冬期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

難関大物理／難関大物理 T

1章　力学演習

問題

■演習

【1】

《解答》

I (1) 与えた仕事はばねの弾性エネルギーの増加に相当するから，

$$\underline{\frac{1}{2}k{x_0}^2}$$

(2) エネルギー保存より，求める速さを v_0 として，

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2){v_0}^2+0=0+\frac{1}{2}k{x_0}^2$$

$$\therefore\quad v_0=\underline{x_0\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}}$$

(3) 運動方程式は，

$$m_1\ddot{x}_1=-kx_1\qquad\therefore\quad \ddot{x}_1=-\frac{k}{m_1}x_1=-\omega^2x_1$$

初期条件から，振幅を A として解は，

$$x_1=A\sin\omega t$$

$$\therefore\quad \dot{x}_1(0)=A\omega=v_0\qquad\therefore\quad A=\frac{v_0}{\omega}=\underline{x_0\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\underline{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}}$$

II (1) 運動方程式の鉛直上向き成分より，

$$0=kx_1-m_1g\qquad\therefore\quad x_1=\underline{\frac{m_1g}{k}}$$

(2) 同じく，運動方程式より，

$$0=k(x_1+x_2)-(m_1+m_2)g\qquad\therefore\quad x_2=\underline{\frac{m_2g}{k}}$$

(3) (2) の位置を原点として鉛直上向きを正として，運動方程式は，板と小物体の位置を x として，

$$m_2\ddot{x} = N - m_2 g$$
$$m_1\ddot{x} = +k\left(\frac{m_1+m_2}{k}g - x\right) - N - m_1 g$$

$N \geqq 0$ を前提に，辺々加えて，

$$(m_1+m_2)\ddot{x} = -kx$$

よって $x = -x_3$ のときの加速度 a_3 は，

$$a_3 = -\frac{k(-x_3)}{m_1+m_2} = \underline{\frac{kx_3}{m_1+m_2}}$$

(4) 最も高い位置は $x = x_3$ ゆえそのときの加速度成分の大きさは，

$$|\ddot{x}| = \left|-\frac{kx_3}{m_1+m_2}\right| = \underline{\frac{kx_3}{m_1+m_2}}$$

(5) $\dfrac{kx_3}{m_1+m_2} = g$ より　　$x_3 = \underline{\dfrac{m_1+m_2}{k}g}$

(6) (5) より離れる位置は $x = \dfrac{(m_1+m_2)g}{k} = x_1 + x_2$．この位置に達した時刻を $t = t_0$ とすると，

$$x_1 + x_2 \left(= \frac{(m_1+m_2)g}{k}\right) = -\frac{2(m_1+m_2)g}{k}\cos\omega t_0$$

$$\therefore \quad \cos\omega t_0 = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \sin\omega t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad \dot{x}(t_0) = \frac{2(m_1+m_2)g}{k}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{g\sqrt{\frac{3(m_1+m_2)}{k}}}$$

【2】

《解答》

(1) エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \underline{\frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR(1-\cos\theta)}$$

(2) $v=0$ として，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \underline{mgR(1-\cos\theta_0)}$$

(3)

$$\cos\theta_0 = \underline{1 - \frac{{v_0}^2}{2gR}}$$

(4) 運動方程式の軌道法線成分より，

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta \qquad \therefore \quad N = \underline{m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta}$$

(5) v を消去，整理して，

$$N = \underline{m\frac{{v_0}^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2)}$$

(6) (5) で $N=0$，$\theta=\theta_0$ とし，$\cos\theta_0$ について解いて，

$$\cos\theta_0 = \underline{\frac{2}{3} - \frac{{v_0}^2}{3gR}}$$

(7) (6) で $\theta_0=\pi$ として，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \underline{\frac{5}{2}mgR}$$

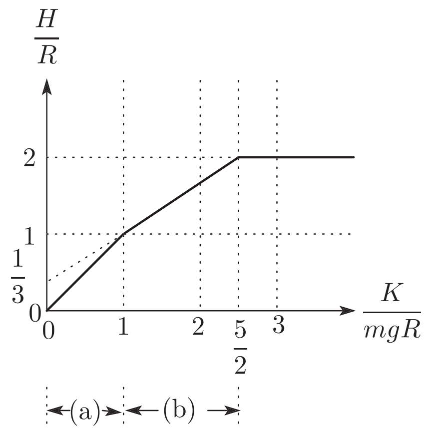
(8) (a) $0 \leqq \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqq \dfrac{H}{R} \leqq 1\right)$ では (2) が成り立ち,

$$\frac{H}{R} = \frac{R(1-\cos\theta_0)}{R} = \frac{\frac{1}{2}m{v_0}^2}{mgR} \qquad \therefore \quad \frac{H}{R} = \frac{K}{mgR}$$

(b) $\dfrac{\pi}{2} < \theta_0 \leqq \pi$ $\left(1 < \dfrac{H}{R} \leqq 2\right)$ では (6) が成り立ち,

$$\frac{H}{R} = \frac{R(1-\cos\theta_0)}{R} = \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2}m{v_0}^2}{mgR} + \frac{1}{3} \qquad \therefore \quad \frac{H}{R} = \frac{2}{3}\frac{K}{mgR} + \frac{1}{3}$$

グラフは 以下.



(9) (5) で $\theta = 0$ を代入して,

$$N = m\frac{{v_0}^2}{R} + mg$$

【3】

《解答》

(ア) $v-t$ グラフの接線の傾きから，

$$\underline{\frac{v}{T}}$$

(イ) 運動方程式より，

$$\underline{m\frac{v}{T}}$$

(ウ) 静止摩擦の最大値が作用するから，

$$m\frac{v}{T_1}=\mu_0 mg \qquad \therefore \quad T_1=\underline{\frac{v}{\mu_0 g}}$$

(エ) 台上での加速度の水平左向き成分を α とすると，左向きの慣性力 $m\dfrac{v}{T}$ を考慮して，

$$m\alpha=m\frac{v}{T}-\mu mg \qquad \therefore \quad \alpha=\underline{\frac{v}{T}-\mu g}$$

(オ) 変位について，

$$l_1=\frac{1}{2}\alpha T^2=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{v}{T}-\mu g\right)T^2}$$

(カ)

$$u=\alpha T=\left(\frac{v}{T}-\mu g\right)T=\underline{v-\mu gT}$$

(キ) $t>T$ での台上の加速度成分 $\alpha'=-\mu g$ と，速度変化，変位の関係より，

$$0^2-u^2=2\alpha' l_2 \qquad \therefore \quad l_2=-\frac{u^2}{2\alpha'}=\underline{\frac{1}{2\mu g}(v-\mu gT)^2}$$

(ク) 荷物が動く距離が L を超えないことから，

$$L \geqq l_1+l_2$$

$$\therefore \quad L \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{v}{T}-\mu g\right)T^2+\frac{1}{2\mu g}(v-\mu gT)^2$$

$$\therefore \quad T \geqq \underline{\frac{v}{\mu g}-\frac{2L}{v}}$$

(ケ) 慣性力 $m\dfrac{v}{T_2}$ を考慮して，P 点反時計まわりのモーメントの総和がちょうど0となるとき，

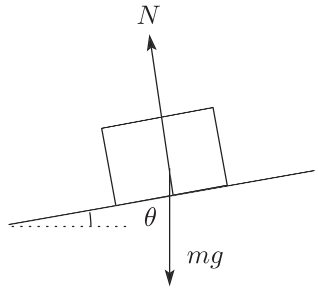
$$0=-mg\times\frac{a}{2}+m\frac{v}{T_2}\times\frac{h}{2} \qquad \therefore \quad T_2=\underline{\frac{hv}{ag}}$$

(コ) 題意より $T_1>T_2$ となればよいから，

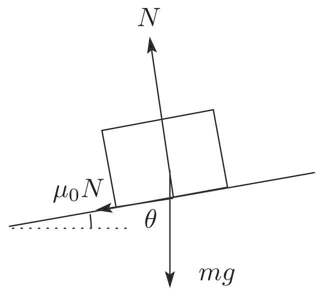
$$\frac{v}{\mu_0 g}>\frac{hv}{ag} \qquad \therefore \quad \frac{h}{a}<\underline{\frac{1}{\mu_0}}$$

(1) 右図 の力の作用で，運動方程式は，

$$m\frac{{V_0}^2}{R} = N\sin\theta$$
$$0 = N\cos\theta - mg$$
$$\therefore \quad V_0 = \underline{\sqrt{gR\tan\theta}}$$



(サ) 静止摩擦の最大値が作用するときの重心の運動方程式より，

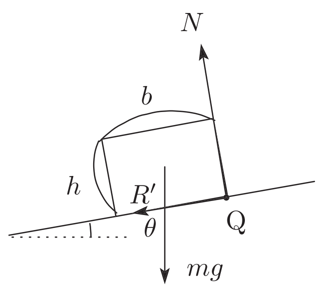


$$m\frac{V^2}{R} = N\sin\theta + \mu_0 N\cos\theta \qquad \cdots\cdots ①$$
$$0 = N\cos\theta - \mu_0 N\sin\theta - mg \qquad \cdots\cdots ②$$

②から N を求め，①に代入して，

$$V = \underline{\sqrt{\frac{\sin\theta + \mu_0\cos\theta}{\cos\theta - \mu_0\sin\theta}gR}}$$

(シ) 重心の運動方程式より，静止摩擦力を R' として，



$$m\frac{V^2}{R} = N\sin\theta + R'\cos\theta \qquad \cdots\cdots ③$$
$$0 = N\cos\theta - R'\sin\theta - mg \qquad \cdots\cdots ④$$

重心反時計まわりのモーメントの総和は，抗力の作用点がQ点であることから，

$$0 = +N\frac{b}{2} - R'\frac{h}{2}$$

R' 消去，さらに④から N を求め，③に代入して，

$$V = \underline{\sqrt{\frac{h\sin\theta + b\cos\theta}{h\cos\theta - b\sin\theta}gR}}$$

■別解　非慣性系での遠心力を考慮したQ点時計まわりのモーメントの総和=0，つまり

$$0 = \left(m\frac{V^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta\right) \times \frac{h}{2} - \left(m\frac{V^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta\right) \times \frac{b}{2}$$

より，

$$V = \underline{\sqrt{\frac{h\sin\theta + b\cos\theta}{h\cos\theta - b\sin\theta}gR}}$$

と求めることもできる．

(ス) (シ) の結果より，

$$V=\sqrt{\frac{h\sin\theta+b\cos\theta}{h\cos\theta-b\sin\theta}gR}=\sqrt{\frac{\sin\theta+\dfrac{b}{h}\cos\theta}{\cos\theta-\dfrac{b}{h}\sin\theta}gR}$$

(シ)，(サ) の比較より，

$$\frac{b}{h}=\mu_0 \qquad \therefore \quad \frac{h}{b}=\underline{\frac{1}{\mu_0}}$$

＜参考＞(ス) は，静止摩擦の最大値が作用し回転し始めるぎりぎりで，重心時計まわりのモーメントの総和=0 より，

$$0=-N\times\frac{b}{2}+\mu_0 N\times\frac{h}{2} \qquad \therefore \quad \frac{h}{b}=\frac{1}{\mu_0}$$

から求めることもでき，(シ) は (サ) の結論に $\mu_0=\dfrac{b}{h}$ を代入して，

$$V=\sqrt{\frac{\sin\theta+\dfrac{b}{h}\cos\theta}{\cos\theta-\dfrac{b}{h}\sin\theta}gR}$$

となることが分かる．

【4】

《解答》

(1) ばねの伸びは $x-l$ ゆえ，遠心力を考慮して，円盤に固定した座標系での運動方程式の $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 成分は，

$$\underline{0=-k(x-l)+(M+m)x\omega^2}$$

(2) (1) と同様に，運動方程式は，

$$0=k(l-r_1)-2k\{l-(R-r_1)\}$$

これを解いて，

$$\underline{r_1=\frac{2R-l}{3}}$$

＜参考＞ $r_1>0$ ゆえ，$2R>l$ である．

(3) 運動方程式

$$0=k(l-r_2)-2k\{l-(R-r_2)\}+(M+m)r_2\omega^2$$
$$r_2=\underline{\frac{k(2R-l)}{3k-(m+M)\omega^2}}$$

＜参考＞ここで $r_2>0$ である．(2) のつりあいが存在するため，$2R>l$ だから，

$$3k-(m+M)\omega^2>0$$

である．

(4) 被測定物を取り除いた後の C の運動方程式は，

$$m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=k(l-r)-2k\{l-(R-r)\}+mr\omega^2$$
$$\therefore\quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{3k-m\omega^2}{m}\left\{r-\frac{k(2R-l)}{3k-m\omega^2}\right\}$$

となる．従って，上式を満たす r は，

$$\begin{cases}(\text{周期})T=\underline{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k-m\omega^2}}}\\ (\text{中心})r=\underline{\dfrac{k(2R-l)}{3k-m\omega^2}}=r_3\end{cases}$$

の単振動である．

＜参考＞題意 ((3)，(4) のつりあいが存在する) から，

$$\begin{cases}2R>l\\ 3k-m\omega^2>3k-(m+M)\omega^2>0\end{cases}$$

である．

【5】

《解答》

(1)　静止衛星の質量を m，求める速さを v_0 とすると，運動方程式の向心成分は，

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \qquad \therefore \quad v_0 = \underline{\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

(2)　万有引力による位置エネルギーの基準を無限遠方にとると，無限遠方に達する，すなわち無限遠方で運動エネルギーを持つためには，加速直前の全力学的エネルギーが正であればよい．したがって，求める速さを v_1 とすると，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - G\frac{Mm}{r} \geqq 0$$

よって，最小の速さは

$$v_1 = \underline{\sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

(3)　求める速さを v_2，帰還時の速さを v_3 とすると，力学的エネルギー，および面積速度がそれぞれ保存されることより，

$$\frac{1}{2}m{v_3}^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - G\frac{Mm}{r}$$
$$\frac{1}{2}Rv_3 = \frac{1}{2}rv_2$$

これらの式より v_3 を消去すると，

$$v_2 = \underline{\sqrt{2GM\frac{R}{r(R+r)}}}$$

(4)　求めるガスの質量を $\varDelta m$ とすると，運動量保存則より，

$$mv_0 = (m - \varDelta m)v_2 + \varDelta m(v_2 + u)$$
$$\therefore \quad \varDelta m = \frac{v_0 - v_2}{u}m = \underline{\frac{m}{u}\left(1 - \sqrt{\frac{2R}{R+r}}\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

(5) 加速した直後の速さを v_4 とすると，

$$v_4 = \frac{4}{3}v_0 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

また，遠地点での速さを v_5，距離を $r_5 (\fallingdotseq r)$ とすると，この場合も，力学的エネルギー，および面積速度がそれぞれ保存されることより，

$$\frac{1}{2}m{v_5}^2 - G\frac{Mm}{r_5} = \frac{1}{2}m{v_4}^2 - G\frac{Mm}{r}$$
$$\frac{1}{2}r_5 v_5 = \frac{1}{2}r v_4$$

これらの式より r_5 を求めると，

$$r_5 = 8r$$

軌道 A の公転周期を T_0，軌道 D の公転周期を T とすると，ケプラーの第 3 法則より，

$$\frac{T^2}{\left(\dfrac{8r+r}{2}\right)^3} = \frac{{T_0}^2}{r^3}$$
$$\therefore \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{2\sqrt{2}}$$

よって，$\underline{\dfrac{27}{2\sqrt{2}}}$ 倍.

添削課題

《解答》

I

(1) (a) 向心力

(b) $\underline{m(l+x_0)\omega^2}$

(c) 遠心力

(d) 慣性力

(e) 加速度

(2) ばねの伸びる向きを正として，

$$0 = m(l+x_0)\omega^2 - kx_0 \qquad \therefore \quad x_0 = \underline{\frac{ml\omega^2}{k-m\omega^2}}$$

また，床に静止した観測者から見た場合，弾性力は円運動の向心力となるので，$-kx_0$ は負 (kx_0 は正) ゆえ $x_0 > 0$ が必要．よって

$$k > m\omega^2 \qquad \therefore \quad \underline{\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

II

(1) 回転座標系における運動方程式の動径方向成分は，

$$\underline{m\ddot{x}'} = m(l+x_0+x')\omega^2 - k(x_0+x')$$
$$\underline{= -(k-m\omega^2)x'}$$

(2) 振動の周期 T は，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k-m\omega^2}}$$

これは $\omega \to 0$ のときの周期と比べ 長い.

配点

I(1) 各 5 点　(2) 伸び 20 点，ω に対する条件 10 点　II(1) 30 点　(2) 15 点

２章　熱力学演習

問題

■演習

【1】

《解答》

問 1 (1) $\underline{d_0V_0}$

(2) 求めるモル数を n として状態方程式より，

$$P_0V_0 = nRT_0 \qquad \therefore \quad n = \underline{\frac{P_0V_0}{RT_0}}$$

問 2 (3) 定圧膨張ゆえ，流入熱量 Q は，

$$Q = n(C_V + R)(T_1 - T_0) = \underline{\frac{P_0V_0}{RT_0}(C_V + R)(T_1 - T_0)}$$

(4) 求める容積を V_1 として，

$$P_0V_1 = nRT_1 = \frac{P_0V_0}{RT_0}RT_1 \qquad \therefore \quad V_1 = \underline{\frac{T_1}{T_0}V_0}$$

(5) 気球の運動方程式の鉛直上向き成分より，全質量 M_0 は，

$$0 = d_0V_1g - M_0g \qquad \therefore \quad M_0 = \underline{\frac{T_1}{T_0}d_0V_0}$$

問 3 (6) (1)，(5) の結果より，(気体を含めない) 気球の質量を M_a とすると，

$$M_\mathrm{a} = M - d_0V_0 = \left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)d_0V_0$$

また，問 3 の状態の気球の内部の気体の物質量を n' とすると，状態方程式と (2)，(4) の結果より，

$$P_0V_1 = n'RT_2 \qquad \therefore \quad n' = \frac{P_0V_1}{RT_2} = \frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{P_0V_0}{RT_0} = \frac{T_1}{T_2}n$$

気体の質量は物質量に比例するので，求める質量 M は，

$$M = d_0V_0\frac{n'}{n} + M_\mathrm{a} = \underline{\left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_1}{T_0} - 1\right)d_0V_0}$$

(7) 求める張力を S とおくと，気球+ロープの運動方程式の鉛直上向き成分より，

$$0 = d_0V_1g - S - (M+m)g = M_0g - S - (M+m)g$$

$$\therefore \quad S = (M_0 - M)g - mg = \underline{\left\{\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) d_0V_0 - m\right\} g}$$

問 4　気球の運動方程式の鉛直上向き成分より，加速度成分を a として，

$$Ma = d_0V_1g - Mg = M_0g - Mg$$

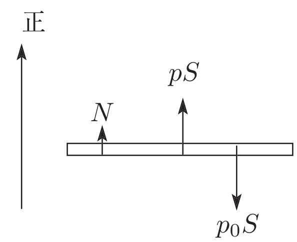
$$\therefore \quad a = \frac{M_0 - M}{M} g = \underline{\frac{(T_2 - T_1)T_0}{T_1T_2 + T_0T_1 - T_2T_0} g}$$

【2】

《解答》

(1) 気体内の圧力 p は

$$pSh_0 = RT_0 \qquad \therefore \quad pS = \frac{RT_0}{h_0}$$



くさびから受ける力を N とすると，ピストンの運動方程式より

$$0 = pS + N - p_0S$$
$$\therefore \quad N = p_0S - pS \geqq 0$$
$$\therefore \quad \underline{p_0 \geqq \frac{RT_0}{Sh_0}}$$

(2) $N = 0$ ゆえ $p = p_0$．よって

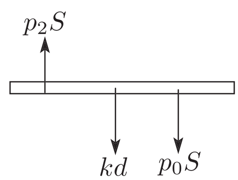
$$p_0Sh_0 = RT_1 \qquad \therefore \quad T_1 = \underline{\frac{p_0Sh_0}{R}}$$

熱力学第 1 法則より

$$\frac{3}{2}R(T_1 - T_0) = Q_1$$
$$\therefore \quad Q_1 = \underline{\frac{3}{2}(p_0Sh_0 - RT_0)}$$

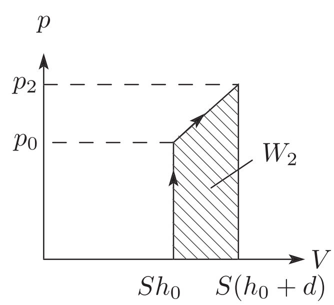
(3) (a) 右図で

$$\underline{0 = p_2S - p_0S - kd}$$



(b) 右下図で

$$W_2 = \frac{1}{2}(p_0 + p_2)Sd$$
$$= \underline{\frac{1}{2}(2p_0S + kd)d}$$



(c) 熱力学第 1 法則と，$p_2S = p_0S + kd$ より

$$\frac{3}{2}\left\{(p_0S + kd)(h_0 + d) - p_0Sh_0\right\} = -W_2 + Q_2$$
$$\therefore \quad Q_2 = \underline{\frac{5}{2}p_0Sd + 2kd^2 + \frac{3}{2}kdh_0}$$

【3】

《解答》

(1) ピストンが受ける力のつりあいより，おもり F をつける前の圧力は室 I，II ともに大気圧と等しく $\underline{p_0}$．室 II は温度が 0 ℃に保たれたまま容積が $\dfrac{V_2}{3}$ になるので，状態方程式より，

$$p\cdot\frac{V_2}{3}=p_0V_2 \qquad \therefore\quad p=\underline{3p_0}$$

(2) おもり F の質量を M として，B が受ける力のつりあいより，

$$0=3p_0S-p_0S-Mg \qquad \therefore\quad M=\underline{\frac{2p_0S}{g}}$$

(3) 変化前後における室 I の温度を T，T' とおくと，状態方程式は，

$$\begin{cases} p_0V_1=n_1RT \\ 3p_0\cdot\dfrac{V_2}{3}=n_1RT' \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} T=\dfrac{p_0V_1}{n_1R} \\ T'=\dfrac{p_0V_2}{n_1R} \end{cases}$$

よって，室 I の内部エネルギー変化は

$$\varDelta U_1=\frac{3}{2}n_1RT'-\frac{3}{2}n_1RT=\underline{\frac{3}{2}p_0(V_2-V_1)}$$

また，室 II の気体の温度は 273K なので，内部エネルギーの変化は，

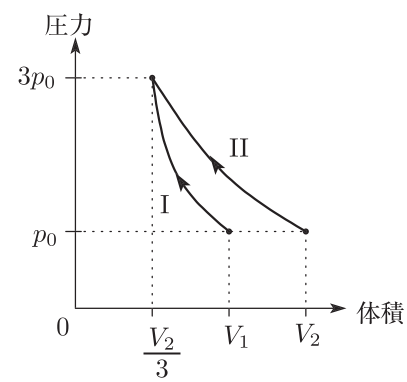
$$\varDelta U_2=\frac{3}{2}n_2R\cdot 273-\frac{3}{2}n_2R\cdot 273=\underline{0}$$

(4) 質量 m の氷が融解するので，気体は mQ の熱を放出する．このとき，外部から気体がされた仕事を W とすると，熱力学第 1 法則より，

$$\varDelta U_1+\varDelta U_2=-mQ+W \qquad \therefore\quad W=\underline{mQ+\frac{3}{2}p_0(V_2-V_1)}$$

(5) 室 I の気体は断熱変化をし，室 II の気体は等温変化をする．

断熱曲線は等温曲線よりも傾きが急なので，グラフは $\underline{\text{右図}}$ のようになる．



【4】

《解答》

(1) ① $\underline{V_0 - Sx}$

②

$$P_\mathrm{A}(V_0 - Sx)^b = P_0{V_0}^b \qquad \therefore \quad P_\mathrm{A} = \underline{\left(\frac{V_0}{V_0 - Sx}\right)^b P_0}$$

③

$$P_\mathrm{A} = \frac{1}{\left(\dfrac{V_0 - Sx}{V_0}\right)^b} P_0 = \left(1 - \frac{Sx}{V_0}\right)^{-b} P_0 \fallingdotseq \underline{\left(1 + \frac{bSx}{V_0}\right) P_0}$$

④ ③と同様に，

$$P_\mathrm{B} \fallingdotseq \underline{\left(1 - \frac{bSx}{V_0}\right) P_0}$$

⑤

$$Ma = P_\mathrm{B}S - P_\mathrm{A}S = \underline{-\frac{2bP_0S^2}{V_0}x}$$

⑥

$$\omega = \underline{\sqrt{\frac{2bP_0S^2}{MV_0}}}$$

⑦

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{MV_0}{2bP_0S^2}}}$$

⑧ $x = \underline{0}$

⑨

$$v_0 = \underline{d\sqrt{\frac{2bP_0S^2}{MV_0}}}$$

(2) (a) 断熱変化ゆえ，

$$P_0{V_0}^b = P_\mathrm{A}\left(\frac{V_0}{2}\right)^b = P_\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}V_0\right)^b$$

$$\therefore \quad P_\mathrm{A} = \underline{2^b P_0}, \qquad P_\mathrm{B} = \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^b P_0}$$

これと状態方程式を連立して，

$$T_\mathrm{A} = \underline{2^{b-1}T_0}, \qquad T_\mathrm{B} = \underline{\left(\frac{2}{3}\right)^{b-1} T_0}$$

(b) A 室に関しては，同様に断熱変化ゆえ，

$$P_{\mathrm{A}}{}' = \underline{2^b P_0}, \quad T_{\mathrm{A}}{}' = \underline{2^{b-1} T_0}$$

ピストンに作用する合力 0 ゆえ，

$$0 = P_{\mathrm{B}}{}'S - P_{\mathrm{A}}{}'S \qquad P_{\mathrm{B}}{}' = P_{\mathrm{A}}{}' = \underline{2^b P_0}$$

B 室については状態方程式の連立ゆえ，

$$T_{\mathrm{B}}{}' = \underline{2^{b-1} \cdot 3T_0}$$

(c) A の断熱変化について，A がされた仕事を W_{A} として，

$$\varDelta U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{A}} + 0$$

$$\therefore \quad W_{\mathrm{A}} = \varDelta U_{\mathrm{A}} = \frac{3}{2} P_{\mathrm{A}}{}' \cdot \frac{V_0}{2} - \frac{3}{2} P_0 V_0 = \frac{3}{2}(2^{b-1} - 1) P_0 V_0$$

W_{A} は B 室の気体がした仕事 W_{B} に等しく，

$$W_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{3}{2}(2^{b-1} - 1) P_0 V_0}$$

また B 室のエネルギー収支について，

$$\varDelta U_{\mathrm{B}} = -W_{\mathrm{B}} + Q_{\mathrm{B}}$$

ここで，

$$\varDelta U_{\mathrm{B}} = \frac{3}{2} P_{\mathrm{B}}{}' \cdot \frac{3}{2} V_0 - \frac{3}{2} P_0 V_0 = \frac{3}{2}(3 \cdot 2^{b-1} - 1) P_0 V_0$$

以上より Q_{B} について求めると，

$$Q_{\mathrm{B}} = \underline{3(2^b - 1) P_0 V_0}$$

(3) (a) いずれも断熱変化ゆえ，

$$P_{\mathrm{A}} V^{\frac{5}{3}} = P_0 {V_0}^{\frac{5}{3}} \qquad \therefore \quad P_{\mathrm{A}} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{5}{3}} P_0$$

$$P_{\mathrm{B}} V^{\frac{7}{5}} = P_0 {V_0}^{\frac{7}{5}} \qquad \therefore \quad P_{\mathrm{B}} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{7}{5}} P_0$$

この比較より，<u>(ウ)</u>.

(b) $b = \dfrac{5}{3}$，$b' = \dfrac{7}{5}$ として，運動方程式は，

$$Ma = -\frac{(b + b')P_0 S^2}{V_0} x$$

(1)⑥と比較して角振動数 ω' は，

$$\omega' = \sqrt{\frac{(b + b')P_0 S^2}{M V_0}} < \omega$$

よって周期は大きくなる．また振動中心は不変ゆえ <u>(ア)</u>.

【5】

《解答》

	ΔU	$=$	$-W$(流出正)	$+Q$(流入正)
A→B	$\frac{3}{2}p_0(2V_0-V_0)$	$=$	$-$ $(-p_0V_0)$	$+\frac{5}{2}p_0V_0$
B→C	0	$=$	$+$ $\left(+\frac{3}{2}p_0V_0\right)$	$-\frac{3}{2}p_0V_0$
C→A	$\frac{3}{2}(p_0-2p_0)V_0$	$=$	0	$-\frac{3}{2}p_0V_0$
A→A	0		$+$ $+\frac{1}{2}p_0V_0$	$-\frac{1}{2}p_0V_0$

(1) 熱力学第 1 法則より

$$\underline{\Delta U=-W+Q}$$

(2) 表より

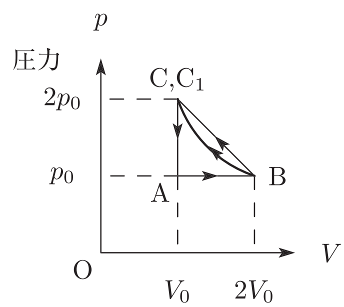
$$Q_{\mathrm{AB}}=\underline{+\frac{5}{2}p_0V_0},\qquad Q_{\mathrm{BC}}=\underline{-\frac{3}{2}p_0V_0},\qquad Q_{\mathrm{CA}}=\underline{-\frac{3}{2}p_0V_0}$$

(3) 表より

$$W_1=\underline{-\frac{1}{2}p_0V_0},\qquad \Delta U_1=\underline{0}$$

(4) 等温変化のグラフを 右図 (太線) に描く．よって

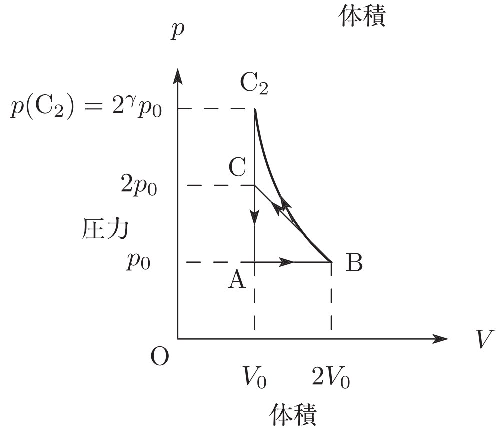
$$p(\mathrm{C}_1)=\underline{2p_0}$$



(5) 断熱圧縮で温度上昇ゆえ 右下図 (太線)．このとき，

$$p(\mathrm{C}_2)V_0^{\gamma}=p_0(2V_0)^{\gamma}$$

$$\therefore\quad p(\mathrm{C}_2)=\underline{2^{\gamma}p_0}$$



(6) 断熱圧縮では内部エネルギーが増加するため，
C_1 と比べて C_2 の方が温度が高くなる．
C_1 と C_2 の体積は等しいので，
状態方程式により C_2 の方が圧力が高くなる．

添削課題

《解答》

(1) 内部エネルギー変化について，U_{P} の定義より

$$U_{\mathrm{f}}-(U_1+U_2)=U_{\mathrm{P}} \qquad \therefore \quad U_{\mathrm{f}}=\underline{U_1+U_2+U_{\mathrm{P}}}$$

(2) 熱力学第 1 法則より，U_{P} はピストンからの力 P_0S がする仕事と一致するから，

$$U_{\mathrm{P}}=\underline{P_0S\Delta h}$$

(3) 状態方程式より，

$$\underline{P_0Sh=RT_1} \qquad \cdots\cdots①$$

(4) 同じく，

$$\underline{P_0S(2h-\Delta h)=2RT_{\mathrm{f}}} \qquad \cdots\cdots②$$

(5) ①× 2 −②より，

$$P_0S\Delta h=\underline{2R(T_1-T_{\mathrm{f}})} \qquad \cdots\cdots③$$

(6) 熱力学第 1 法則より，

$$2\times\frac{3}{2}RT_{\mathrm{f}}-\left(\frac{3}{2}RT_1+\frac{3}{2}RT_2\right)=P_0S\Delta h$$

右辺に③を代入して，

$$2\times\frac{3}{2}RT_{\mathrm{f}}-\left(\frac{3}{2}RT_1+\frac{3}{2}RT_2\right)=2R(T_1-T_{\mathrm{f}}) \qquad \therefore \quad \underline{T_{\mathrm{f}}=\frac{7T_1+3T_2}{10}}$$

(7) ③/①より，

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{2(T_1-T_{\mathrm{f}})}{T_1}$$

これに (6) の T_{f} を代入し，

$$\underline{\frac{\Delta h}{h}=\frac{3(T_1-T_2)}{5T_1}}$$

(8) 内部エネルギーを $\frac{3}{2}RT$ から $\frac{n}{2}RT$ と書き変えて前問と同様に，

$$\underline{T_{\mathrm{f}}=\frac{(n+4)T_1+nT_2}{2(n+2)}}$$

(9) $\underline{\dfrac{\Delta h}{h}=\dfrac{n(T_1-T_2)}{(n+2)T_1}}$

(10) 前問の結果で $\dfrac{\Delta h}{h}>0$ より $\underline{T_1>T_2}$

配点

(1) 10 点　(2)〜(4) 各 5 点　(5) 10 点　(6) 15 点　(7) 10 点　(8) 15 点
(9) 15 点　(10) 10 点

３章　波動演習

問題

■演習

【1】

《解答》

(1)

$$v_{\mathrm{A}}=\frac{\lambda_{\mathrm{A}}}{T}\qquad\therefore\quad \lambda_{\mathrm{A}}=\underline{v_{\mathrm{A}}T}$$

(2)

$$\overline{\mathrm{XY}}=\underline{\frac{v_{\mathrm{A}}T}{\sin\alpha}}\quad\cdots①$$

(3)

$$\overline{\mathrm{XY}}=\frac{v_{\mathrm{B}}T}{\sin\beta}\quad\cdots②$$

①，②式より，

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\underline{\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}}$$

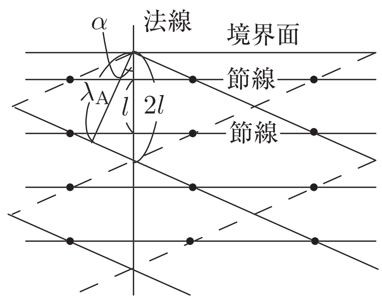
(4) (3) で $\beta=90^\circ$ ，$\alpha=\alpha_0$ として，

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin 90^\circ}=\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}\qquad\therefore\quad \underline{\sin\alpha_0=\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}}$$

(5) $\underline{2a}$

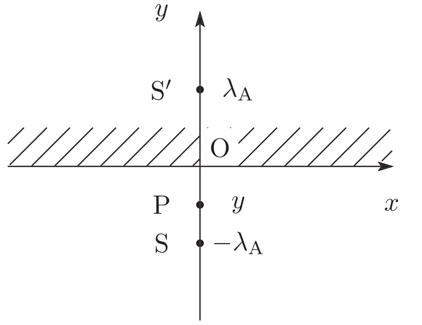
(6) 節線は右図のようになり，境界面と平行に分布する．
その間隔を l とすると，

$$2l\cos\alpha=\lambda_{\mathrm{A}}=v_{\mathrm{A}}T\qquad\therefore\quad l=\underline{\frac{v_{\mathrm{A}}T}{2\cos\alpha}}$$



実線は入射波，破線は反射波

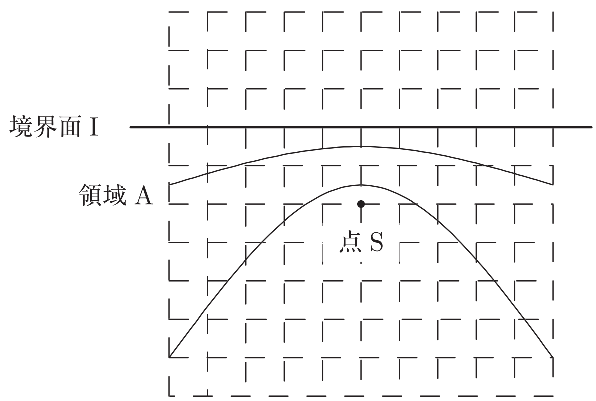
(7) 自由端での反射波との干渉ゆえ，反射波は境界面との対称点から出る同位相の球面波と同等となる．よって下図で SS′ 上で位置 y の点 P が節となるとき，m を整数として，



$$\frac{2\pi}{\lambda_A}\{(\lambda_A - y) - (y - (-\lambda_A))\} = 2m\pi + \pi$$

$$\therefore \quad y = -(2m+1)\frac{\lambda_A}{4}$$

よって OS 間では $y = -\dfrac{\lambda_A}{4}$，$y = -\dfrac{3\lambda_A}{4}$ のところで節が生じる．よってその本数は 2 本．節線の様子は 下図.



【2】

《解答》

I (1) 求める時刻 t_1，振動数 f_1 は，

$$t_1 = \frac{l/2}{V} = \underline{\frac{l}{2V}}$$

変化する波長を λ_1 として

$$V - v_0 = f_0\lambda_1 \qquad \therefore \quad f_1 = \frac{V}{\lambda_1} = \underline{\frac{V}{V - v_0}f_0}$$

(2) 聞こえ始めの時刻: $\dfrac{l/2}{v_0} = \underline{\dfrac{l}{2v_0}}$

聞こえなくなるときの時刻: $\underbrace{\dfrac{l}{2v_0}}_{\text{聞こえ始め}} + \underbrace{\dfrac{l}{2v_0}}_{\text{壁通過までの所要時間}} + \underbrace{\dfrac{l/2}{V}}_{\text{反射音の到達時間}} = \underline{\dfrac{l}{v_0} + \dfrac{l}{2V}}$

直接音の振動数 f_2 は，変化する波長を λ_2 として

$$V + v_0 = f_0\lambda_2 \qquad \therefore \quad f_2 = \frac{V}{\lambda_2} = \frac{V}{V + v_0}f_0$$

よって，うなりの回数は

$$\begin{aligned} |f_1 - f_2| &= \left(\frac{V}{V - v_0} - \frac{V}{V + v_0}\right)f_0 \\ &= \underline{\frac{2v_0V}{V^2 - {v_0}^2}f_0} \end{aligned}$$

(3) 求める時刻 t_2，振動数 f_3 は

$$t_2 = \frac{l/2}{V + v_0} = \underline{\frac{l}{2(V + v_0)}}$$

変化する波長を λ_3 として

$$\begin{aligned} &(V + v_0) - v_0 = f_0\lambda_3 \\ &\therefore \quad f_3 = \frac{V + v_0}{\lambda_3} = \underline{\frac{V + v_0}{V}f_0} \end{aligned}$$

(4)

$$\text{聞こえ始めの時刻}:\frac{l/2}{v_0}=\underline{\frac{l}{2v_0}}$$

$$\text{聞こえなくなるときの時刻}:\frac{l}{2v_0}+\frac{l}{2v_0}+\frac{l/2}{V-v_0}=\underline{\frac{l}{v_0}+\frac{l}{2(V-v_0)}}$$

直接音の振動数 f_4 は変化する波長を λ_4 として

$$(V-v_0)+v_0=f_0\lambda_4$$
$$\therefore\quad f_4=\frac{V-v_0}{\lambda_4}=\frac{V-v_0}{V}f_0$$

よって，うなりの回数は

$$|f_3-f_4|=\underline{\frac{2v_0}{V}f_0}$$

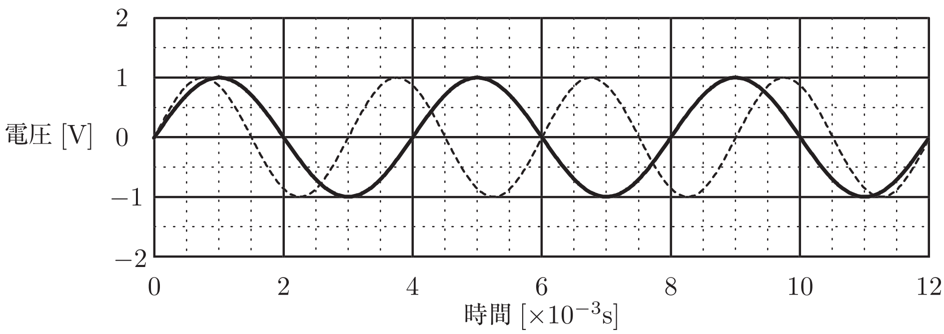
II　図 2 より，うなりの周期 $T_0[\mathrm{s}]=12\times10^{-3}$ s，音波 1，2 の周期を T_1，T_2 とすると $T_1[\mathrm{s}]=3.0\times10^{-3}$ s．ここで，うなりの振動数の関係より

$$\frac{1}{T_0}=\left|\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right|$$
$$\therefore\quad T_2[\mathrm{s}]=2.4\times10^{-3}\ \mathrm{s},\qquad \text{or}\qquad 4.0\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$

合成音の電圧が初めて極大，あるいは極小になるまでの時間は音波 1 よりも長くなっているので $T_2>T_1$ である．

$$\therefore\quad T_2[\mathrm{s}]=4.0\times10^{-3}\ \mathrm{s}$$

合成音の電圧の最大値がほぼ 2 V であることから，音波 2 の振幅は 1 V と判断できるので，求めるグラフは 下図 (実線).



【3】

《解答》

(1) あ ： $\underline{2nd}$

い ： $\underline{2n(d+\varDelta d)}$

う ： $\underline{1}$

え ： $2n(d+\varDelta d)-2nd=\lambda \qquad \therefore \quad \varDelta d=\underline{\dfrac{\lambda}{2n}}$

お ： $x_1=\dfrac{d}{\tan\theta}=\underline{\dfrac{Ld}{t}}$

か ： $x_2=\dfrac{L}{t}(d+\varDelta d)=\underline{\dfrac{L}{t}\left(d+\dfrac{\lambda}{2n}\right)}$

き ： $f=x_2-x_1=\underline{\dfrac{L\lambda}{2nt}}$

く ： (き) より，$t=\underline{\dfrac{L\lambda}{2nf}}$

(2) け ： (く) に数値を代入して，

$$t=\frac{50\times10^{-3}\times5.0\times10^{-7}}{2\times1.0\times1.0\times10^{-3}}=1.25\times10^{-5}\ (\mathrm{m})\fallingdotseq\underline{1.3\times10^{-5}}\ (\mathrm{m})$$

(3) こ ： (き) に数値を代入して，

$$f=\frac{50\times10^{-3}\times6.0\times10^{-7}}{2\times1.0\times1.25\times10^{-5}}=1.2\times10^{-3}\ (\mathrm{m}) \qquad \therefore \quad \underline{1.2}\ (\mathrm{mm})$$

(4) さ ： (き) において，f は屈折率 n に反比例するので，間隔は $1.0/1.3\fallingdotseq\underline{0.77}$ 倍.

(5) (き) より，可視光内で波長の長い赤色の光源を使い，すきまを屈折率最小の真空にする.

(6) 明線は同心円状に広がり，外側ほど球面の角度が急になるため間隔は狭くなる.

【4】

《解答》

(a)

$$n = \underline{\frac{\lambda_0}{\lambda}}$$

(b) 気体を入れると，B_2 を往復する際の位相の進みが増加する．この量が F における位相の差に等しく，

$$\Delta\phi = 2\pi\left(\frac{2l}{\lambda} - \frac{2l}{\lambda_0}\right) = \underline{\frac{4\pi l}{\lambda_0}(n-1)}$$

(c) 偶数

(d) 奇数

(e) 明るくなる条件は，整数 m を用いて，

$$\frac{4\pi l}{\lambda_0}(n-1) = 2\pi \cdot m$$

これに，$n = 1 + kp$ を代入すると，

$$p = \frac{\lambda_0}{2kl}m$$

これより，圧力が

$$\Delta p = \underline{\frac{\lambda_0}{2kl}} \qquad \cdots\cdots ①$$

増すたびに，F は明るくなる．

(f) ①より，

$$\begin{aligned} k = \frac{\lambda_0}{2l\Delta p} &= \frac{6.3\times10^{-7}}{2\times0.5\times2.3\times10^2} \\ &= \frac{6.3}{2.3}\times10^{-9} \end{aligned}$$

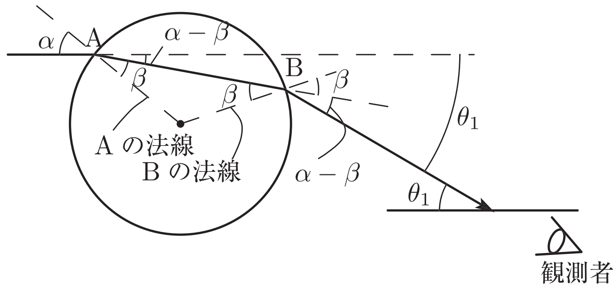
1 気圧での屈折率は，

$$\begin{aligned} n &= 1 + kp \\ &= 1 + \frac{6.3}{2.3}\times10^{-9}\times1.013\times10^5 \fallingdotseq \underline{1.00028} \end{aligned}$$

【5】

《解答》

(1) ① $\underline{\alpha-\beta}$



② $\underline{\alpha-\beta}$

③ $\theta_1 = \underline{2(\alpha-\beta)}$

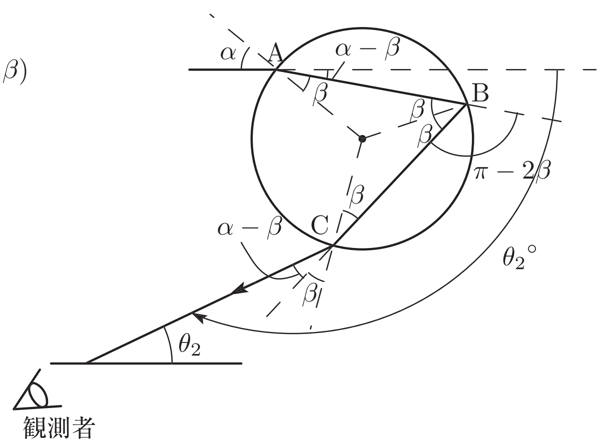
④ $\underline{\pi-2\beta}$

⑤ A，B，C での進行方向に対する時計回りの変化の和は

$\theta_2{}^{\circ} = (\alpha-\beta)+(\pi-2\beta)+(\alpha-\beta)$
$\quad = \pi+2\alpha-4\beta$

従って，

$\theta_2 = \pi-\theta_2{}^{\circ} = \underline{4\beta-2\alpha}$



⑥ $\underline{n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta}$

⑦ $\sin\alpha = \underline{\dfrac{b}{r}}$

⑧ $\underline{2}$

⑨ $\underline{42}$

(2) 点 B で反射した太陽光は b の値によらず 42° より小さい仰角に散乱されるから．

(3) 赤色，黄色，青色

(理由)
⑤ より仰角は β が増えると増え，⑥ より β は n_2 が減ると増える．また図 3 より n_2 は波長が長くなると減る．以上より仰角は波長が長くなると増大する．よって仰角の大きい順は波長の長い順となる．

添削課題

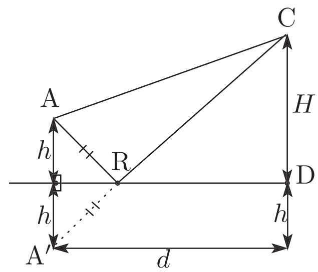
《解答》

(1) ア　$\underline{4}$（干渉）　　イ　$\underline{3}$（固定端）　　ウ　$\underline{9}$（逆位相）

(2) 振動数 f と波長 λ の関係は $f=\dfrac{c}{\lambda}$．これと受信機の受信領域から，

$$50\times10^6\ \mathrm{Hz}\leqq\frac{3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}}{\lambda}\leqq150\times10^6\ \mathrm{Hz}$$

$$\therefore\quad \underline{2.0\ \mathrm{m}\leqq\lambda\leqq6.0\ \mathrm{m}}$$



(3) 右図でアンテナ A の海面との対称点を A′ として，

$$\overline{\mathrm{AR}}+\overline{\mathrm{RC}}=\overline{\mathrm{A'C}}=\underline{\sqrt{(H+h)^2+d^2}}$$

(4) 反射での位相のずれを考慮して，

$$\sqrt{(H+h)^2+d^2}-\sqrt{(H-h)^2+d^2}=2m\times\frac{\lambda}{2}$$

$$\therefore\quad \underline{\sqrt{(H+h)^2+d^2}-\sqrt{(H-h)^2+d^2}=m\lambda}$$

(5) 題意と与えられた近似を用いて，

$$\sqrt{(H+h)^2+d^2}=d\left\{1+\left(\frac{H+h}{d}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq d\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{d}\right)^2\right\}$$

$$\sqrt{(H-h)^2+d^2}=d\left\{1+\left(\frac{H-h}{d}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq d\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{d}\right)^2\right\}$$

これより，(4) の式は，

$$\underline{\frac{2Hh}{d}=m\lambda}$$

(6) 与えられたデータから，λ について整理して，

$$\lambda=\frac{2\times186\ \mathrm{m}\times20\ \mathrm{m}}{m\times(2.4\times10^3\ \mathrm{m})}=\frac{31}{10m}\ \mathrm{m}$$

これと (2) の結論より，上式を満たす自然数は $m=1$ のみ．よって解の個数は 1 で，

$$\underline{\lambda=3.1\ \mathrm{m}}$$

配点

(1) 各 4 点　(2) 20 点　(3) 20 点　(4) 10 点　(5) 20 点　(6) 18 点

4章　電磁気演習

問題

■演習

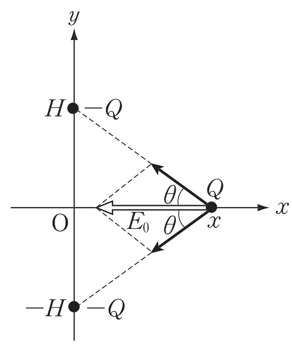
【1】

《解答》

(1) (a) 原点の電位を V_0 とすると　$V_0 = k_0\dfrac{-Q}{H} + k_0\dfrac{-Q}{H} = -\dfrac{2k_0Q}{H}$

よって，求める位置エネルギーの変化は　$Q(V_0 - 0) = \underline{-\dfrac{2k_0Q^2}{H}}$

(b) 右図より，$(x,\ 0)$ における電場の大きさ E_0 は



$$
\begin{aligned}
E_0 &= k_0\frac{Q}{\sqrt{x^2+H^2}^2} \times 2\cos\theta \\
&= k_0\frac{Q}{x^2+H^2} \times 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+H^2}} \\
&= \frac{2k_0Qx}{(x^2+H^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

正電荷は電場の方向に力を受けるから，受ける力の x 成分 F_x は

$$F_x = -QE_0 = \underline{-\frac{2k_0Q^2x}{(x^2+H^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

(c)

$$F_x = -\frac{2k_0Q^2x}{(x^2+H^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2k_0Q^2x}{H^3\left\{\left(\dfrac{x}{H}\right)^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}} \fallingdotseq -\frac{2k_0Q^2}{H^3}x$$

よって，加速度を α とすると，電荷の運動方程式より

$$m\alpha = -\frac{2k_0Q^2}{H^3}x$$

$$\alpha = -\frac{2k_0Q^2}{mH^3}x \qquad \therefore\quad \omega = \frac{Q}{H}\sqrt{\frac{2k_0}{mH}}$$

振幅は a，振動の中心は $(0,\ 0)$，正の最大変位から振動が始まるので

$$x = \underline{a\cos\left(\frac{Q}{H}\sqrt{\frac{2k_0}{mH}}\ t\right)}$$

(2) 求める仕事量を W とすると，x 軸上の電位はつねに 0 なので　$W = \underline{0}$

(3) 運動エネルギーと点電荷による位置エネルギー，一様な電場の仕事の関係から

$$\left(\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + k_0\frac{Q^2}{H}\right) - \left(\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + k_0\frac{Q^2}{Y+H}\right) = QEY$$

$Q \fallingdotseq 0$ より　　$k_0\dfrac{Q}{H} - k_0\dfrac{Q}{Y+H} = EY$

$$\{(Y+H)-H\}\, k_0Q = H(Y+H)EY$$

$Y \fallingdotseq 0$ より　　$k_0Q = H(Y+H)E$　　$\therefore\ \ Y = \underline{\dfrac{k_0Q}{HE} - H}$

【2】

《解答》

(1) $C = \underline{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d}}$

(2) 導体 D を挿入したコンデンサー K_1 を，図 1 に示すように容量 $3C$ の 2 つのコンデンサーで置き換える．K_1 上部の電荷を q とすると，電圧について，

$$V = \frac{q}{3C} + \frac{q}{3C} \qquad \therefore \quad q = \underline{\frac{3}{2}CV} \qquad \cdots\cdots ①$$

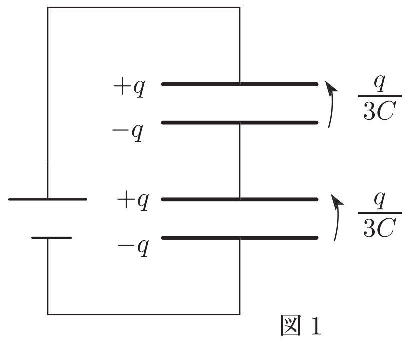


図 1

(3) K_2 の電位差を V_1 とする．図 2 で，破線内は外部とつながっていないから，いつでも電荷の和は 0 であるので，

$$-q + 3CV_1 + CV_1 = 0$$
$$\therefore \quad V_1 = \underline{\frac{3}{8}V} \qquad (\because \quad ①)$$

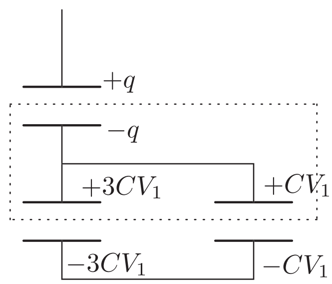


図 2

(4) K_2 上部の電荷 CV_1 と，導体 D の電荷 Q_1 との和は 0 である．よって，

$$\begin{aligned} Q_1 &= -CV_1 \\ &= \underline{-\frac{3}{8}CV} \end{aligned}$$

(5) (a) (4) と同様，K_2 上部の電荷 CV_n と導体 D の電荷 Q_n との和は 0 である．よって，

$$Q_n = \underline{-CV_n}$$

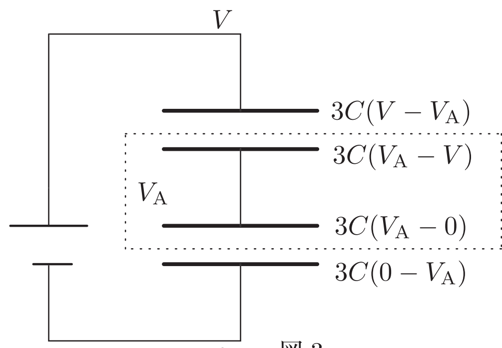


図 3

(b) K_1 下部の電位を 0，導体 D の電位を V_A とする．図 3 で，破線内の電荷の和が $-CV_n$ であるから，

$$-CV_n = 3C(V_A - V) + 3C(V_A - 0)$$

$$\therefore \quad V_A = \frac{V}{2} - \frac{V_n}{6}$$

導体 D 上面の電荷は，

$$3C(V_A - V) = \underline{-C\left(\frac{3}{2}V + \frac{V_n}{2}\right)}$$

(c) 図 4 で，破線内の電荷の和が 0 であるから，

$$0 = -C\left(\frac{3}{2}V + \frac{V_n}{2}\right) + 3CV_{n+1} + CV_{n+1}$$

$$\therefore \quad \underline{V_{n+1} = \frac{1}{8}V_n + \frac{3}{8}V}$$

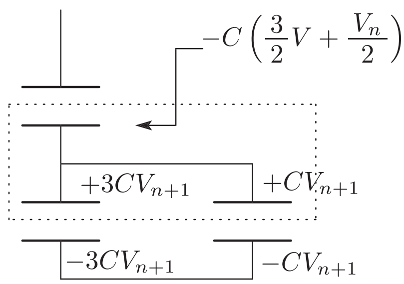


図 4

【3】

《解答》

(1) (a)

$$Q = \underline{\varepsilon_0 \frac{L^2}{d} V}$$

(b)

$$U_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 \frac{L^2}{d}} = \underline{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L^2}}$$

(2) (a)

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{C}} = \underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}\mathit{\Delta} x}$$

(b)

$$F = \underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 L^2}}$$

(3) (a) $x = 0$ で，

$$m\ddot{x} = F - mg > 0 \qquad \therefore \quad \underline{Q > \sqrt{2\varepsilon_0 L^2 mg}}$$

(b)

$$m\ddot{x} = -kx + F - mg = -k\left(x - \frac{F - mg}{k}\right)$$

初期条件を考慮して，

$$x_{\mathrm{M}} = 2\frac{F - mg}{k} = \underline{\frac{Q^2 - 2\varepsilon_0 L^2 mg}{k\varepsilon_0 L^2}}$$

(c) 電極間に働く力は x によらず一定なので，E_x も一定である．よって，$\underline{(ウ)}$.

(4)

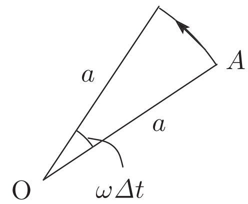
$$U_{\mathrm{C}} - U_{\mathrm{R_2}} = \underline{\frac{1}{2}}k{x_{\mathrm{M}}}^2 + \underline{mg}x_{\mathrm{M}}$$

【4】

《解答》

(1) (a) 右図の扇形部分の面積を通過するから，磁束の大きさは

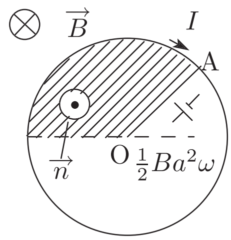
$$\Delta\phi = \underline{\frac{1}{2}Ba^2\omega\Delta t}$$



(b) 求める大きさ V は

$$V = \left|-\frac{\Delta\phi}{\Delta t}\right| = \underline{\frac{1}{2}Ba^2\omega}$$

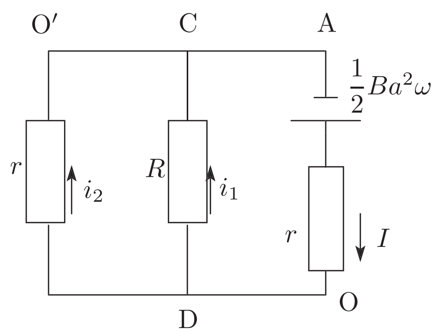
(c) 右図の斜線部分を貫く磁束が減少するのでレンツの法則により A→O の向きに誘導起電力が生じる．電流の大きさを I とすると，



$$RI + rI = \frac{1}{2}Ba^2\omega$$

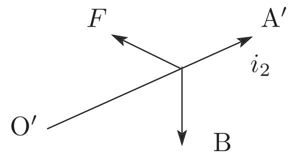
$$\therefore \quad I = \underline{\frac{Ba^2\omega}{2(R+r)}} \qquad (\underline{\mathrm{D} \to \mathrm{C}}\text{の向き})$$

(2) (a) 等価回路は右図．左右各ループ，時計回り正の回路の方程式は，



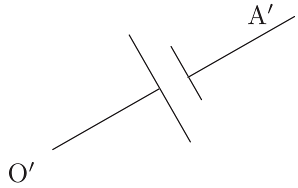
$$rI + Ri_1 = \frac{1}{2}Ba^2\omega$$
$$ri_2 - Ri_1 = 0$$
$$I = i_1 + i_2$$
$$\therefore \quad i_2 = \underline{+\frac{R}{r(2R+r)} \cdot \frac{1}{2}Ba^2\omega}$$

(b) O′ →A′ の向きに電流が流れるので，右図より，電流 i_2 が受けるローレンツ力は右側の金属棒の回転と <u>同方向</u>.



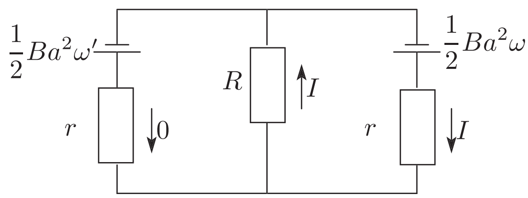
(3) (a) ローレンツ力 0(角速度一定) ゆえ，$\underline{0}$.

(b) (1)(c) と同様に，$\underline{\dfrac{1}{2}Ba^2\omega'}$. $\underline{\mathrm{O'}}$ が高い.



(c) 等価回路は右図．左右各ループ時計回り正の回路の方程式は

$$rI + RI = \frac{1}{2}Ba^2\omega$$
$$r \cdot 0 - RI = -\frac{1}{2}Ba^2\omega'$$
$$\therefore \quad \omega' = \underline{\frac{R}{R+r}\omega}$$



(d) (c) で，

$$\omega' = \frac{R}{R+r}\omega \to \underline{0} \quad (R \to 0)$$
$$\omega' = \frac{1}{1+\dfrac{r}{R}}\omega \to \underline{\omega} \quad (R \to \infty)$$

＜参考＞ $R \to 0$ では CD 間の電圧が 0 となるので，O′A′ 間の誘導起電力も 0 となる．

$$\therefore \quad \omega' \to 0$$

$R \to \infty$ では OD 間の電圧が 0 となるので，O′A′ 間と OA 間の誘導起電力は同じになる．

$$\therefore \quad \omega' \to \omega$$

【5】

《解答》

(1) 4 つの抵抗からなる回路がホイートストン・ブリッジ回路の平衡条件を満たす．求める抵抗値 R_{X} は,

$$R_{\mathrm{X}} \cdot R_2 = R_1 \cdot R_3$$
$$\therefore \quad R_{\mathrm{X}} = \underline{\frac{R_1 R_3}{R_2}}$$

(2) $t=0$ において，コイルには電流は流れない．つまり A，B を右向きに流れる独立した電流 I_{A}，I_{B} を考えることができる．両者は,

$$R_1 I_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{Y}} I_{\mathrm{A}} = E \qquad \therefore \quad I_{\mathrm{A}} = \frac{E}{R_1 + R_{\mathrm{Y}}}$$
$$R_2 I_{\mathrm{B}} + R_3 I_{\mathrm{B}} = E \qquad \therefore \quad I_{\mathrm{B}} = \frac{E}{R_2 + R_3}$$

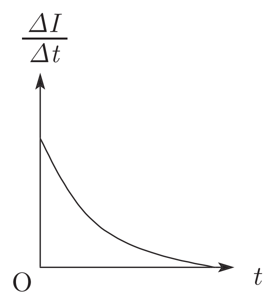
これより，B 点に対する A 点の電位 E_{AB} は,

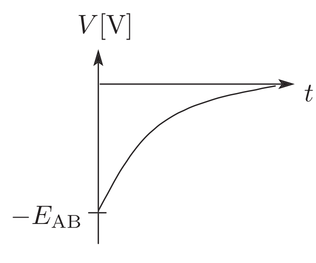
$$E_{\mathrm{AB}} = R_{\mathrm{Y}} I_{\mathrm{A}} - R_3 I_{\mathrm{B}} = \underline{\left(\frac{R_{\mathrm{Y}}}{R_1 + R_{\mathrm{Y}}} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) E}$$

(3) コイルに生じる誘導起電力は，電流の向きを正として,

$$V = \underline{-L\frac{\Delta I}{\Delta t}}$$

$\Delta I/\Delta t$ のグラフは図 2 のグラフの傾きから右図のようになるので，V のグラフは <u>右下図</u> のようになる．





(4) <u>S_2 を閉じた直後の自己誘導起電力の大きさは E_{AB} であり，自己インダクタンスが L のときと同じである．しかし，$L' > L$ なので，$\frac{\Delta I}{\Delta t}$ は小さくなる．つまり電流の変化の立ち上がりが鈍くなる．また，最終的に電流の変化がなくなり，自己誘導起電力が 0 となるので，電流の終端値は変わらない．</u>この事実を表すグラフは <u>(e)</u>.

添削課題

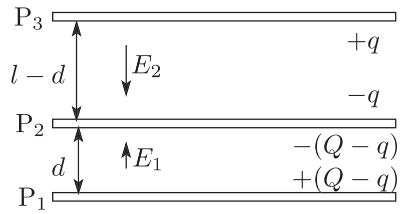
《解答》

(1) (ア) 電荷の平面分布の重ね合わせから，電場は P_1 から P_2 向きに，

$$E_0 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{S} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q}{S} = \underline{\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S}}$$

(イ) $V_0 = E_0 d = \underline{\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q}{S}d}$

(2) (ウ) 電荷分布と電場の様子は右図．共通電位差について，



$$\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{S}(l-d) = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q-q}{S}d$$

$$\therefore\quad q = \underline{\frac{d}{l}Q}$$

(エ)

$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{Q-q}{S} = \underline{\left(1-\frac{d}{l}\right)\frac{Q}{\varepsilon_0 S}}$$

$$E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{S} = \underline{\frac{d}{l}\frac{Q}{\varepsilon_0 S}}$$

(オ) E_1，E_2 を用いて上向き正とする合力は，

$$\left(-\frac{E_2}{2}+\frac{E_1}{2}\right)(-Q) = \left(\frac{2d}{l}-1\right)\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

これより，

$$\underline{d > \frac{l}{2}\text{で上，}d < \frac{l}{2}\text{で下．}}$$

(カ) $V_1 = \underline{E_1 d = \left(1-\frac{d}{l}\right)V_0}$

配点

(1) (ア)10 点，(イ)10 点　　(2) (ウ)30 点，(エ) 各 10 点，(オ)20 点，(カ)10 点

５章　電磁気・原子演習

問題

■演習

【1】

《解答》

(1) スイッチを a 側に閉じて十分長い時間が経過したのちに，抵抗 1 に流れる電流を i とおくと

$$V_0 - R_1 i = 0 \qquad \therefore \quad i = \frac{V_0}{R_1}$$

よって，抵抗 1 で消費される電力を P_1 とおくと

$$P_1 = R_1 i^2 = \underline{\frac{{V_0}^2}{R_1}}$$

(2) スイッチを開く前にコンデンサーに蓄えられていた静電エネルギーとコイルに蓄えられていたエネルギーがスイッチを開いた直後から回路で消費されるので

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}C{V_0}^2 = \underline{\frac{1}{2}L\left(\frac{V_0}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{2}C{V_0}^2}$$

(3) (a) 回路に流れる交流電流の実効値を I_e，抵抗 1 で消費される平均電力を $\overline{P}$ とおくと

$$\overline{P} = R_1 {I_\mathrm{e}}^2 = R_1\left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \underline{\frac{1}{2}R_1 {I_0}^2}$$

(b) $E = 0$ であるから $\mathrm{P_4}$ に対する $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ の電位は等しいので，$\mathrm{P_2P_4}$ 間の電位差を V とおくと

$$V = R_1 I = R_1 I_0 \sin\omega t$$

よって，$\mathrm{P_3P_4}$ 間の電位差も V であり，コンデンサーを流れる電流の位相は電圧の位相に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 進んでおり，コンデンサーのリアクタンスは $\dfrac{1}{\omega C}$ であるから，$\mathrm{P_3}$ から $\mathrm{P_4}$ に流れる電流を I' とおくと

$$I' = \frac{R_1 I_0}{1/\omega C}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\omega C R_1 I_0 \cos\omega t}$$

(c) $\mathrm{P_1P_3}$ 間の電位差を V' とおくと

$$V' = R_2 I' = \omega C R_1 R_2 I_0 \cos\omega t \qquad \cdots\cdots ①$$

よって，$\mathrm{P_4}$ に対する $\mathrm{P_1}$ の電位は

$$V + V' = R_1 I_0 \sin\omega t + \omega C R_1 R_2 I_0 \cos\omega t = \underline{R_1 I_0(\sin\omega t + \omega C R_2 \cos\omega t)}$$

(d) $\mathrm{P_1P_2}$ 間の電位差は，$\mathrm{P_1P_3}$ 間の電位差と同じく V' である。コイルにかかる電圧の位相は流れる電流の位相に対して $\dfrac{\pi}{2}$ 進んでおり，コイルのリアクタンスは ωL であるから

$$V' = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega L I_0 \cos\omega t \qquad \cdots\cdots ②$$

よって，①，②より

$$\omega C R_1 R_2 I_0 \cos\omega t = \omega L I_0 \cos\omega t \qquad \therefore \quad L = \underline{C R_1 R_2}$$

【2】

《解答》

(1) 電子の運動量を p とおくと

$$\underline{\lambda} = \frac{h}{p} = \underline{\frac{h}{mV}}$$

(2) 定常波ができるには，軌道の長さ (円周) が波長の整数倍であればよいから

$$\underline{2\pi r = n\lambda}$$

(3) 円運動の運動方程式より

$$m\frac{V^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}$$

ここで，(1) と (2) より　$2\pi r = n\lambda = n\dfrac{h}{mV}$　　$\therefore\quad V = \dfrac{nh}{2\pi rm}$

よって，$\dfrac{m}{r}\left(\dfrac{nh}{2\pi rm}\right)^2 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{e^2}{r^2}$　　$\therefore\quad r = \underline{\dfrac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2}}$

(4) 力学的エネルギーは，運動エネルギーとクーロン力による位置エネルギーの和なので

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r}$$

ここで，　$m\dfrac{V^2}{r} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{e^2}{r^2}$　より　$mV^2 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\dfrac{e^2}{r}$ なので

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r}\right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r} = \underline{-\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}}$$

(5) (3) を (4) に代入して，リュードベリ定数 $R = \dfrac{me^4}{8{\epsilon_0}^2 ch^3}$ を用いて表すと

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0}\cdot\frac{\pi m e^2}{\epsilon_0 h^2 n^2} = -\frac{me^4}{8{\epsilon_0}^2 h^2 n^2} = -\frac{me^4}{8{\epsilon_0}^2 ch^3}\cdot\frac{ch}{n^2} = -Rch\frac{1}{n^2}$$

これは，内側から n 番目の軌道を運動する電子の力学的エネルギーを表すので，内側から 4 番目の軌道と最も内側の軌道のエネルギー差を $\varDelta E$ とおくと

$$\varDelta E = -Rch\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{15}{16}Rch$$

エネルギー差 $\varDelta E$ に相当するエネルギーの光を放射するので

$$h\frac{c}{\lambda} = \frac{15}{16}Rch \qquad \therefore\quad \lambda = \frac{16}{15R} = \frac{16}{15\times 1.10\times 10^7} \fallingdotseq \underline{9.7\times 10^{-8}(\mathrm{m})}$$

【3】

《解答》

① $\underline{\dfrac{c}{\lambda}}$　② $\underline{h\nu}$　③ $\underline{\dfrac{h\nu}{c}}$　④ 光子

⑤ 粒子　⑥ 波動　⑦ $\underline{\dfrac{h}{mv}}$　⑧ $\underline{\dfrac{1}{2}mv^2}$

⑨ 回折　⑩ $\underline{eV_{\mathrm{H}} = \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{M}}}^2}$　⑪ $\underline{eV_{\mathrm{H}}}$　⑫ 仕事関数

⑬ $\underline{\dfrac{hc}{\lambda_{\mathrm{H}}} - eV_{\mathrm{H}}}$

(1) 電極 T に当たる光子の最大運動エネルギーを K とおくと，⑩より P を飛び出した直後の光電子の最大運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{M}}}^2$ であり，さらに加速電圧 V_{T} によって仕事をされるので

$$K = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{M}}}^2 + eV_{\mathrm{T}} = \underline{e(V_{\mathrm{T}} + V_{\mathrm{H}})}$$

よって，光電子の運動量を p，波長を λ_e とおくと

$$p = \sqrt{2mK} = \underline{\sqrt{2me(V_{\mathrm{T}} + V_{\mathrm{H}})}} \quad , \quad \lambda_e = \frac{h}{p} = \underline{\frac{h}{\sqrt{2me(V_{\mathrm{T}} + V_{\mathrm{H}})}}}$$

(2) 光のエネルギーを E とおくと

$$E = \frac{hc}{\lambda_{\mathrm{H}}} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \times 3.0 \times 10^8}{3.3 \times 10^{-7} \times 1.6 \times 10^{-19}} \fallingdotseq \underline{3.8(\mathrm{eV})}$$

⑬より　$W = E - eV_{\mathrm{H}} \fallingdotseq 3.8 - 1.3 = \underline{2.5(\mathrm{eV})}$

(3) 電流は 1 秒間に流れる電荷の電気量であるから，1 秒間に流れ込む光電子の個数を n とおくと

$$n = \frac{3.2 \times 10^{-7}}{1.6 \times 10^{-19}} = \underline{2.0 \times 10^{12}(\text{個})}$$

(4) $\dfrac{hc}{\lambda_{\mathrm{L}}} = eV_{\mathrm{L}} + W$，$\dfrac{hc}{\lambda_{\mathrm{H}}} = eV_{\mathrm{H}} + W$ であり，図 2 より $V_{\mathrm{L}} < V_{\mathrm{H}}$ であるから

$$\frac{hc}{\lambda_{\mathrm{L}}} < \frac{hc}{\lambda_{\mathrm{H}}} \qquad \therefore\ \lambda_{\mathrm{H}} < \lambda_{\mathrm{L}} \text{ より} \quad \underline{(\mathrm{c})}$$

【4】

《解答》

ア　$\underline{\text{固有 (特性)X 線}}$

イ　$\underline{eV}$

ウ　$eV = h\dfrac{c}{\lambda_0}$ より $\lambda_0 = \underline{\dfrac{hc}{eV}}$

エ　$\underline{\dfrac{ch}{\lambda}}$

オ　$\underline{\dfrac{h}{\lambda}}$

カ　$\underline{\dfrac{ch}{\lambda} = \dfrac{ch}{\lambda'} + \dfrac{1}{2}mv^2}$

キ　$\underline{\dfrac{h}{\lambda} = +\dfrac{h}{\lambda'}\cos\phi + mv\cos\theta}$

ク　入射 X 線の振動数を ν[Hz] とおくと

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3.0 \times 10^8}{2.5 \times 10^{19}} = 1.2 \times 10^{-11}$$

$\phi = 90^\circ$ のとき　$\lambda' - \lambda = 2.4 \times 10^{-12}$　であるから

$$\lambda' = 2.4 \times 10^{-12} + 1.2 \times 10^{-11} = 1.44 \times 10^{-11} \fallingdotseq \underline{1.4 \times 10^{-11}}\ \text{(m)}$$

ケ　カより

$$\frac{1}{2}mv^2 = ch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$
$$= 3.0 \times 10^8 \times 6.6 \times 10^{-34}\left(\frac{1}{1.2 \times 10^{-11}} - \frac{1}{1.44 \times 10^{-11}}\right) \fallingdotseq \underline{2.8 \times 10^{-15}}\ \text{(J)}$$

コ　ラウエ斑点

【5】

《解答》

(1) (ア) ～(エ)　原子番号 6 は陽子数，質量数 14 は陽子数と中性子数の和を表すから，放射性炭素 $^{14}_{6}C$ は　$\underline{6}$ 個の $\underline{陽子}$ と $\underline{8}$ 個の $\underline{中性子}$　とからなる原子核をもつ.

(オ) $^{14}_{7}N+^{1}_{0}n \rightarrow ^{14}_{6}C + \underline{^{1}_{1}H}$

(カ) 炭素 $^{12}_{6}C$ の個数を m 個とすると

$$m \times 1 \times 10^{-12} = 1 \qquad \therefore \quad m = \underline{1 \times 10^{12}}\ (\text{個})$$

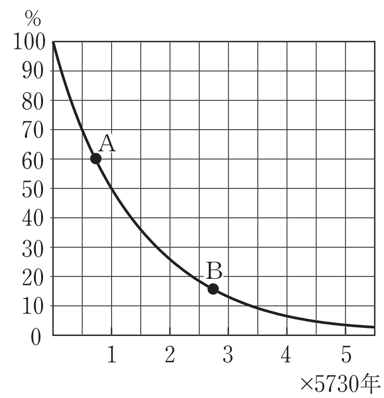
(キ) (ク)　質量数は変化せず，原子番号が 1 大きくなっているので $\underline{\beta}$ 崩壊，すなわち $\underline{電子}$ を放出する.

(ケ) 5730 年は半減期であるから，放射性炭素 $^{14}_{6}C$ の原子数は 50 %に減少し，放射能の強さも $\underline{50}$ %に減少する.

(コ) 原子数が 25 %に減少する時間は，半減期の 2 倍であるから

$$5730 \times 2 = \underline{11460}\ (\text{年後})$$

(2) $\underline{右図}$.



(3) グラフより

A ：　$5730 \times 0.75 \fallingdotseq \underline{4300\ (\text{年前})}$

B ：　$5730 \times 2.75 \fallingdotseq \underline{15800\ (\text{年前})}$

P3T

難関大物理／難関大物理 T

Z-KAI

会員番号	

氏　名	