M2JCR

冬期講習

解答

Z会東大進学教室

高２東大理系数学Ⅲ導入

問題

【1】(1) 与式を平方完成すると

$$(y-2)^2 = 4(x+1)$$

これは，放物線

$$y^2 = 4x \quad \cdots ①$$

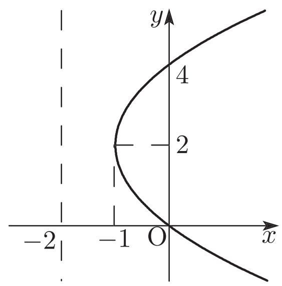
を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである．① の焦点，準線，頂点および対称軸は

$$\begin{cases} \text{焦点} : (1,\ 0), \quad \text{準線} : x = -1 \\ \text{頂点} : \text{原点}, \quad \text{対称軸} : x\ \text{軸} \end{cases}$$

であるから，求める焦点，準線，頂点および対称軸は

$$\begin{cases} \text{焦点} : (0,\ 2), \quad \text{準線} : x = -2 \\ \text{頂点} : (-1,\ 2), \quad \text{対称軸} : y = 2 \end{cases}$$

また，グラフは右図のようになる．



(2) まず，放物線の頂点の座標を求める．焦点 F(2, 1) から準線 $x = 4$ に下ろした垂線の足は H(4, 1) であるから，FH の中点 (3, 1) が頂点である．

全体を x 軸方向に -3，y 軸方向に -1 だけ平行移動して，頂点を原点に移すと

$$\begin{cases} \text{焦点} \quad \mathrm{F}(2,\ 1) \to \mathrm{F}'(-1,\ 0) \\ \text{準線} \quad \ell : x = 4 \to \ell' : x = 1 \end{cases}$$

ここで，F$'$ を焦点，ℓ' を準線とする放物線の方程式は

$$y^2 = 4 \cdot (-1)x \qquad \therefore \quad y^2 = -4x$$

求める方程式は，これを x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動して

$$(y-1)^2 = -4(x-3)$$

【2】(1) 中心（2 焦点の中点）が原点であり，x 軸上に焦点をもつことから，求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \quad \cdots ①$$

とおける．このとき，焦点が $(\pm 1,\ 0)$ であることから

$$\sqrt{a^2-b^2}=1 \qquad \therefore \quad a^2-b^2=1 \quad \cdots ②$$

一方，短軸の長さが 4 であることから

$$2b=4 \qquad \therefore \quad b=2 \quad \cdots ③$$

②，③ より $a=\sqrt{5}$，$b=2$ を得るから，これらを ① に代入して

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$$

(2) 与式を平方完成すると

$$3(x-1)^2+(y-3)^2=3 \qquad \therefore \quad (x-1)^2+\frac{(y-3)^2}{3}=1$$

これは楕円

$$x^2+\frac{y^2}{3}=1 \quad \cdots ④$$

を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．④ の焦点は

$$\left(0,\ \pm\sqrt{2}\right)$$

であるから，求める焦点はこれを平行移動して

$$\left(1,\ 3\pm\sqrt{2}\right)$$

また，④ において長軸，および短軸の長さの半分は，それぞれ $\sqrt{3}$，1 である．よって，④ によって囲まれる部分の面積，すなわち求める面積は

$$\pi\times\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}\pi$$

【3】(1) 与えられた双曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{3^2}-\dfrac{(y-4)^2}{4^2}=1$ は，双曲線

$$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1 \quad \cdots ①$$

を x 軸方向に 1，y 軸方向に 4 だけ平行移動したものである．① の焦点は

$$(\pm 5,\ 0)$$

であるから，求める焦点はこれを平行移動して

$$(6,\ 4),\quad (-4,\ 4)$$

また，① の漸近線は $y=\pm\dfrac{4}{3}x$ であるから，求める漸近線はこれを平行移動して

$$y-4=\pm\frac{4}{3}(x-1)$$
$$\therefore\quad y=\frac{4}{3}x+\frac{8}{3},\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{16}{3}$$

(2) 中心が原点であり，y 軸上に焦点をもつことから，求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0) \quad \cdots ②$$

とおける．このとき，焦点の 1 つが $(0,\ 6)$ であることから

$$\sqrt{a^2+b^2}=6 \qquad \therefore\quad a^2+b^2=36 \quad \cdots ③$$

一方，2 頂点間の距離が 10 であることから

$$2b=10 \qquad \therefore\quad b=5 \quad \cdots ④$$

③，④ より $a=\sqrt{11}$，$b=5$ を得るから，これらを ② に代入して

$$\frac{x^2}{11}-\frac{y^2}{25}=-1$$

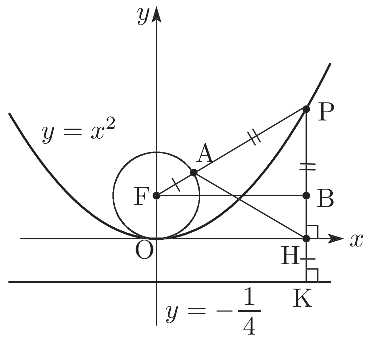
【4】(1) 与えられた放物線の式を変形して

$$y = x^2 \iff x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} y$$

この放物線の焦点は

$$\mathrm{F}\left(0,\ \frac{1}{4}\right) \qquad \therefore\quad p = \frac{1}{4}$$

(2) (1) より，準線は $y = -\dfrac{1}{4}$ であり，P から準線に下ろした垂線の足を K とすると，放物線の定義より



$$\mathrm{PF} = \mathrm{PK}$$

が成り立つ．また，円の方程式が

$$x^2 + (y - p)^2 = p^2$$

$$\iff x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

と表されることから

$$\mathrm{FA} = \frac{1}{4}$$

よって

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PA} \quad \cdots ①$$

がつねに成り立つから, ① のもとで, △PAH が正三角形という条件は, $\angle\mathrm{APH} = 60^\circ$ と同値である．このとき，F から PH に下ろした垂線の足を B とすると

$$\mathrm{PB} = \frac{\mathrm{FB}}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{PF} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{FB}$$

であることから

$$\begin{cases} \mathrm{PH} = \mathrm{PB} + \mathrm{BH} = \dfrac{\mathrm{FB}}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4} \\ \mathrm{PA} = \mathrm{PF} - \mathrm{FA} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{FB} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

これらを ① に代入して

$$\frac{\mathrm{FB}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{FB} - \frac{1}{4} \qquad \therefore\quad \mathrm{FB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって

$$\mathrm{PH} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

したがって

$$\triangle\mathrm{PAH} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{64}$$

【5】x 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した図形を考えると

$$「楕円\ C : \frac{x^2}{2}+y^2=1\ は,\ 円\ C' : x^2+y^2=1」$$

に移る．また，この変換で，A(2, 0)，P，Q，および PQ の中点 M が移る点をそれぞれ，A′，P′，Q′，M′ とおくと

$$\mathrm{A}'\ \left(\sqrt{2},\ 0\right)$$

であり，M′ は C' の弦 P′Q′ の中点となるから，円の性質から

$$\angle \mathrm{OM'A'}=90^\circ$$

となる．よって，M′ は OA′ を直径とする円

$$\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

の周上にあり，かつ C' の内部にある（図 1）．この円弧の上端を T′ とおくと，△OT′A′ が直角二等辺三角形となることから

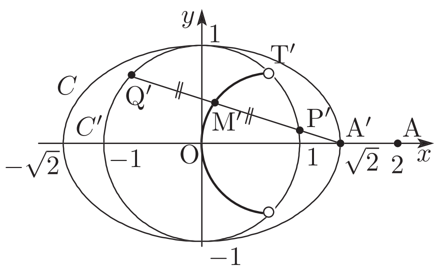
$$\mathrm{T}'\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

したがって，M′ の軌跡は

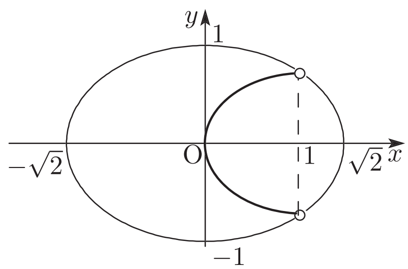
$$「円 : \left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\ の\ 0 \leqq x < \frac{1}{\sqrt{2}}\ の部分」$$

である．求める M の軌跡はこの円弧を x 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍した図形であるから

$$「楕円\ (x-1)^2+2y^2=1\ の\ 0 \leqq x < 1\ の部分」$$



〔図 1〕



〔図 2〕

問題

【1】(1) 全体を x 軸方向に 1 だけ平行移動すると

$$\begin{cases} y^2=-8(x+1) \quad \to \quad y^2=-8x & \cdots ① \\ \text{接点}:(-3,\ -4) \quad \to \quad \text{接点}:(-2,\ -4) & \cdots ② \end{cases}$$

放物線 ① の接点 ② における接線の方程式は

$$-4y=-4(x-2)$$
$$\therefore\quad x-y-2=0$$

これを x 軸方向に -1 だけ平行移動して，求める接線の方程式は

$$(x+1)-y-2=0$$
$$\therefore\quad x-y-1=0$$

≪注≫

$y^2 \to -4y$，$2x \to x-3$ の置き換えを与式にそのまま行うと

$$-4y=-4(x-3)-8$$

これを整理すると，接線の方程式 $x-y-1=0$ が得られる．

あるいは，接線の方程式を $y=m(x+3)-4$ として，これと $y^2=-8(x+1)$ より，y を消去して得られる x の 2 次方程式が重解をもつことから，m の値を求めてもよい．

(2) 与えられた楕円を $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ $\cdots$③ とし，接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とおく．このとき，この点における ③ の接線は

$$\frac{x_0x}{3}+\frac{y_0y}{2}=1 \quad \cdots ④$$

④ が点 $(-2,\ 0)$ を通ることから

$$-\frac{2}{3}x_0=1$$
$$\therefore\quad x_0=-\frac{3}{2} \quad \cdots ⑤$$

一方，接点 $(x_0,\ y_0)$ は ③ 上の点であるから

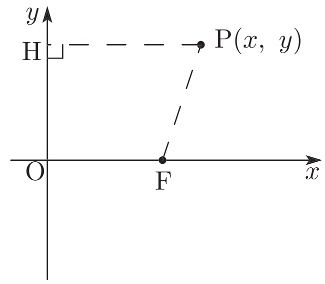
$$\frac{{x_0}^2}{3}+\frac{{y_0}^2}{2}=1 \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥ より，$x_0=-\dfrac{3}{2}$，$y_0=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得るから，これらを ④ に代入して

$$-\frac{1}{2}x\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}y=1$$
$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{2}(x+2)$$

【2】まず，e に特定の値を代入せずに点 P の軌跡を表す方程式を求めてみよう．

P$(x,\ y)$ とすると，題意より



$$\mathrm{PF} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$$
$$\mathrm{PH} = |x|$$

よって，$e = \dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ より

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2} = e|x|$$

辺々 0 以上であるから，2 乗しても同値で

$$(x-3)^2+y^2 = e^2x^2$$
$$\therefore\quad (1-e^2)x^2+y^2-6x+9=0 \quad \cdots ①$$

(1) ① において $e=1$ とすると

$$y^2-6x+9=0 \qquad \therefore\quad 放物線 : y^2 = 6\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

(2) ① において $e=\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\frac{3}{4}x^2+y^2-6x+9=0 \iff 3x^2+4y^2-24x+36=0$$
$$\therefore\quad 楕円 : \frac{(x-4)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

(3) ① において $e=2$ とすると

$$-3x^2+y^2-6x+9=0 \iff 3x^2-y^2+6x-9=0$$
$$\therefore\quad 双曲線 : \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

【3】2 接線の傾きを m，$-\dfrac{1}{m}$ $(m \neq 0)$ とおくと，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ における 2 接線の方程式は

$$\begin{cases} y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2} & \cdots ① \\ y = -\dfrac{1}{m}x \pm \sqrt{\dfrac{a^2}{m^2}+b^2} & \cdots ② \end{cases}$$

と表される．① より

$$y - mx = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \cdots ③$$

② より

$$my + x = \pm\sqrt{a^2+b^2m^2} \cdots ④$$

③，④ の両辺を平方して

$$y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2m^2 + b^2$$
$$m^2y^2 + 2mxy + x^2 = a^2 + b^2m^2$$

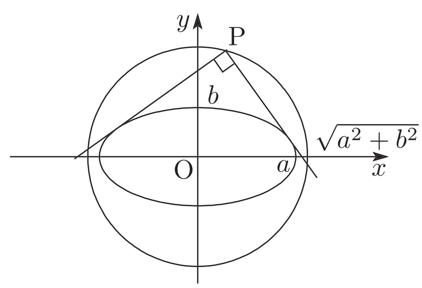
辺々を加えて

$$(1+m^2)(x^2+y^2) = (1+m^2)(a^2+b^2)$$

$1+m^2 \neq 0$ より

$$x^2+y^2 = a^2+b^2$$

これは，原点を中心とする半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円である（$m=0$ のときも成り立つ）．
≪注≫
この軌跡の円を楕円の準円という．



【4】(1) P から $y=x^2$ へ引いた 2 本の接線の接点を，それぞれ

$$\mathrm{A}(x_1,\ y_1),\quad \mathrm{B}(x_2,\ y_2)$$

とおく．このとき，接線の方程式は，それぞれ

$$\frac{1}{2}(y+y_1)=x_1x,\quad \frac{1}{2}(y+y_2)=x_2x$$

となり，これらはともに点 P$(1,\ -1)$ を通るから

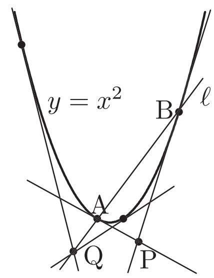
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(-1+y_1)=x_1,\quad \frac{1}{2}(-1+y_2)=x_2\\ \iff\ & y_1=2x_1+1,\quad y_2=2x_2+1\end{aligned}$$

これは A，B が直線 $y=2x+1$ 上にあることを表す．したがって，ℓ の方程式は

$$y=2x+1$$

(2) Q$(a,\ b)$ は $y=2x+1$ 上にあるから

$$b=2a+1\ \cdots\cdots ①$$



Q から引いた 2 本の接線の接点を C$(x_3,\ y_3)$，D$(x_4,\ y_4)$ とすると，接線の方程式は

$$\frac{1}{2}(y+y_3)=x_3x,\quad \frac{1}{2}(y+y_4)=x_4x$$

であり，これらはともに Q$(a,\ b)$ を通るから

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(b+y_3)=x_3a,\quad \frac{1}{2}(b+y_4)=x_4a\\ \iff\ & y_3=2ax_3-b,\quad y_4=2ax_4-b\end{aligned}$$

よって，直線 m の方程式は $y=2ax-b$ となり，$x=1$ のとき

$$y=2a-b=-1\quad (\because\ ①)$$

すなわち，m は P$(1,\ -1)$ を通る．〔証明終〕

≪注≫

(1) の直線 ℓ を「P に関する $y=x^2$ の極線」と呼ぶ．

また，一般の 2 次曲線についても (2) のような性質が成り立つ．

【5】(1) $\dfrac{x^2}{5+k}+\dfrac{y^2}{3+k}=1$ $\cdots$① が点 $(a,\ b)$ を通るとき

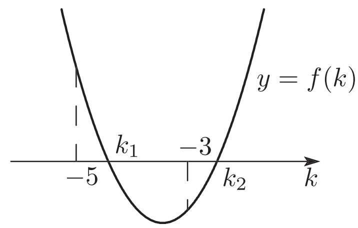
$$\frac{a^2}{5+k}+\frac{b^2}{3+k}=1$$

k について整理すると

$$a^2(3+k)+b^2(5+k)=(5+k)(3+k)$$
$$\therefore\quad k^2-(a^2+b^2-8)k-(3a^2+5b^2-15)=0\quad\cdots②$$

② の左辺を $f(k)$ とおくと，$ab \fallingdotseq 0$ より

$$\begin{cases} f(-5)=2a^2>0 \\ f(-3)=-2b^2<0 \end{cases}$$



よって，$f(k)$ のグラフは右図のようになるから，② は異なる 2 つの実数解 k_1，k_2 $(k_1<k_2)$ をもち

$$-5<k_1<-3<k_2$$

が成り立つ．ここで，$k=k_1$ のとき

$$5+k_1>0,\quad 3+k_1<0$$

よって，① は双曲線となる．

一方，$k=k_2$ のとき

$$5+k_2>0,\quad 3+k_2>0$$

よって，① は楕円となる．

以上より，題意をみたす曲線は 2 つあって，その 1 つは楕円，他の 1 つは双曲線である．〔証明終〕

(2) (1) より，2 曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{5+k_1}+\frac{y^2}{3+k_1}=1,\quad \frac{x^2}{5+k_2}+\frac{y^2}{3+k_2}=1$$

と表せ，これより，交点 $(a,\ b)$ におけるこれらの接線の方程式は

$$\frac{ax}{5+k_1}+\frac{by}{3+k_1}=1,\quad \frac{ax}{5+k_2}+\frac{by}{3+k_2}=1$$

よって，これらの法線ベクトル

$$\overrightarrow{\ell_1}=\left(\frac{a}{5+k_1},\ \frac{b}{3+k_1}\right),\quad \overrightarrow{\ell_2}=\left(\frac{a}{5+k_2},\ \frac{b}{3+k_2}\right)$$

が直交することを示せばよい．そこで，2 つのベクトルの内積

$$\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\ell_2}=\frac{a^2}{(5+k_1)(5+k_2)}+\frac{b^2}{(3+k_1)(3+k_2)}\quad\cdots③$$

を考え，この値が 0 になることを示す．② において，解と係数の関係より

$$\begin{cases} k_1+k_2=a^2+b^2-8 \\ k_1k_2=-(3a^2+5b^2-15) \end{cases}$$

これを用いると

$$\begin{cases} (5+k_1)(5+k_2) = 25+5(k_1+k_2)+k_1k_2 = 2a^2 \\ (3+k_1)(3+k_2) = 9+3(k_1+k_2)+k_1k_2 = -2b^2 \end{cases}$$

であるから，これらを ③ に代入して

$$\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\ell_2} = \frac{a^2}{2a^2}+\frac{b^2}{-2b^2} = 0$$

よって，$\overrightarrow{\ell_1}$，$\overrightarrow{\ell_2}$ は直交する．すなわち，交点における 2 曲線の接線は直交する．

〔証明終〕

3章　媒介変数表示

問題

【1】(1) $x=t^2+4t$，$y=t-1$ より，t を消去して

$$x=(y+1)^2+4(y+1)=y^2+6y+5$$

y はすべての実数を動くので，求める曲線は

$$\text{放物線}: x=y^2+6y+5$$

(2) $x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t^2}{1+t^2}$ より

$$x+y=\frac{1+t^2}{1+t^2}=1$$

ここで，x の動く範囲は，$t^2\geqq 0$ から

$$0<\frac{1}{1+t^2}\leqq 1 \qquad \therefore\quad 0<x\leqq 1$$

よって，求める曲線は

$$\text{直線の一部}: x+y=1 \quad (0<x\leqq 1)$$

(3) $x=2+3\cos\theta$，$y=3\sin\theta$ より

$$\frac{x-2}{3}=\cos\theta,\quad \frac{y}{3}=\sin\theta$$

これらを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると

$$\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1 \qquad \therefore\quad (x-2)^2+y^2=9$$

θ はすべての実数を動くので

$$-1\leqq\sin\theta\leqq 1 \qquad \therefore\quad -3\leqq y\leqq 3$$

よって，求める曲線は

$$\text{円}: (x-2)^2+y^2=9$$

(4) $x=3\cos\theta$，$y=-1+2\sin\theta$ より

$$\frac{x}{3}=\cos\theta,\quad \frac{y+1}{2}=\sin\theta$$

これらを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y+1}{2}\right)^2=1 \qquad \therefore\quad \frac{x^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

θ はすべての実数を動くので

$$-1\leqq\cos\theta\leqq 1 \qquad \therefore\quad -3\leqq x\leqq 3$$

よって，求める曲線は

$$\text{楕円}: \frac{x^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

(5) $x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=4\tan\theta$ より

$$\frac{x}{3}=\frac{1}{\cos\theta},\quad \frac{y}{4}=\tan\theta$$

これらを $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y}{4}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2 \qquad \therefore\quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

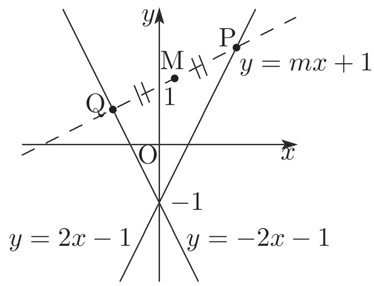
θ が $\cos\theta \fallingdotseq 0$ なる実数を動くとき，x の範囲は

$$x \leqq -3 \quad \text{または} \quad 3 \leqq x$$

よって，求める曲線は

$$\text{双曲線}: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

【2】題意より，点 $(0,\ 1)$ を通る直線は y 軸に平行ではなく，かつ 2 直線 $y=\pm 2x-1$ にも平行でもないから



$$y=mx+1 \quad (ただし，m \fallingdotseq \pm 2) \cdots ①$$

とおける．① と直線 $y=2x-1$ との交点を P とおくと

$$\mathrm{P}\ \left(\frac{2}{2-m},\ \frac{2+m}{2-m}\right)$$

同様に，① と直線 $y=-2x-1$ との交点を Q とおくと

$$\mathrm{Q}\ \left(\frac{-2}{2+m},\ \frac{2-m}{2+m}\right)$$

であるから，求める中点 $(X,\ Y)$ は

$$\begin{cases} X=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{2-m}+\dfrac{-2}{2+m}\right)=\dfrac{2m}{4-m^2} & \cdots ② \\ Y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2+m}{2-m}+\dfrac{2-m}{2+m}\right)=\dfrac{4+m^2}{4-m^2} & \cdots ③ \end{cases}$$

そこで，②，③ よりパラメータ m を消去すると

$$\begin{aligned} 4X^2-Y^2 &= 4\left(\frac{2m}{4-m^2}\right)^2-\left(\frac{4+m^2}{4-m^2}\right)^2 \\ &= \frac{16m^2-\left(4+m^2\right)^2}{\left(4-m^2\right)^2} \\ &= \frac{-\left(4-m^2\right)^2}{\left(4-m^2\right)^2}=-1 \end{aligned}$$

よって，中点 M は

$$双曲線 : 4x^2-y^2=-1$$

上にある．

≪注≫

中点 M の正確な軌跡を求めてみよう．③ より

$$Y=\frac{4+m^2}{4-m^2}=\frac{8}{4-m^2}-1$$

であり，m が $m \fallingdotseq \pm 2$ なる実数を動くとき

$$4-m^2 \leqq 4 \quad かつ \quad 4-m^2 \fallingdotseq 0 \qquad \therefore\ \ Y \geqq 1 \quad または \quad Y<-1$$

よって，中点の軌跡は

$$双曲線 : 4x^2-y^2=-1 \quad (ただし，点 (0,\ -1) を除く)$$

となる．

【3】(1) $\begin{cases} y = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ x = \sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi) \end{cases}$ より，$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-x^2}$ であるから，2 式から θ を消去すると

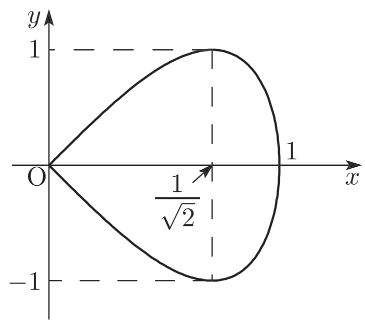
$$y = \pm 2x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

このグラフは $y = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ とそれを x 軸で折り返したグラフをあわせたものである．

$$y' = 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\left(1-2x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

より，増減表は下表のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↘	0



よって，求めるグラフは右図のようになる．

(2) $x = \sin\theta$，$y = \sin 2\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2\cos 2\theta$$

であるから

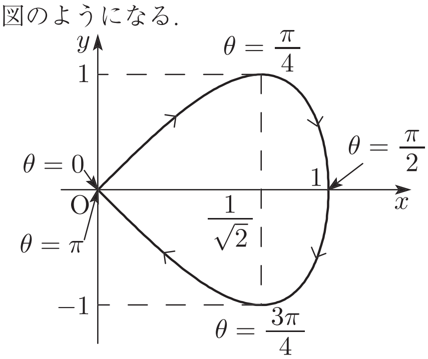
θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π
$\frac{dx}{d\theta}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	↗	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$	↘	$(1,\ 0)$	↙	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -1\right)$	↖	$(0,\ 0)$

また，$x = x(\theta) = \sin\theta$，$y = y(\theta) = \sin 2\theta$ とおくと

$$x(\theta) = x(\pi - \theta),\ y(\theta) = -y(\pi - \theta)$$

が成り立つので，グラフは x 軸に関して対称である．

以上から，求めるグラフは下図のようになる．



【4】(1) 与えられた点 $(x,\ y)$ のパラメータ表示を

$$\begin{cases} x = t^2 + \dfrac{1}{t^2} + 1 & \cdots ① \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \dfrac{1}{t^2}\right) + 2 & \cdots ② \end{cases}$$

とおくと，① + 2 × ② より

$$x + 2y = 2t^2 + 5$$

$$\therefore\quad t^2 = \frac{x + 2y - 5}{2} \quad \cdots ③$$

また，①，② より

$$x - 1 = t^2 + \frac{1}{t^2},\quad 2(y-2) = t^2 - \frac{1}{t^2}$$

であるから，これらより t を消去すると

$$(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 = 4$$

$$\therefore\quad \frac{(x-1)^2}{4} - (y-2)^2 = 1 \quad \cdots ④$$

一方，$0 < |t| < 2$ より $0 < t^2 < 4$ であるから，③ より

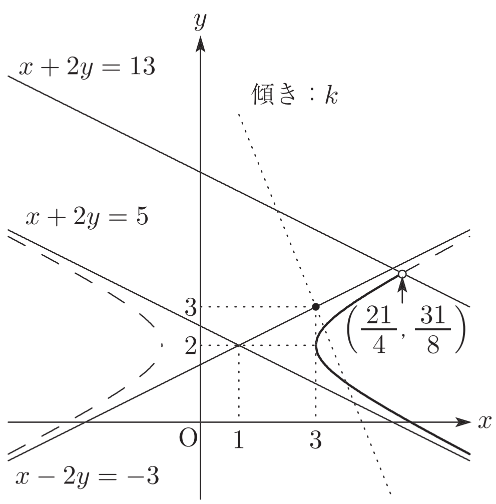
$$0 < \frac{x + 2y - 5}{2} < 4$$

$$\therefore\quad 5 < x + 2y < 13 \quad \cdots ⑤$$

よって，点 $(x,\ y)$ が動いてできる曲線の方程式は，

「④ かつ ⑤」

で与えられ，これを図示すると，図の太実線のようになる．



(2) 漸近線の 1 つ $x + 2y = 5$ の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ である．

よって，上図より，題意を満たすような直線の傾き k の範囲は，

$$k < -\frac{1}{2}$$

【5】(1)

$$x = \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \sin\theta \quad \cdots①, \quad y = \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} + \sin\theta \quad \cdots②$$

① + ② より

$$x + y = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$$

② − ① より

$$y - x = 2\sin\theta$$

であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$X = x + y$，$Y = y - x$ は，楕円 $\frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 = 1$ のパラメータ表示になっている．

ここで，C を X ，Y で表すことを考える．

$$X^2 - Y^2 = (x+y)^2 - (y-x)^2 = 4xy \qquad \therefore \quad xy = \frac{X^2 - Y^2}{4}$$

であるから，$C : x^2 + xy + y^2 = 1$ を変形して

$$(x+y)^2 - xy = 1$$

これより，X，Y で表すと

$$X^2 - \frac{X^2 - Y^2}{4} = 1 \qquad \therefore \quad \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 = 1$$

となる．

したがって，上の議論を逆にたどることにより

$$X = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \ (= x + y), \quad Y = 2\sin\theta \ (= y - x) \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$

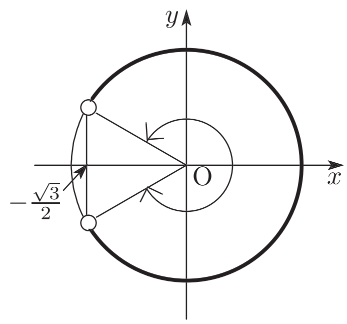
とパラメータ表示できる．〔証明終〕

(2) $-1 < x < y < 1$ を θ で表すと

$$-1 < \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \sin\theta < \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} + \sin\theta < 1$$

最左辺より

$$\begin{aligned} & -1 < \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} - \sin\theta \\ \iff \quad & -1 < \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) \\ \iff \quad & -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$



よって

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{6}\pi + 2n\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{5}{6}\pi + 2n\pi \quad (n : \text{整数}) \\ \therefore \quad & -\frac{7}{6}\pi + 2n\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n : \text{整数}) \end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad \cdots ③$$

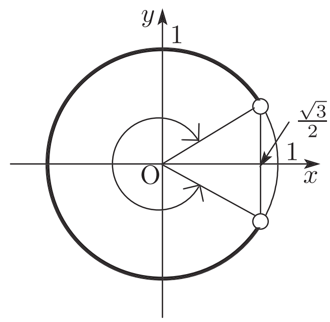
　また，真ん中の不等式より

$$\sin\theta > 0$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$0 < \theta < \pi \quad \cdots ④$$

　さらに，最右辺より



$$\begin{aligned} & \frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} + \sin\theta < 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right) < 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{6}\pi + 2n\pi \quad (n : \text{整数})$$
$$\therefore \quad \frac{\pi}{2} + 2n\pi < \theta < \frac{13}{6}\pi + 2n\pi \quad (n : \text{整数})$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より

$$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad \cdots ⑤$$

　したがって，③，④，⑤ より，求める範囲は

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

問題

【1】

$$
\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta)\overline{(\alpha+\beta)} \;=\; (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta}) \\
&= \alpha\overline{\alpha}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta} \;=\; |\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha} \\
|\alpha\overline{\beta}+1|^2 &= (\alpha\overline{\beta}+1)\overline{(\alpha\overline{\beta}+1)} \;=\; (\alpha\overline{\beta}+1)(\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}+1) \\
&= (\alpha\overline{\beta}+1)(\overline{\alpha}\beta+1) \;=\; \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}+1 \\
&= |\alpha|^2|\beta|^2+1+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\alpha\overline{\beta}+1|^2-|\alpha+\beta|^2 &= |\alpha|^2|\beta|^2+1-|\alpha|^2-|\beta|^2 \\
&= (|\alpha|^2-1)(|\beta|^2-1)
\end{aligned}
$$

$|\alpha|>1$, $|\beta|>1$ より

$$|\alpha\overline{\beta}+1|^2-|\alpha+\beta|^2>0$$

$$\therefore\quad |\alpha\overline{\beta}+1|>|\alpha+\beta|$$

【2】$z^2+\dfrac{9}{z}+5$ が純虚数なので

$$\overline{z^2+\frac{9}{z}+5} = -z^2-\frac{9}{z}-5$$

$$\overline{z}^{\,2}+\frac{9}{\overline{z}}+5 = -z^2-\frac{9}{z}-5$$

ここで，$z\overline{z}=|z|^2=\dfrac{9}{2}$ より

$$\frac{9}{z}=2\overline{z} \qquad \frac{9}{\overline{z}}=2z$$

$$
\begin{aligned}
\overline{z}^{\,2}+2z+5 &= -z^2-2\overline{z}-5 \\
z^2+\overline{z}^{\,2}+2(z+\overline{z})+10 &= 0 \\
(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}+2(z+\overline{z})+10 &= 0 \\
(z+\overline{z})^2+2(z+\overline{z})+1 &= 0 \\
(z+\overline{z}+1)^2 &= 0 \\
\therefore\quad z+\overline{z} &= -1
\end{aligned}
$$

$\overline{z}=-z-1$ を $z\overline{z}=\dfrac{9}{2}$ に代入すると

$$z(-z-1)=\frac{9}{2}$$

$$2z^2+2z+9=0$$

$$\therefore \quad z=\frac{-1\pm\sqrt{17}i}{2}$$

$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}i}{2}$ のとき $z^2+\dfrac{9}{z}+5=\mp\dfrac{3}{2}\sqrt{17}i\neq 0$ （複号同順）であるから

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{17}i}{2}$$

【3】 $z^2+2z+\dfrac{1}{z}$ が実数なので

$$z^2+2z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z^2+2z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}^{\,2}+2\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$$

これより

$$\begin{aligned}0&=z^2+2z+\frac{1}{z}-\overline{z}^2-2\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}\\&=(z-\overline{z})(z+\overline{z})+2(z-\overline{z})+\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}}\\&=(z-\overline{z})(z+\overline{z})+(z-\overline{z}) \qquad \because z\overline{z}=|z|^2=1\\&=(z-\overline{z})(z+\overline{z}+1)\end{aligned}$$

(i) $z-\overline{z}=0$ のとき

z は実数で $z^2+2z+\dfrac{1}{z}<0,\ |z|=1$ より

$$z=-1$$

(ii) $z+\overline{z}+1=0$ のとき

$z+\overline{z}=-1,\ z\overline{z}=1$ より, $z,\ \overline{z}$ は $t^2+t+1=0$ の 2 解なので

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

このとき $z^2+z+1=0$ より

$$z^2=-z-1$$

$$\therefore \quad z^2+2z+\frac{1}{z}=-z-1+2z+\overline{z}=-1+z+\overline{z}=-2<0$$

より, 題意をみたす.

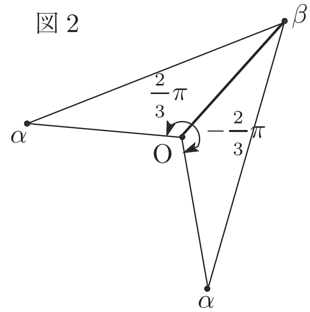
以上, まとめて

$$z=-1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

【4】(1)
$$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
であるから，求める点を z' とすると
$$\begin{aligned} z' &= (3+2i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(3+2i)(1+i)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

(2) $\beta \fallingdotseq 0$ だから，辺々 β^2 で割ると
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+1=0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha=\left\{\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\cdot\beta$$

図 2

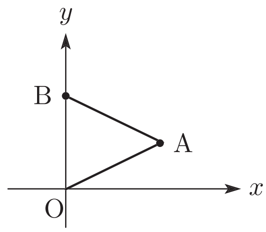


よって，点 α は図 2 のように点 β を $\pm\frac{2}{3}\pi$ 回転させたものである．ゆえに，三角形 O$\alpha\beta$ は，頂角が $\angle\alpha\mathrm{O}\beta=\frac{2}{3}\pi$ の二等辺三角形である．

【5】△OAB は正三角形であるから

$$\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$$

$\alpha = 2a+1+i$ の実部は $2a+1>0$ であるから，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ は点 $\mathrm{B}(\beta)$ を原点 O のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である.



$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\\ &= 2i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \sqrt{3}+i\end{aligned}$$

よって，$2a+1=\sqrt{3}$ より

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

△OAC は直角二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{2}$ または $\angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{4}$ であるが，$a>0$，$b>0$ より $\angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{4}$ としてよい.

$$\mathrm{OC} = \sqrt{2}\mathrm{OA} \quad \text{または} \quad \mathrm{OC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OA}$$

$\mathrm{OC} = \sqrt{2}\mathrm{OA}$ のとき

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{2}\alpha\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(\sqrt{3}+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\ &= (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i\end{aligned}$$

これは $a = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ と矛盾するので不適.

$\mathrm{OC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OA}$ のとき

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$\therefore\quad b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

△OAD は直角三角形であるから

$$\begin{aligned}&\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OD}^2 = \mathrm{AD}^2 \quad \cdots\cdots ①\\ &\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{OD}^2 \quad \cdots\cdots ②\\ &\mathrm{OD}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{OA}^2 \quad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

のいずれかが成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2 &= (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4\\ \mathrm{OD}^2 &= a^2 + c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 = |\alpha-\delta|^2 &= (2a+1-a)^2 + (1-c)^2\\ &= a^2+2a+1+c^2-2c+1\\ &= a^2+c^2+2a-2c+2\end{aligned}$$

①のとき　$4+a^2+c^2=a^2+c^2+2a-2c+2$

$$c=a-1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-1=\frac{\sqrt{3}-3}{2}<0$$

これは $c>0$ に反するので，不適.

②のとき　$4+a^2+c^2+2a-2c+2=a^2+c^2$

$$c=a+3=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+3=\frac{\sqrt{3}+5}{2}$$

これは $c>0$ に適する.

③のとき　$a^2+c^2+a^2+c^2+2a-2c+2=4$

$$c^2-c=-a^2-a+1$$

ここで，$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ より $(2a+1)^2=3$ であるから

$$a^2+a=\frac{1}{2}$$
$$c^2-c=\frac{1}{2}$$
$$c>0 \text{ より } c=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

このとき，$b=c$ となって不適.

以上より

$$a=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ b=\frac{\sqrt{3}+1}{2},\ c=\frac{\sqrt{3}+5}{2}$$

問題

【1】

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{3^{12}\left(\cos\dfrac{\pi}{18}+i\sin\dfrac{\pi}{18}\right)^{12}}{81^2\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)^2} \\
&= \frac{3^{12}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)}{3^8\left(\cos\dfrac{11}{3}\pi+i\sin\dfrac{11}{3}\pi\right)} \\
&= 3^4\{\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)\} \\
&= 3^4\{\cos\pi+i\sin\pi\} \\
&= -81
\end{aligned}
$$

【2】 $\left(z^3-\dfrac{1}{8}i\right)(z^4+16)=0$ より

$$z^3=\frac{1}{8}i \text{ または } z^4=-16$$

$z^3=\dfrac{1}{8}i$ のとき，$z=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ $(r_1>0,\ 0\leqq\alpha<2\pi)$ とおくと

$$z^3={r_1}^3(\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha)$$

$\dfrac{1}{8}i=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ より

$$
\begin{cases}
r_1=\dfrac{1}{2} \\
3\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2m\pi \quad (m\text{ は整数})
\end{cases}
$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2m}{3}\pi$ より

$$\alpha=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$$

$$
z=\begin{cases}
\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i \\
\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i \\
\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\dfrac{1}{2}i
\end{cases}
$$

$z^4=-16$ のとき，$z=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$ $(r_2>0,\ 0\leqq\beta<2\pi)$ とおくと

$$z^4={r_2}^4(\cos 4\beta+i\sin 4\beta)$$

$-16 = 2^4(\cos\pi + i\sin\pi)$ より

$$\begin{cases} r_2 = 2 \\ 4\beta = \pi + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \end{cases}$$

$\beta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n}{2}\pi$より

$$\beta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

$$z = \begin{cases} 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 2\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \\ 2\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \\ 2\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{cases}$$

以上より

$$z = -\frac{1}{2}i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i,\ \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$$

【3】 (1) $\overline{z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ であるから

$$z + \overline{z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}$$

$$z\overline{z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

(2) $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ と表せるから

$$z^6 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

(3) (1) より $z\overline{z} = 1$, $z + \overline{z} = \sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned} |z^2 + z + 1| &= |z^2 + z + z\overline{z}| \\ &= |z(z + 1 + \overline{z})| \\ &= |z||z + \overline{z} + 1| \\ &= |z||\sqrt{3} + 1| \\ &= \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

(4) (2) より $z^6 = -1$ であるから

$$z^8 = z^6 \cdot z^2 = -z^2$$

$$z^7 = z^6 \cdot z = -z$$

$$\begin{aligned}
&\left|z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right| \\
=&\left|-z^2 - z - 1 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right| \\
=&\left|z^5 + z^4 + z^3\right| \\
=&\left|z^3(z^2 + z + 1)\right| \\
=&\left|z^3\right|\left|z^2 + z + 1\right| \\
=&\left|z\right|^3\left|z^2 + z + 1\right| \\
=&\sqrt{3} + 1
\end{aligned}$$

【4】

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3} + i)^m = (1 + i)^n \\
\Longleftrightarrow &\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^m = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^n \\
\Longleftrightarrow &2^m\left\{\cos\left(\frac{m}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{m}{6}\pi\right)\right\} = (\sqrt{2})^n\left\{\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{n}{4}\pi\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} 2^m = (\sqrt{2})^n \\ \dfrac{m}{6}\pi = \dfrac{n}{4}\pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} m = \dfrac{n}{2} \\ \dfrac{m}{6}\pi = \dfrac{n}{4}\pi + 2k\pi \end{cases}$$

m を消去すると

$$\frac{\pi}{6} \times \frac{n}{2} = \frac{n}{4}\pi + 2k\pi$$

よって

$$n = -12k, \quad m = -6k$$

これが，与えられた方程式の一般解で，このうち n が最小の自然数となるのは $k = -1$ のときである．よって，求める m，n は

$$m = 6, \quad n = 12$$

【5】(1)

$$z^5 - a^5 = (z-a)(z^4 + z^3 a + z^2 a^2 + z a^3 + a^4)$$

(2)

$$\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)^5 = \cos\frac{5}{10}\pi + i\sin\frac{5}{10}\pi$$
$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$
$$= i$$

(3) $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}$について，(2) より

$$z^5 = i$$

$i^4 = 1$ であるから

$$z^5 = i^5$$

(1) の因数分解の結果を使うと

$$(z-i)(z^4 + z^3 i + z^2 i^2 + z i^3 + i^4) = 0$$
$$(z-i)(z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1) = 0$$

$z \fallingdotseq i$ より

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0$$

$z \fallingdotseq 0$ だから両辺を z^2 で割ってよい．

$$z^2 + iz - 1 - \frac{i}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$
$$z^2 + \frac{1}{z^2} + i\left(z - \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$t = z - \frac{1}{z}$ より，$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$ であるから

$$t^2 + it + 1 = 0$$
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} i$$

$t = z - \frac{1}{z} = z - \overline{z} = 2i\sin\frac{\pi}{10}$ であり，$\sin\frac{\pi}{10} > 0$ であるから

$$t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} i \text{ は不適}$$
$$t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} i \text{ は適する}$$

(4) (3) より

$$2i\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} i$$
$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

添削課題

【1】　$z^n = 1$ の 1 つの解を極形式を用いて

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とおくと，$|z| = 1$ より

$$r = 1 \qquad \therefore\quad z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$n = 2$ のとき

$$z^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta = 1$$

したがって

$$\cos 2\theta = 1,\quad \sin 2\theta = 0$$
$$\therefore\quad \theta = k\pi \quad (k \text{ は整数})$$
$$\therefore\quad z = \pm 1 \quad (\text{図 } 1)$$

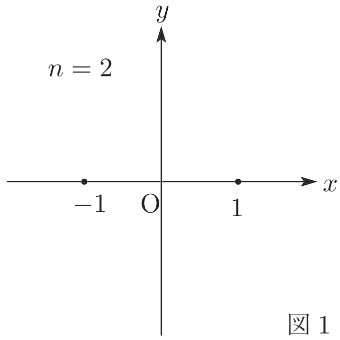


図 1

同様にして，$n = 3$ のとき

$$z = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad (\text{図 } 2)$$

$n = 4$ のとき

$$z = \pm 1,\ \pm i \quad (\text{図 } 3)$$

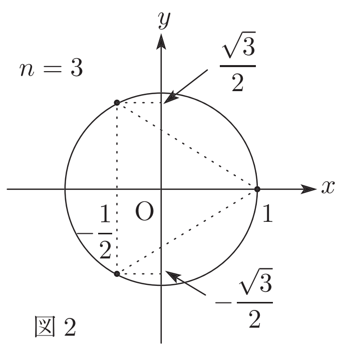


図 2

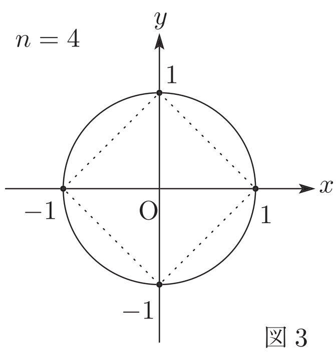


図 3

M2JCR

高２東大理系数学Ⅲ導入

Z-KAI

会員番号		氏　名	