dQ}{dt} \end{cases} \quad \therefore \quad \ddot{Q} = -\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} Q$$



Q の変動は単振動で,

$$\text{角周波数 } \omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2}} \quad \therefore \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{LC_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

(4) 与えられた近似により, 抵抗 R_L の平均消費電力 $\overline{P_n}$ は,

$$\overline{P_n} = R_L \left(\frac{I_n}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad \therefore \quad W = \overline{P_n} \cdot T = \frac{1}{2} R_L I_n^2 T$$

(5) $U_3 = \frac{1}{2} L I_n^2$

(6) 電流が極大になるときどうして比べた, コイルの蓄えるエネルギーの減少分が, 抵抗 R_L で発生するジュール熱となるので,

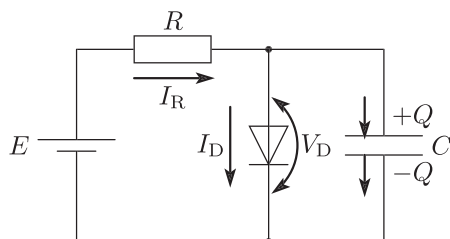
$$\frac{1}{2} L I_n^2 - \frac{1}{2} L I_{n+1}^2 = \frac{1}{2} R_L I_n^2 T \quad \therefore \quad \frac{I_{n+1}}{I_n} = \sqrt{\frac{L - R_L T}{L}}$$

【5】

《解答》

スイッチを閉じてあるときの回路の方程式は、

$$\begin{cases} E = RI_R + V_D & \cdots \textcircled{1} \\ E = RI_R + \frac{Q}{C} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$



(1) スイッチを閉じた直後は、②で $Q = 0$ なので、

$$E = RI_R + 0 \quad \therefore I_R = \frac{E}{R}$$

(2) (a) $E < v$ のときは $I_D = 0$ に保たれる。また、スイッチを閉じて十分に時間が経過すると、コンデンサーを流れる電流は 0 となるので、①と②で $I_R = 0$ となり、

$$\begin{cases} E = 0 + V_D \\ E = 0 + \frac{Q}{C} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} V_D = E \\ Q = CE \end{cases}$$

(b) 図 1 より、 $V_D > v$ のときは、

$$I_D - 0 = \frac{V_D - v}{r} \quad \therefore V_D = rI_D + v \quad \cdots \textcircled{3}$$

また、スイッチを閉じて十分に時間が経過すると、コンデンサーを流れる電流は 0 なので、

$$I_R = I_D + 0 = I_D$$

これらを①に代入すると、

$$E = RI_D + (rI_D + v) \quad \therefore I_D = \frac{E - v}{R + r}$$

これを③に代入して、

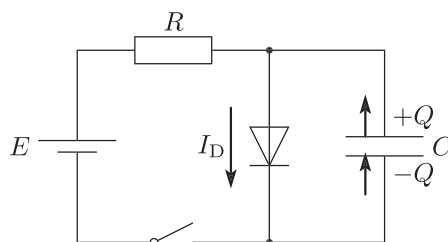
$$V_D = r \cdot \frac{E - v}{R + r} + v = \frac{rE + Rv}{R + r}$$

このとき、ダイオードの消費電力は、

$$P_D = V_D I_D = \frac{(rE + Rv)(E - v)}{(R + r)^2}$$

- (3) スイッチを開いた後の回路の方程式と電流の定義より,

$$\begin{cases} \frac{Q}{C} = rI_D + v & \dots ④ \\ I_D = \frac{d(-Q)}{dt} & \dots ⑤ \end{cases}$$



- (a) ⑤を④に代入すると,

$$\frac{Q}{C} = -r \frac{dQ}{dt} + v \quad \therefore \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{rC} (Q - Cv)$$

- (2)(b) より, 初期条件は $Q(0) = C \cdot \frac{rE + Rv}{r + R}$ なので,

$$Q(t) = Cv + \frac{Cr(E - v)}{r + R} e^{-\frac{t}{rC}}$$

ここで $E > v$ をふまえると, Q の変化は図 3(イ) のグラフとなることが分かり,

$$\begin{cases} A = Q(0) = C \cdot \frac{rE + Rv}{r + R} \\ B = Q(\infty) = Cv \end{cases}$$

このとき⑤より,

$$I_D(t) = -\frac{dQ}{dt} = +\frac{E - v}{r + R} e^{-\frac{t}{rC}}$$

$E > v$ をふまえると, I_D の変化は図 3(イ) のグラフとなることが分かり,

$$\begin{cases} A = I_D(0) = \frac{E - v}{r + R} \\ B = I_D(\infty) = 0 \end{cases}$$

- (b) 静電エネルギーの減少分がダイオードで発生するジュール熱となるので,

$$W = \frac{1}{2}C \left(\frac{rE + Rv}{R + r} \right)^2 - \frac{1}{2}Cv^2$$

$W = 3 \cdot \frac{1}{2}Cv^2$ となるときは,

$$\frac{3}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}C \left(\frac{rE + Rv}{R + r} \right)^2 - \frac{1}{2}Cv^2 \quad \therefore \quad E = \frac{R + 2r}{r}v$$

【6】

《解答》

イ 起電力の向きが一致するように接続して②.

ロ 4 列の N 極と 4 列の S 極が並んでいるから,

$$p = 4\omega$$

ハ 周期を T とすると,

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega}$$

ニ 半周期ゆえ,

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{p} \left(= \frac{\pi}{4\omega} \right)$$

ホ 図の向きを正とする磁束は減少しているので, その変化を妨げる向きに起電力が生じ, その向きはコイル内 2→1 向きゆえ, K を閉じていると仮定すれば電球内を 1 から 2 の向きに電流が流れるから①.

ヘ

$$V = -2N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -2N \frac{d(B_0 S \cos pt)}{dt} = 2NB_0 Sp \sin pt (= 8NB_0 S\omega \sin 4\omega t)$$

ト 周波数を f とすると,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi} \left(= \frac{2\omega}{\pi} \right)$$

チ 2 つのコイルの直列接続ゆえ,

$$pL + pL = 2pL (= 8\omega L)$$

リ 合成抵抗は $\sqrt{r^2 + (2pL)^2}$ ゆえ,

$$i = \frac{2NB_0 Sp}{\sqrt{r^2 + (2pL)^2}} \sin(pt - \theta) \left(= \frac{8NB_0 S\omega}{\sqrt{r^2 + (8\omega L)^2}} \sin(4\omega t - \theta) \right)$$

ヌ 消費電力は,

$$ri^2 = \frac{(2NB_0 Sp)^2 r}{r^2 + (2pL)^2} \sin^2(pt - \theta)$$

よって平均電力は, $\overline{\sin^2(pt - \theta)} = \frac{1}{2}$ ゆえ,

$$\overline{ri^2} = \frac{2(NB_0 Sp)^2 r}{r^2 + (2pL)^2} \left(= \frac{32(NB_0 S\omega)^2 r}{r^2 + (8\omega L)^2} \right)$$

ル

$$v = \omega a \times \frac{R}{b} = \frac{aR\omega}{b} \left(= \frac{aRp}{4b} \right)$$

ヲ スの結果より,

$$\overline{ri^2} = \frac{2(NB_0S)^2r}{(r^2/p^2) + 4L^2}$$

ここで $\frac{r^2}{p^2} \rightarrow 0$ より, 消費電力は,

$$\frac{(NB_0S)^2r}{2L^2}$$

に近づく.

問 角速度が大きくなるにつれて発電機の起電力は増大するが, 同時に自己誘導によってコイルに生じる逆起電力が大きくなり起電力を打ち消す効果が大きくなるため, 電球はある明るさより明るくはならず一定の明るさに落ち着く.

■自習

【1】

《解答》

(1) (a) 電磁波の速さが $\frac{c}{n}$ となっているので,

$$\frac{c}{n} = \nu_i \lambda_i \quad \therefore \quad \lambda_i = \frac{c}{n\nu_i}$$

(b) 正の整数を m とすると, ブラッグの反射条件に相当する式は,

$$2d \sin \theta = m\lambda_i$$

(2) 音波の周波数を f とすると,

$$3.0 \times 10^3 = f \times (1.0 \times 10^{-6}) \quad \therefore \quad f = 3.0 \times 10^9 \text{ Hz}$$

$$(3) \begin{cases} E_i = h\nu_i \\ E_r = h\nu_r \end{cases}$$

(4) (a) $h\nu_r = hf + h\nu_i$

$$(b) \begin{cases} \frac{h}{\lambda_r} \cos \theta_r = \frac{h}{\lambda_i} \cos \theta_i & \dots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{h}{\lambda_r} \sin \theta_r = \frac{h}{d} - \frac{h}{\lambda_i} \sin \theta_i & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

(c) $\frac{\lambda_i}{\lambda_r} \doteq 1$ すなわち $\lambda_r \doteq \lambda_i$ とみなせるとき, ①より,

$$\cos \theta_r = \cos \theta_i \quad \therefore \quad \theta_r = \theta_i$$

(d) ②で, $\lambda_r \doteq \lambda_i$, $\theta_r = \theta_i = \theta$ とすると,

$$\frac{\sin \theta}{\lambda_i} = \frac{1}{d} - \frac{\sin \theta}{\lambda_i} \quad \therefore \quad 2d \sin \theta = \lambda_i$$

これは (1)(b) の式で $m = 1$ の場合に相当している.

【2】

《解答》

- (1) 電子の速さは $v = \frac{p}{m}$ と表せる．よって，運動方程式の向心成分は，

$$m \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{p}{m} \right)^2 = \frac{k \cdot Ze \cdot e}{r^2} \quad \therefore \quad r = \frac{kZe^2m}{p^2}$$

- (2) 電子の力学的エネルギーを E とすると，

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k \cdot Ze \cdot (-e)}{r} \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 - kZe^2 \cdot \frac{p^2}{kZe^2m} \\ &= -\frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

- (3) 電子波の波長は $\lambda_e = \frac{h}{p}$ と表すことができ，このことは結晶を用いた電子線回折の実験によって確かめることができる．

- (4) 電子波が円軌道上で強めあうための条件がボーアの量子化条件であり，正の整数 n を用いて次のように書くことができる．

$$2\pi r = n \cdot \frac{h}{p} \quad \cdots (*)$$

- (5) (1) の r を (*) に代入して， p を p_n と書くと，

$$2\pi \cdot \frac{kZe^2m}{p_n^2} = n \cdot \frac{h}{p_n} \quad \therefore \quad p_n = \frac{2\pi kZe^2m}{nh}$$

これを (2) に代入したものが E_n なので，

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{2\pi kZe^2m}{nh} \right)^2 \\ &= -\frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} \end{aligned}$$

- (6) 放出される光の波長を λ とすると，

$$h \cdot \frac{c}{\lambda} = E_n - E_l \quad \therefore \quad \lambda = \frac{ch}{E_n - E_l}$$

- (7) 整数 n を用いて $n' = \frac{n}{2}$ と表すことができ，これを②に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R_1 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2^2}{n^2} \right) \\ &= 4R_1 \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

(8) (5), (6) より,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{ch} \left(\frac{-2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} - \frac{-2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} \cdot \frac{Z^2}{l^2} \right) \\ &= \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{ch^3} \cdot Z^2 \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ \therefore R_Z &= \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{ch^3} \cdot Z^2 = R_1 Z^2\end{aligned}$$

これと (7) より, b の系列の光を出すのは $Z = 2$ の原子すなわちヘリウムであることが分かる. $\rightarrow \text{He}^+$ イオン

【3】

《解答》

$$(1) MV_M - mv' = mv \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2) \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \right) = E \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(3) E = 0 \text{ のとき, } \textcircled{2} \text{ より,}$$

$$\frac{1}{2}MV_M^2 + \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \therefore MV_M^2 + mv'^2 = mv^2$$

これと①より v' を消去すると,

$$MV_M^2 + m \left(\frac{M}{m}V_M - v \right)^2 = mv^2 \quad \therefore V_M \{ (M+m)V_M - 2mv \} = 0$$

$V_M > 0$ なので,

$$(M+m)V_M - 2mv = 0 \quad \therefore \frac{V_M}{v} = \frac{2m}{M+m}$$

$$(4) (3) \text{ をふまえることにより,}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}MV_M^2}{\frac{1}{2}mv^2} &= \frac{M}{m} \left(\frac{2m}{M+m} \right)^2 \\ &= \frac{4Mm}{(M+m)^2} \end{aligned}$$

$$(5) \textcircled{2} \text{ で原子の運動エネルギーを無視すると,}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = E$$

$$E = E_x - E_g, \quad E_0 = \frac{1}{2}mv^2 \text{ を代入すると,}$$

$$E_0 - \frac{1}{2}mv'^2 = E_x - E_g \quad \therefore \frac{1}{2}mv'^2 = E_0 - (E_x - E_g) \quad \dots (*)$$

$$\frac{1}{2}mv'^2 \geq 0 \text{ なので,}$$

$$E_0 - (E_x - E_g) \geq 0 \quad \therefore E_0 \geq E_x - E_g$$

$$(6) \text{ CG 間について, エネルギーの保存より,}$$

$$E_0 + (-e) \cdot V_G = 0 + (-e) \cdot 0 \quad \therefore E_0 = eV_G$$

$$(7) (*) \text{ より,}$$

$$E' = E_0 - (E_x - E_g) \quad \therefore E_0 - E' = E_x - E_g$$

- (8) G を電位の基準としたとき，電子の速さが 0 となる位置の電位を $V_0 (< 0)$ とおく．エネルギーの保存より，

$$0 + (-e) \cdot V_0 = E' + (-e) \cdot 0 \quad \therefore \quad V_0 = -\frac{E'}{e}$$

$V_0 > -V_P$ なので，

$$-\frac{E'}{e} > -V_P \quad \therefore \quad E' < eV_P$$

- (9) 発生する光の波長を λ とおく．エネルギーが 4.9 eV の光子なので，

$$(6.6 \times 10^{-34}) \times \frac{3.0 \times 10^8}{\lambda} = 4.9 \times (1.6 \times 10^{-19}) \quad \therefore \quad \lambda = 2.5 \times 10^{-7} \text{ m}$$

- (10) 2 回励起した

【4】

《解答》

$$(1) \begin{cases} MV \cos \beta + \frac{h\nu}{c} \cos \alpha = MV_0 & \cdots \textcircled{1} \\ MV \sin \beta - \frac{h\nu}{c} \sin \alpha = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$(2) \left(\frac{1}{2} MV^2 + E_0 \right) + h\nu = \frac{1}{2} MV_0^2 + E_1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

(3) ①, ②より,

$$\begin{cases} MV \cos \beta = MV_0 - \frac{h\nu}{c} \cos \alpha & \cdots \textcircled{1}' \\ MV \sin \beta = \frac{h\nu}{c} \sin \alpha & \cdots \textcircled{2}' \end{cases}$$

①'² + ②'² より,

$$\begin{aligned} M^2 V^2 &= \left(MV_0 - \frac{h\nu}{c} \cos \alpha \right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c} \sin \alpha \right)^2 \\ &= M^2 V_0^2 - 2MV_0 \cdot \frac{h\nu}{c} \cos \alpha + \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 \end{aligned}$$

これを整理して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} MV_0^2 &= \frac{1}{2M} \left\{ \left(\frac{h\nu}{c} \right)^2 - 2MV_0 \cdot \frac{h\nu}{c} \cos \alpha \right\} \\ &= h\nu \left(\frac{h\nu}{2Mc^2} - \frac{V_0 \cos \alpha}{c} \right) \end{aligned}$$

(4) ③より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} MV^2 - \frac{1}{2} MV_0^2 &= E_1 - E_0 - h\nu \\ &= h\nu_0 - h\nu \end{aligned}$$

これと (3) より,

$$\begin{aligned} h\nu \left(\frac{h\nu}{2Mc^2} - \frac{V_0 \cos \alpha}{c} \right) &= h(\nu_0 - \nu) \\ \therefore \frac{\nu - \nu_0}{\nu} &= \frac{1}{c} \times V_0 \cos \alpha + \frac{1}{c^2} \times \left(-\frac{h\nu}{2M} \right) \end{aligned}$$

(5) 星の速さを V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \frac{3.14 \times (6.67 \times 10^{11})}{5.23 \times 10^7} \\ &\doteq 4.0 \times 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(6) (5) の速さ V を (B) 式の V_0 とみなすことにより,

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu} \doteq \frac{V_0 \cos \alpha}{c}$$

P で放出して観測者に届く光では $\alpha \doteq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\nu - \nu_0}{\nu} &= \frac{4.0 \times 10^4 \times 1}{3.0 \times 10^8} \\ &\doteq 1.3 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

Q で放出して観測者に届く光では $\alpha \doteq \pi$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{\nu - \nu_0}{\nu} &= \frac{4.0 \times 10^4 \times (-1)}{3.0 \times 10^8} \\ &\doteq -1.3 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

(7) (6) で無視した, (B) 式の右辺第二項の大きさは,

$$\begin{aligned}\frac{h\nu}{2Mc^2} &\doteq \frac{h\nu_0}{2Mc^2} \\ &= \frac{1.64 \times 10^{-18}}{2 \times (1.67 \times 10^{-27}) \times (3.00 \times 10^8)^2} \\ &\doteq 5.5 \times 10^{-9}\end{aligned}$$

(6) で注目した, (B) 式の右辺第一項の大きさとの比をとると,

$$\frac{5.5 \times 10^{-9}}{1.3 \times 10^{-4}} \doteq 4.2 \times 10^{-5}$$

よって, (6) で用いた近似のやり方は, 有効数字 2 桁の精度で $\frac{\nu - \nu_0}{\nu}$ を求めるに際して, 十分良い処方である.

【5】

《解答》

(1) (a) ヘリウム原子核 ${}^4_2\text{He}$

(b) ${}^{210}_{84}\text{Po} \longrightarrow {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^4_2\text{He}$

(2) ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ が中性子 ${}_0^1\text{n}$ を吸収して ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ となり, この ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ が β 崩壊することにより ${}^{210}_{84}\text{Po}$ となる.

(3) 質量とエネルギーの関係式より, 質量 1 u に相当するエネルギーは,

$$\begin{aligned} 1 \text{ u} \times c^2 &= (1.7 \times 10^{-27}) \times (3.0 \times 10^8)^2 \\ &= 1.53 \times 10^{-10} \text{ J} \\ &\simeq 1.5 \times 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

(4) ${}^{210}_{84}\text{Po}$ の α 崩壊で失われる質量は,

$$209.9829 - (205.9745 + 4.0026) = 0.0058 \text{ u}$$

これと (3) より, 放出されるエネルギーは,

$$\begin{aligned} Q &= 0.0058 \times (1.53 \times 10^{-10}) \\ &= 8.874 \times 10^{-13} \text{ J} \\ &\simeq 8.9 \times 10^{-13} \text{ J} \end{aligned}$$

(5) (a) ${}^{210}_{84}\text{Po}$ は 1 mol の質量が 210 g なので, $N_0 = 2.4 \times 10^{18}$ 個の ${}^{210}_{84}\text{Po}$ の質量は,

$$\begin{aligned} 210 \times \frac{N_0}{N_A} &= 210 \times \frac{2.4 \times 10^{18}}{6.0 \times 10^{23}} \\ &= 8.4 \times 10^{-4} \text{ g} \end{aligned}$$

(b) 崩壊の法則より,

$$\begin{aligned} N &= N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \\ &= 2.4 \times 10^{18} \times \frac{1}{4} \\ &= 6.0 \times 10^{17} \text{ 個} \end{aligned}$$

(c) 放出された α 粒子の個数は, 崩壊した ${}^{210}_{84}\text{Po}$ の個数と等しいので,

$$\begin{aligned} N_\alpha &= N_0 - N \\ &= 2.4 \times 10^{18} - 6.0 \times 10^{17} \\ &= 1.8 \times 10^{18} \text{ 個} \end{aligned}$$

これと (4) より，放出されたエネルギーの総量は，

$$\begin{aligned}
 E &= QN_{\alpha} \\
 &= (8.87 \times 10^{-13}) \times (1.8 \times 10^{18}) \\
 &= 1.5966 \times 10^6 \text{ J} \\
 &\doteq 1.6 \times 10^6 \text{ J}
 \end{aligned}$$

(6) $1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ の水の質量を M とすると，

$$\begin{aligned}
 M &= \rho \times (1.0 \times 10^{-2} \text{ m}^3) \\
 &= 1.0 \text{ g/cm}^3 \times (1.0 \times 10^{-2} \times 10^6 \text{ cm}^3) \\
 &= 1.0 \times 10^4 \text{ g}
 \end{aligned}$$

また，比熱の定義より，

$$E = Mc_w(t_1 - t_0) \quad \therefore \quad t_1 = t_0 + \frac{E}{Mc_w}$$

数値を代入すると，

$$\begin{aligned}
 t_1 &= 20 + \frac{1.60 \times 10^6}{(1.0 \times 10^4) \times 4.2} \\
 &\doteq 58^\circ\text{C}
 \end{aligned}$$

(7) (a) $pV = \frac{N_{\alpha}}{N_A}RT_1$

(b) ヘリウム気体の温度も水の温度と等しいので，

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 273 + 58 \\
 &= 331 \text{ K}
 \end{aligned}$$

(7)(a) より，

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{N_{\alpha}}{N_A} \cdot \frac{RT_1}{V} \\
 &= \frac{1.8 \times 10^{18}}{6.0 \times 10^{23}} \cdot \frac{8.3 \times 331}{1.0 \times 10^{-6}} \\
 &\doteq 8.2 \times 10^3 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

このとき，ヘリウム気体の内部エネルギーは，

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{3}{2}RT_1 \times \frac{N_{\alpha}}{N_A} \\
 &= \frac{3}{2} \times 8.3 \times 331 \times \frac{1.8 \times 10^{18}}{6.0 \times 10^{23}} \\
 &\doteq 1.2 \times 10^{-2} \text{ J}
 \end{aligned}$$

