3MJSS/3MJS/3MJ

夏期講習

解答

Ｚ会東大進学教室

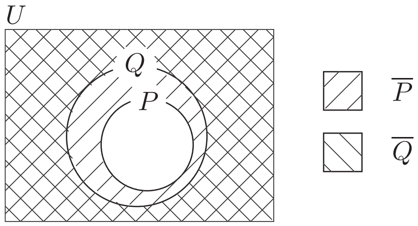
中３選抜東大・医学部数学

中３数学

中３東大数学

問題

【1】$p \to q$ が真であるとき，条件 $p,\ q$ の真理集合 $P,\ Q$ は $P \subset Q$ の関係をみたす．



このとき $\overline{P},\ \overline{Q}$ の関係は上図より $\overline{Q} \subset \overline{P}$ となっている．
したがって $\overline{Q},\ \overline{P}$ に対応する条件 $\overline{q},\ \overline{p}$ について $\overline{q} \to \overline{p}$ が成立している．
以上より，$p \to q$ が真ならば，$\overline{q} \to \overline{p}$ も真であることが示された．

【2】(1) (逆) 実数 x，y において，$xy = 0$ ならば，$x = y = 0$ である．
偽　反例：$x = 0,\ y = 1$ のとき $xy = 0$ であるが $x = y = 0$ でない．

(裏) 実数 x，y において，$x \fallingdotseq 0$ または $y \fallingdotseq 0$ ならば，$xy \fallingdotseq 0$ である．
偽　反例：$x = 0,\ y = 1$ のとき $x \fallingdotseq 0$ または $y \fallingdotseq 0$ であるが $xy \fallingdotseq 0$ でない．

(対偶) 実数 x，y において．$xy \fallingdotseq 0$ ならば，$x \fallingdotseq 0$ または $y \fallingdotseq 0$ である．
真　（$xy \fallingdotseq 0$ ならば，$x \fallingdotseq 0$ かつ $y \fallingdotseq 0$ であるので，命題は真）

(2) (逆) 三角形 ABC において，$\angle A$ が直角または鋭角ならば，$a \leqq b$ または $a \leqq c$ である．
偽　反例：$a = 5,\ b = 4,\ c = 3$ のとき $\angle A$ は直角であるが $a \leqq b$ でも $a \leqq c$ でもない．

(裏) 三角形 ABC において，$a > b$ かつ $a > c$ ならば，$\angle A$ は鈍角である．
偽　反例：$a = 5,\ b = 4,\ c = 3$ のとき $a > b$ かつ $a > c$ であるが，$\angle A$ は鈍角ではない．

(対偶) 三角形 ABC において，$\angle A$ が鈍角であれば，$a > b$ かつ $a > c$ である．
真　（三角形において，最大の内角を持つ角の対辺が最大辺になるので，$\angle A$ が鈍角であれば，$\angle A$ が最大角であり，a が最大辺になる.）

(3) (逆) $x < 0$ かつ $y > 0$ ならば $x - y < 0$ かつ $xy < 0$

真

x，$-y$ は共に負より，$x - y < 0$

また，x，y は異符号より，$xy < 0$

(裏) $x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ ならば，$x \geqq 0$ または $y \leqq 0$

真

$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ ならば，次のア，イ，ウのいずれか

ア）$x \geqq y$　かつ　$xy \geqq 0$

イ）$x \geqq y$　かつ　$xy < 0$

ウ）$x < y$　かつ　$xy \geqq 0$

ア）のとき，$xy \geqq 0$ より，x, y は同符号かいずれかが 0．よって $x \geqq y$ より，

$0 \leqq y \leqq x$　または　$y \leqq x \leqq 0$

が成り立つ．したがって，$x \geqq 0$　または　$y \leqq 0$ が成立.

イ）のとき，$xy < 0$ より，x, y は異符号．よって $x \geqq y$ より，

$y < 0 < x$

が成り立つ（$xy < 0$ より，x, y 共に 0 にはならない）.

したがって，$x \geqq 0$　または　$y \leqq 0$ が成立.

ウ）のとき，$xy \geqq 0$ より，x, y は同符号かいずれかが 0．よって $x < y$ より，

$0 \leqq x < y$　または　$x < y \leqq 0$

が成り立つ．したがって，$x \geqq 0$　または　$y \leqq 0$ が成立

以上，ア，イ，ウより，すべての場合で．$x \geqq 0$　または　$y \leqq 0$ が成立

よって,「$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ ならば，$x \geqq 0$ または $y \leqq 0$」は真.

もちろん,「対偶にあたる『逆』の命題が真なので『裏』も真」という説明でもよい.

(対偶) $x \geqq 0$ または $y \leqq 0$ ならば $x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$

真

$x \geqq 0$ または $y \leqq 0$ ならば，次のア，イ，ウのいずれか

ア）$x \geqq 0$　かつ　$y \leqq 0$

イ）$x < 0$　かつ　$y \leqq 0$

ウ）$x \geqq 0$　かつ　$y > 0$

ア）のとき，$y \leqq 0 \leqq x$ なので，$x - y \geqq 0$．よって，$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ は成立

イ）のとき，$xy \geqq 0$ なので，$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ は成立

ウ）のとき，$xy \geqq 0$ なので，$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ は成立

以上，ア，イ，ウより，すべての場合で．$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$ が成立

よって,「$x \geqq 0$ または $y \leqq 0$ ならば，$x - y \geqq 0$ または $xy \geqq 0$」は真.

(4) (逆) $b^2-4ac>0$ ならば方程式 $ax^2+bx+c=0$ は 2 つの異なる実数解を持つ.
偽
反例：$a=0,\ b=1,\ c=-1$ のとき $b^2-4ac>0$ であるが $x-1=0$ は $x=1$ しか解を持たない.

(裏) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 1 つだけ実数解を持つか，または実数解を持たないならば，$b^2-4ac \leqq 0$ である.
偽
反例：$a=0,\ b=1,\ c=-1$ のとき $x-1=0$ は 1 つだけ解を持つが $b^2-4ac \leqq 0$ ではない.

(対偶) $b^2-4ac \leqq 0$ ならば，方程式 $ax^2+bx+c=0$ は 1 つだけ実数解を持つか，または実数解を持たない.
真
（$a \neq 0$ のときは明らか．$a=0$ のとき $bx+c=0$ は 1 つだけ解を持つか，解を持たないかである）

【3】(1) **2 つの三角形の面積が等しくても，それらの三角形が合同でないときがある**

(2) **凶器のナイフがポケットに入っていても，彼が犯人でないことがある**

(3) **$x+y \leqq 4$ かつ，$x>2$ かつ $y>2$ である $x,\ y$ が存在する**
（ある $x,\ y$ について，$x+y \leqq 4$ かつ $x>2$ かつ $y>2$）

(4) **四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}$ かつ，$\mathrm{AD} \not\parallel \mathrm{BC}$ または $\mathrm{AD} \neq \mathrm{BC}$ であることがある**
（$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}$ かつ，$\mathrm{AD} \not\parallel \mathrm{BC}$ または $\mathrm{AD} \neq \mathrm{BC}$ である四角形 ABCD が存在する）

(5) **$p,\ q$ を自然数とするとき，pq が 25 の倍数かつ p または q が 5 の倍数でないことがある**

(6) **$D \geqq 0$ のとき，$f(0)>0$ であっても 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 0 以下の解を持つことがある**

【4】(1) 6 の倍数または 8 の倍数 $\rightarrow$ 24 の倍数 $\cdots\cdots$ 偽 （反例：12，16 など）
24 の倍数 $\rightarrow$ 6 の倍数または 8 の倍数 $\cdots\cdots$ 真
よって必要条件であるが十分条件でないから，**(イ)**

(2) 24 の倍数かつ 84 の倍数 $\rightarrow$ 12 の倍数 $\cdots\cdots$ 真 （$2^3 \times 3 \times 7$ の倍数）
12 の倍数 $\rightarrow$ 24 の倍数かつ 84 の倍数 $\cdots\cdots$ 偽 （反例：36，48 など）
よって十分条件であるが必要条件でないから，**(ア)**

(3)
$$\begin{aligned}4x^2-13x+9 \leqq 0 &\Leftrightarrow (x-1)(4x-9) \leqq 0\\ &\Leftrightarrow 1 \leqq x \leqq \frac{9}{4}\\ 4x^2-12x+9 \leqq 0 &\Leftrightarrow (2x-3)^2 \leqq 0\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって，

$4x^2-12x+9 \leqq 0 \ \rightarrow\ 4x^2-13x+9 \leqq 0$ $\cdots\cdots$ 真

$4x^2-13x+9 \leqq 0 \ \rightarrow\ 4x^2-12x+9 \leqq 0$ $\cdots\cdots$ 偽

よって $4x^2-12x+9 \leqq 0$ は，$4x^2-13x+9 \leqq 0$ であるための十分条件であるが必要条件でないから，**(ア)**

(4) $x+y>0$ かつ $xy>0$ のとき $xy>0$ より $x,\ y$ は同符号．これと $x+y>0$ より

$x>0,\ y>0$

逆に $x>0,\ y>0$ ならば $x+y>0$ かつ $xy>0$．よって $x+y>0$ かつ $xy>0$ は $x>0$ かつ $y>0$ と同値．したがって，

$x+y>0$ かつ $xy>0$ $\rightarrow$ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ $\cdots\cdots$ 真

$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ $\rightarrow$ $x+y>0$ かつ $xy>0$ $\cdots\cdots$ 偽

(反例：$x=0$ または $y=0$ のときなど)

よって $x+y>0$ かつ $xy>0$ は $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ であるための十分条件であるが必要条件でないから，**(ア)**

(5) $x>y \ \rightarrow\ x^2>y^2$ $\cdots\cdots$ 偽 (反例：$x=3,\ y=-4$ など)

$x^2>y^2 \ \rightarrow\ x>y$ $\cdots\cdots$ 偽 (反例：$x=-4,\ y=3$ など)

よって十分条件でも必要条件でもないから，**(エ)**

(6) $x^2-y^2>0$ のとき $x=y=0$ ではないことに注意すると，
$x^2-y^2>0$ の両辺に $x^2+y^2>0$ ($\because\ x=y=0$ ではない) をかけて，

$$(x^2-y^2)(x^2+y^2) = x^4-y^4>0$$

が成立．
一方 $x^4-y^4>0$ のとき，やはり $x=y=0$ とはならない．

$$x^4-y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2)>0$$

$x^2+y^2>0$ ($\because\ x=y=0$ ではない) であるから，$x^2-y^2>0$ が成立．
よって必要十分条件であるから，**(ウ)**

【5】(1) $a = b \longrightarrow$ △ABC は二等辺三角形 は明らかに真.
△ABC は二等辺三角形 $\longrightarrow$ $a = b$ は偽　(反例：$a = c$ かつ $a \fallingdotseq b$).
よって，ア

(2) $a = b \longrightarrow$ △ABC は正三角形は 偽 (反例は，$a \fallingdotseq c$).
△ABC は正三角形 $\longrightarrow a = b$ は真.
よって，イ

(3) $\angle A = 60^\circ \longrightarrow$ △ABC は正三角形は 偽 (反例は，$\angle B = 100^\circ$).
△ABC は正三角形 $\longrightarrow \angle A = 60^\circ$ は真.
よって，イ

(4) $\angle A = \angle B = 60^\circ \longrightarrow$ △ABC は正三角形は 真 ($\angle A = \angle B = 60^\circ$ であれば，$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ である).
△ABC は正三角形 $\longrightarrow \angle A = \angle B = 60^\circ$ は真.
よって，ウ

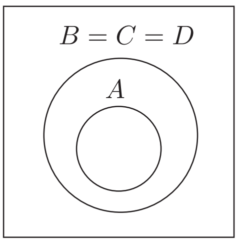
(5) $(a-b)(a^2+b^2-c^2) = 0 \longrightarrow$ △ABC が直角二等辺三角形 は偽 (反例：$a = b$ かつ $a^2 + b^2 \fallingdotseq c^2$).
△ABC が直角二等辺三角形 $\longrightarrow (a-b)(a^2+b^2-c^2) = 0$ は偽 (反例：$b = c$ かつ $b^2 + c^2 = a^2$).
よって，エ

(6) $a = b$ かつ $c^2 = 2a^2 \longrightarrow$ △ABC が直角二等辺三角形 は真.
≪証明≫
$a^2 + b^2 = c^2$ を示す.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a^2 + a^2 \\ &= 2a^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

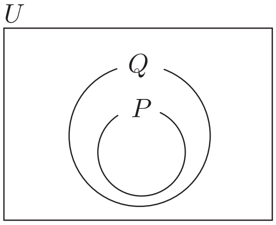
よって，$a^2 + b^2 = c^2$　　（証明終）
△ABC が直角二等辺三角形 $\longrightarrow a = b$ かつ $c^2 = 2a^2$ は偽 (反例：$\angle A = 90^\circ$ のとき，$b = c$ かつ，$a^2 = 2b^2$)
よって，ア

【6】条件 a，b，c，d に対応する真理集合を A，B，C，D とすると，

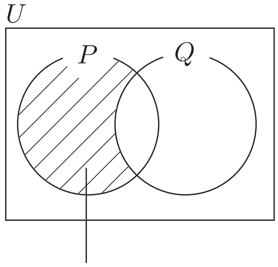


「a は b の十分条件」より　$A \subset B$ …①
「b は c の必要十分条件」より　$B = C$ …②
「c は d の必要条件」より　$C \supset D$ …③
「d は b の必要条件」より　$D \supset B$ …④
②，③ より，$B \supset D$．これと ④ $B \subset D$ より，$B = D$
② より，$B = C = D$．つまり右図が成立.
よって，b は d の**必要十分**条件，a は d の**十分**条件である.

【7】(1)



(2)

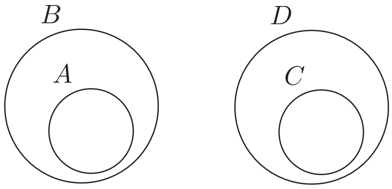


$P \cap \overline{Q}$ が空集合でない
（$P \cap Q = \phi$ や $\overline{P} \cap Q = \phi$ などのときもある）

(3) $\overline{p \to q}$ は $p \to q$ が偽という命題であるから，(2) のベン図の状態が対応する．すなわち「$P \cap \overline{Q}$ が ϕ でない」「$P \cap \overline{Q}$ であるものが存在する」である．これに対応する命題は「p かつ $\overline{q}$ であることがある」
したがって⑦ **「$\boldsymbol{p}$ であってかつ $\boldsymbol{q}$ でない」ことがある**，が同値な表現である．

(4) (3) の否定であるから，⑤ **「$\boldsymbol{p}$ であってかつ $\boldsymbol{q}$ でない」ことがない**，が同値な表現である．

【8】$A \subset B$，$C \subset D$ より，右の図がそれぞれ成立する．



(1) $B \cap D = \phi \ \to \ A \cap C = \phi$ は図 1 より真
$A \cap C = \phi \ \to \ B \cap D = \phi$ は図 2 のように反例があるので偽
よって十分条件であるから，**(ア)**

図 1

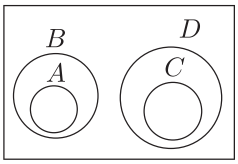
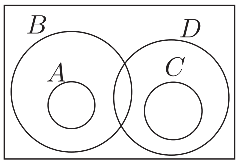
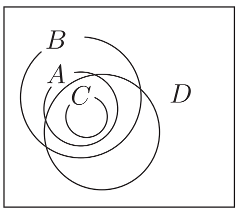


図 2



(2) $B \cap D \neq \phi \ \to \ A \supset C$ は図 2 より偽
$A \supset C \ \to \ B \cap D \neq \phi$ は，$x \in C$ である要素 x について $x \in B$ かつ $x \in D$ となるので真
よって $B \cap D \neq \phi$ は $A \supset C$ であるための必要条件であるから，**(イ)**

図 3



(3) $A \subset D \ \rightarrow \ B \subset D$ は図 4 より偽

$B \subset D \ \rightarrow \ A \subset D$ は $x \in A$ であるすべての要素 x について，$A \subset B$ より $x \in B$．さらに $B \subset D$ より $x \in D$ となるので真（図 5）

図 4

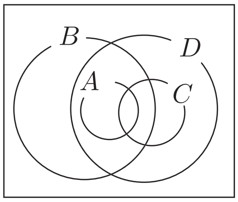
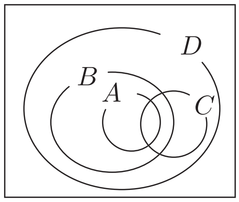


図 5



よって $A \subset D$ は $B \subset D$ となるための必要条件であるから，**(イ)**

(4) $A \cap C \subset B \ \rightarrow \ B \cap D \neq \phi$ は，$A \cap C = \phi$ であれば（図 1）$\phi \subset B$ といえるので，$A \cap C \subset B$ かつ $B \cap D = \phi$ となる．よって反例があるので偽

$B \cap D \neq \phi \ \rightarrow \ A \cap C \subset B$ は，$A \cap C \neq \phi$ でも，$A \cap C = \phi$ でも，$A \cap C \subset A$ が成り立つ．これと $A \subset B$ より，$A \cap C \subset B$ は常に成立．

よって $B \cap D \neq \phi \ \rightarrow \ A \cap C \subset B$ は真

したがって必要条件であるから，**(イ)**

【9】 (1) $A \cap B \subset A \cup B \ \rightarrow \ A = B$ ……偽（$A \cap B \subset A \cup B$ はどんな場合でも成立）

$A = B \ \rightarrow \ A \cap B \subset A \cup B$ ……真（$A = B$ のとき，$A \cap B = A = B = A \cup B$）

よって必要条件であるから，**(イ)**

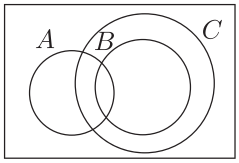
(2) ある C について $A \cup C \supset B \cup C \ \rightarrow A \supset B$ …… 偽

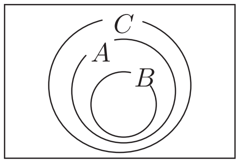
図のように $A \cup C \supset B \cup C$（図の場合，$B \subset C$ なので $B \cup C = C$ となっている）であり，かつ $A \supset B$ ではない例が存在する．

$A \supset B \rightarrow$ ある C について $A \cup C \supset B \cup C$ ……真

（右図が例．実際にはどのような C を選んでも成立する）

よって必要条件であるから，**(イ)**





(3) すべての C について $A \cup C \supset B \cup C \ \rightarrow \ A \supset B$ …… 真

すべての C について $A \cup C \supset B \cup C$ が成立するならば $C = \phi$ のときも成立．

$$\therefore A \cup \phi \supset B \cup \phi$$

$A \cup \phi = A$, $B \cup \phi = B$ より，$A \supset B$

よってどのような C についても，$A \cup C \supset B \cup C$ が成立するならば $A \supset B$ が成立．

$A \supset B \ \rightarrow$ すべての C について $A \cup C \supset B \cup C$ ……真

$B \cup C$ を B と $\overline{B} \cap C$ に分けて考えると，すべての C について，

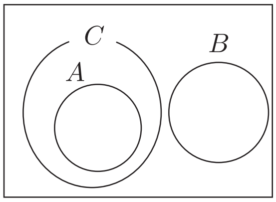
$A \supset B$ のとき, $A \cup C \supset B$

$C \supset \overline{B} \cap C$ なので, $A \cup C \supset \overline{B} \cap C$

したがって $A \supset B$ ならば，どのような C についても $A \cup C \supset B \cup C$ が成立．

よって必要十分条件であるから，**(ウ)**

(4) ある C について $A \subset C$, $B \subset \overline{C}$ $\to$ $A \cap B = \phi$ $\cdots\cdots$ 真



$A \cap B \neq \phi$ とすると $x \in A$ かつ $x \in B$ となる x が存在.

このとき $A \subset C$ より $x \in C$, $B \subset \overline{C}$ より $x \in \overline{C}$. つまり $x \in C$ かつ $x \in \overline{C}$ となり，これは矛盾する.

$A \cap B = \phi$ $\to$ ある C について $A \subset C$, $B \subset \overline{C}$ $\cdots\cdots$ 真

C として A をとれば $A \subset A$, $B \subset \overline{A}$ となり条件をみたす. つまり $A \cap B = \phi$ ならば $A \subset C$, $B \subset \overline{C}$ となる C が少なくとも 1 つ存在する.

よって必要十分条件であるから，**(ウ)**

2章　集合と論理の応用

問題

【1】

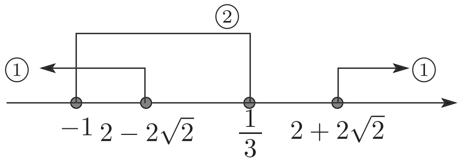
$$x^2 - ax + a + 1 = 0 \cdots ①$$
$$x^2 + (a-1)x + a^2 = 0 \cdots ②$$

① の判別式 $D_1 \geqq 0$ より

$$D_1 = (-a)^2 - 4(a+1) \geqq 0$$
$$a^2 - 4a - 4 \geqq 0$$
$$\therefore\ a \leqq 2 - 2\sqrt{2},\ 2 + 2\sqrt{2} \leqq a \cdots ①'$$

② の判別式 $D_2 \geqq 0$ より

$$D_2 = (a-1)^2 - 4a^2 \geqq 0$$
$$\{(a-1)+2a\}\{(a-1)-2a\} \geqq 0$$
$$(3a-1)(-a-1) \geqq 0$$
$$(3a-1)(a+1) \leqq 0$$
$$\therefore\ -1 \leqq a \leqq \frac{1}{3} \cdots ②'$$



また，

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{4} & < & \sqrt{8} & < & \sqrt{9} \\ 2-\sqrt{9} & < & 2-\sqrt{8} & < & 2-\sqrt{4} \\ -1 & < & 2-2\sqrt{2} & < & 0 \end{array}$$

①$'$ かつ ②$'$ より，$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 2 - 2\sqrt{2}}$

【2】 (i) $m + 1 = 0$ すなわち $m = -1$ のとき

不等式は $5 > 0$ となり，常に成立.

よって $m = -1 \cdots ①$ は条件をみたす.

(ii) $m + 1 < 0$ すなわち $m < -1$ のとき

x を十分に大きくとると，左辺 $\leqq 0$ となるので条件をみたさない.

(iii) $m+1>0$ すなわち $m>-1$ $\cdots$② のとき

$$f(x)=(m+1)x^2+2(m+1)x+5$$

とおくと，条件をみたすにはグラフ $y=f(x)$ が x 軸より常に上にあればよいので，$y=0$ すなわち $f(x)=0$ をみたす x が存在しなければよい．

よって $f(x)=0$ の判別式 $D<0$ であればよい．

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m+1)\cdot 5<0$$

$$(m+1)(m+1-5)<0$$

$$(m+1)(m-4)<0$$

$$\therefore -1<m<4 \ \cdots③$$

② かつ ③ より，$-1<m<4$

これと，① が条件をみたすから，$\boldsymbol{-1 \leqq m<4}$

【3】(1) $h(x)=g(x)-f(x)$ として，任意の実数 x に対して $h(x)>0$ となるための定数 a の値の範囲を求める．

$h(x)=g(x)-f(x)$ とすると，

$$\begin{aligned} h(x)&=(x^2+4ax)-(-x^2+2ax+a)\\ &=2x^2+2ax-a\\ &=2\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}-a \end{aligned}$$

ここで，任意の実数 x に対して $h(x)>0$ であるためには

$$-\frac{a^2}{2}-a>0$$

であればよく，

$$-\frac{a^2}{2}-a>0$$

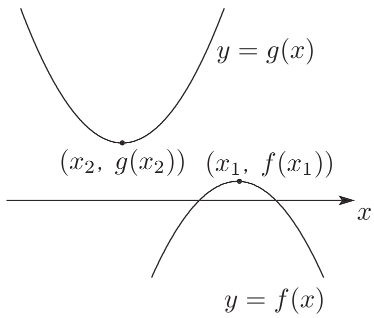
$$\iff a(a+2)<0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-2<a<0}$$

(2) 任意の実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)<g(x_2)$ が成り立つためには，図に示すように，

$$(f(x) \text{ の最大値}) < (g(x) \text{ の最小値}) \ \cdots(*)$$

であればよい．



$$f(x)=-(x-a)^2+a^2+a$$

より，$f(x)$ の最大値は a^2+a

一方，

$$g(x)=(x+2a)^2-4a^2$$

より，$g(x)$ の最小値は $-4a^2$

$(*)$ より，

$$a^2+a<-4a^2$$

$$5a^2+a<0$$

$$a(5a+1)<0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{-\frac{1}{5}<a<0}$$

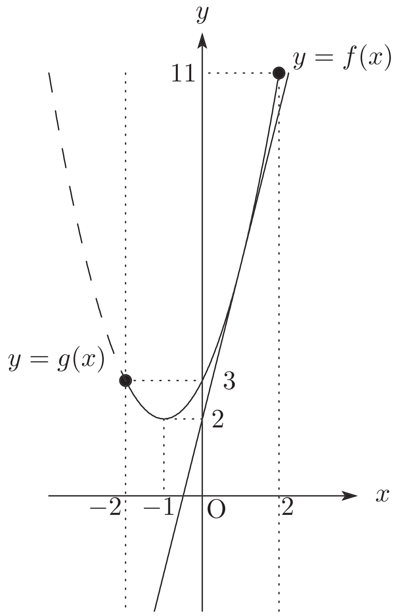
【4】 $g(x)=(x+1)^2+2$

(1) 右の図より，$y=g(x)$ と $y=f(x)$ が接するケースより $y=f(x)$ が下側にあればよい.
すなわち関数 $g(x)-f(x)$ が $-2\leqq x\leqq 2$ で常に正であればよい.

$$\begin{aligned}&(x^2+2x+3)-(4x+a)\\=&x^2-2x+(3-a)\\=&(x-1)^2+2-a\end{aligned}$$

$-2\leqq x\leqq 2$ より $x=1$ で最小値 $2-a$ をとる.
よって $2-a>0$ であればよい.

$$\boldsymbol{a<2}$$



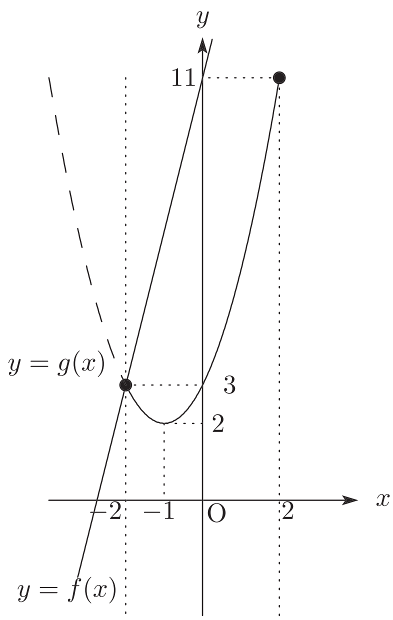
(2) 右の図より，$x=-2$ で $g(x)>f(x)$ となるか，または $x=2$ で $g(x)>f(x)$ となればよい.
$g(-2)>f(-2)$ より，

$$\begin{aligned}3&>-8+a\\\therefore a&<11\ \cdots①\end{aligned}$$

$g(2)>f(2)$ より，

$$\begin{aligned}11&>8+a\\a&<3\ \cdots②\end{aligned}$$

① または ② より，$\boldsymbol{a<11}$



(3) $$f(x) \text{ の最大値} < g(x) \text{ の最小値}$$

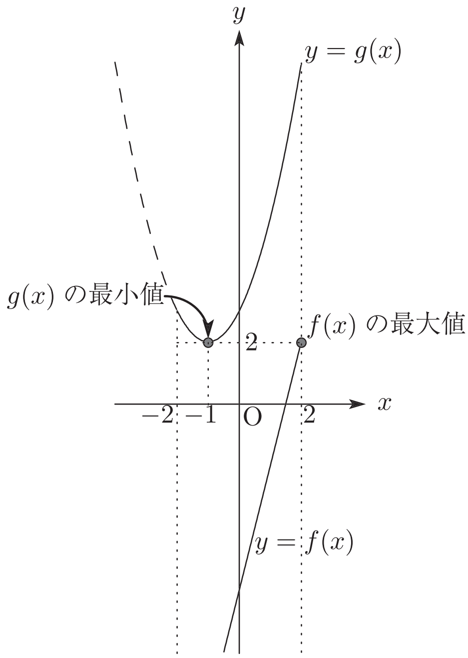
となれば，条件をみたす x_1，x_2 の組は存在する．$-2 \leqq x_1 \leqq 2$ に対して，$f(x_1)$ の最大値は

$$x_1 = 2 \text{ のとき } f(2) = 8 + a$$

$-2 \leqq x_2 \leqq 2$ に対して，$g(x_2)$ の最小値は

$$x_2 = -1 \text{ のとき } g(-1) = 2$$

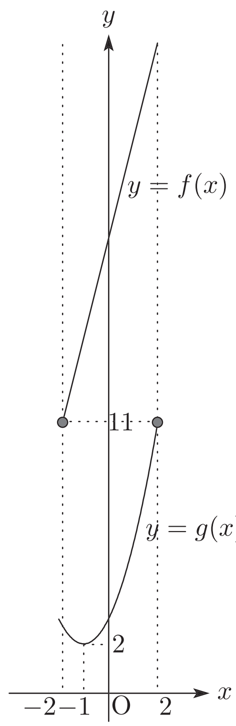
$$\therefore 8 + a < 2$$
$$\boldsymbol{a < -6}$$



(4) $$f(x) \text{ の最小値} < g(x) \text{ の最大値}$$

となれば，条件をみたす x_1，x_2 の組は存在する．
(3) と同様に考えて，$-2 \leqq x \leqq 2$ における
$f(x)$ の最小値は，$f(-2) = a - 8$
$g(x)$ の最大値は，$g(2) = 11$

$$\therefore a - 8 < 11$$
$$\boldsymbol{a < 19}$$



【5】U の部分集合を

$$A=\{x \mid x\text{ は }3\text{ の倍数}\},\ B=\{x \mid x\text{ は }5\text{ の倍数}\}$$
$$C=\{x \mid x\text{ は }7\text{ の倍数}\},\ D=\{x \mid x\text{ は }6\text{ の倍数}\}$$

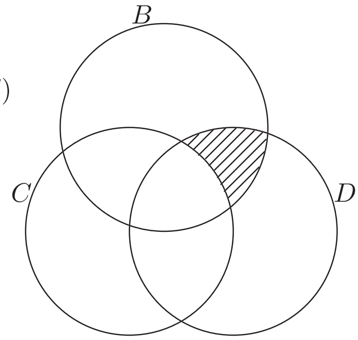
とすると，

$999 \div 3 = 333$　$99 \div 3 = 33$ より，　$n(A) = 333 - 33 = 300$
$999 \div 5 = 199 \cdots 4$　$99 \div 5 = 19 \cdots 4$ より，　$n(B) = 199 - 19 = 180$
$999 \div 7 = 142 \cdots 5$　$99 \div 7 = 14 \cdots 1$ より，　$n(C) = 142 - 14 = 128$
$999 \div 6 = 166 \cdots 3$　$99 \div 6 = 16 \cdots 3$ より，　$n(D) = 166 - 16 = 150$
$999 \div 15 = 66 \cdots 9$　$99 \div 15 = 6 \cdots 9$ より，　$n(A \cap B) = 66 - 6 = 60$
$999 \div 35 = 28 \cdots 19$　$99 \div 35 = 2 \cdots 29$ より，　$n(B \cap C) = 28 - 2 = 26$
$999 \div 21 = 47 \cdots 12$　$99 \div 21 = 4 \cdots 15$ より，　$n(C \cap A) = 47 - 4 = 43$
$999 \div 105 = 9 \cdots 54$　$99 \div 105 = 0 \cdots 99$ より，　$n(A \cap B \cap C) = 9 - 0 = 9$
$999 \div 30 = 33 \cdots 9$　$99 \div 30 = 3 \cdots 9$ より，　$n(B \cap D) = 33 - 3 = 30$
$999 \div 210 = 4 \cdots 159$　$99 \div 210 = 0 \cdots 99$ より，　$n(B \cap D \cap C) = 4 - 0 = 4$

(1)
$$\begin{aligned}&n(A \cup B \cup C)\\ &= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\\ &= 300+180+128-60-26-43+9\\ &= \mathbf{488}\text{ 個}\end{aligned}$$

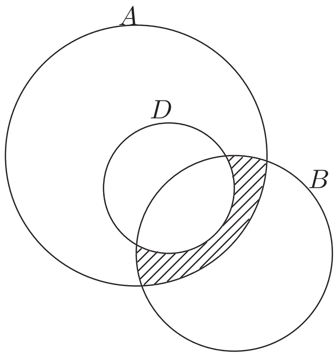
(2) $(B \cap D) \cap \overline{C} = B \cap D \cap \overline{C}$ の要素の個数を求めればよく．

$$\begin{aligned}n\left(B \cap D \cap \overline{C}\right) &= n(B \cap D) - n(B \cap D \cap C)\\ &= 30 - 4 = \mathbf{26}\text{ 個}\end{aligned}$$



(3) $A \cap B \cap \overline{D}$ の要素の個数を求めればよいが，
$D \subset A$ であることを考えると，
図より，

$$\begin{aligned}n(A \cap B \cap \overline{D}) &= n(A \cap B) - n(B \cap D)\\ &= 60 - 30\\ &= \mathbf{30}\text{ 個}\end{aligned}$$



【6】k^2 で割り切れる A の部分集合を A_k とし，A_k の個数を $n(A_k)$ とする．

(1) $250 \div 2^2 = 62 \cdots 2$ だから，$n(A_2) = \mathbf{62}$

(2) 2^2 と 3^2 で同時に割り切れる A の元の集合は，250 以下の自然数で $2^2 \times 3^2 = 6^2$ の倍数の集合，つまり $A_2 \cap A_3 = A_6$ である．そして，$250 \div 6^2 = 6 \cdots 34$ だから

$$n(A_2 \cap A_3) = \mathbf{6}$$

(3) $15^2 = 225 < 250 < 16^2 = 256$ だから

$$A_k = \phi \ (k \geqq 16) \quad \cdots\cdots ①$$

また $k = pq$ とすると，$A_k \subset A_p$ だから，A は素数 p に対しての A_p の和集合で表せる．したがって ① から，

$$A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}$$

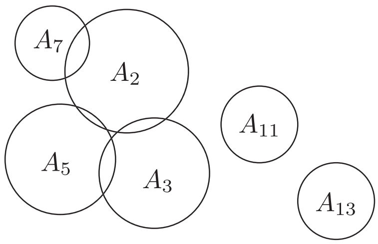
$A_p \cap A_q = A_{pq}$ (p，q 素数) だから，$A_p \cap A_q$ のうち，空でないものは ① から，

$$A_2 \cap A_3 = A_6,\ A_2 \cap A_5 = A_{10},\ A_2 \cap A_7 = A_{14},\ A_3 \cap A_5 = A_{15}$$

だけである．3 個の A_p の共通部分は $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30} = \phi$ で，他の共通部分もすべて空集合である．(2) と同様に計算して，下の表が得られる．

p	2	3	5	7	11	13
$n(A_p)$	62	27	10	5	2	1

$(p,\ q)$	(2, 3)	(2, 5)	(2, 7)	(3, 5)
$n(A_p \cap A_q)$	6	2	1	1



よって，

$$\begin{aligned} n(A) &= n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) + n(A_7) + n(A_{11}) + n(A_{13}) \\ &\quad - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_2 \cap A_7) - n(A_3 \cap A_5) \\ &= 62 + 27 + 10 + 5 + 2 + 1 - 6 - 2 - 1 - 1 = \mathbf{97} \end{aligned}$$

【7】3年生全体の集合を U とし，その部分集合として，

$$A=\{\text{携帯電話を持っている生徒}\}$$
$$B=\{\text{パソコンを持っている生徒}\}$$
$$C=\{\text{電子辞書を持っている生徒}\}$$

とする.

(1)
$$\begin{aligned} n(A\cap B) &= n(A)+n(B)-n(A\cup B) \\ &= 160-n(A\cup B)\cdots(*) \end{aligned}$$

であり，$n(U)=150$ より，$n(A\cup B)\leqq 150\ \cdots(**)$ である.

① $n(A\cap B)$ の最小値について.

$n(A\cap B)\geqq n(A\cap B\cap C)=25$ より，$n(A\cap B)$ は25以上である.

また，$n(A\cap B)=25$ とすると，$n(A\cup B)=160-25=135\leqq 150$ より，$(**)$ をみたす.

よって，$n(A\cap B)$ の最小値は25.

② $n(A\cap B)$ の最大値について.

$n(A)\geqq n(B)$ であることから，$n(A\cap B)$ が最大になるとき，$B\subset A$ となる.

$B\subset A$ のとき，$n(A\cap B)=n(B)=70$

このとき，$(**)$ もみたす.

以上，①，② より，携帯電話もパソコンも持っている人は，

25人以上70人以下

(2) $n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$ の最大値を求める.

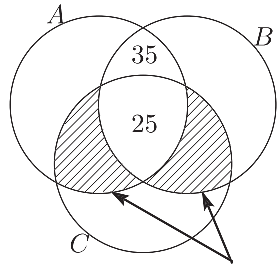
$$\begin{aligned} &n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{A\cup B\cup C}) \\ &\quad=n(U)-n(A\cup B\cup C) \\ &\quad=n(U)-(n(A)+n(B)+n(C) \\ &\qquad-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)) \\ &\quad=150-(90+70+60-60-n(B\cap C)-n(C\cap A)+25) \\ &\quad=n(B\cap C)+n(C\cap A)-35 \\ &\quad=\big(n(B\cap C\cap\overline{A})+25+n(C\cap A\cap\overline{B})+25\big)-35 \\ &\quad=15+\big(n(B\cap C\cap\overline{A})+n(C\cap A\cap\overline{B})\big) \end{aligned}$$

ここで，$n(C)=60$，$n(A\cap B\cap C)=25$ より，$n(C\cap B\cap\overline{A})+n(C\cap A\cap\overline{B})$ のとりうる値の最大値は，$60-25=35$ となるが，

$$n(C\cap B\cap\overline{A})=5,\ n(C\cap A\cap\overline{B})=30$$

などとすれば，$n(A)$，$n(B)$，$n(A\cap B)$ の条件に対して矛盾しない．したがって，携帯電話もパソコンも電子辞書も持っていない生徒は，最大で

50人



この和を最大にする.

【8】(1)

$$
\begin{aligned}
&3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\\
=&3x^2+3y^2+3z^2-x^2-y^2-z^2-2xy-2yz-2zx\\
=&2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx\\
=&(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\\
=&(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\\
\geqq&0
\end{aligned}
$$

等号成立は $\boldsymbol{x=y=z}$ **のとき**

(2) (1) より，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$

これを利用して「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ $\cdots$①」となる最小の a の値を求める．

$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ なので，これと (1) より

$$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2) \leqq 3a$$

$$\therefore \quad -\sqrt{3a} \leqq x+y+z \leqq \sqrt{3a} \quad \cdots②$$

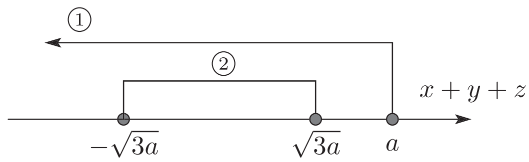
等号成立は，$x=y=z$ かつ $x^2+y^2+z^2=a$ のとき．

すなわち $x=y=z=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

よって $x^2+y^2+z^2 \leqq a$ のとき

$x+y+z$ の最小値は $-\sqrt{3a}$,

最大値は $\sqrt{3a}$.



① が真であるためには，最大値 $\sqrt{3a}$ が $x+y+z \leqq a$ に含まれればよい．

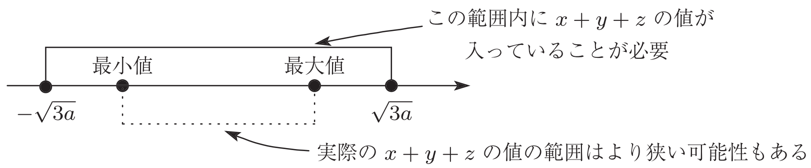
$$\therefore \sqrt{3a} \leqq a$$

両辺正より，$3a \leqq a^2$

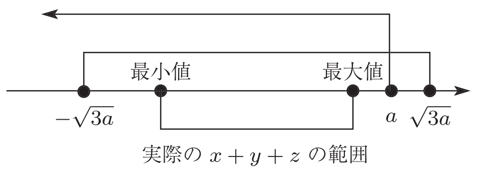
$a>0$ なので，$a \geqq 3$

等号は成立するので，a の最小値は **3**

注) $x^2+y^2+z^2 \leqq a \ \rightarrow\ -\sqrt{3a} \leqq x+y+z \leqq \sqrt{3a}$ が真としても，これだけでは $x^2+y^2+z^2 \leqq a$ のときの $x+y+z$ の値域の必要条件が示せたにすぎない．



このときは $\sqrt{3a} \leqq a$ では条件を示せない．



上の図のように $a<\sqrt{3a}$ となるケースも考えられてしまう．

このため，等号を成立させる x, y, z の存在を確認して，$x+y+z$ の最大値が $\sqrt{3a}$ であることを確認しなければならない．

問題

【1】 $y=x^2+2px+p \quad \cdots ①$
$y=-x^2+px+2p \cdots ②$

①，②より y を消去すると，

$$x^2+2px+p=-x^2+px+2p$$
$$2x^2+px-p=0 \cdots ③$$

となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると

$$D=p^2-4\cdot 2\cdot(-p)$$
$$=p^2+8p$$

2 つの関数のグラフが共有点を持たないとき，$D<0$ となるから

$$p^2+8p<0$$
$$p(p+8)<0$$
$$\therefore\ \boldsymbol{-8<p<0}$$

【2】 $y=x^2+3x+a$ に $y=0$ を代入すると，$x^2+3x+a=0$ となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると

$$D=3^2-4\cdot 1\cdot a$$
$$=9-4a$$

2 次関数のグラフが x 軸と共有点を持つとき，判別式は $D\geqq 0$ となるから

$$9-4a\geqq 0$$
$$-4a\geqq -9$$
$$a\leqq \frac{9}{4} \cdots ①$$

また，$y=x^2+ax+a+3$ に $y=0$ を代入すると，$x^2+ax+a+3=0$ となるので，この 2 次方程式の判別式 D をとると

$$D=a^2-4\cdot 1\cdot(a+3)$$
$$=a^2-4a-12$$

2 次関数のグラフが x 軸と共有点を持つとき，判別式は $D\geqq 0$ となるから

$$a^2-4a-12\geqq 0$$
$$(a-6)(a+2)\geqq 0$$
$$a\leqq -2,\ 6\leqq a \cdots ②$$

①，②より，$\boldsymbol{a\leqq \frac{9}{4},\ 6\leqq a}$

【3】与えられた 2 つの 2 次関数

$$\begin{cases} y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 2a - 3 & \cdots ① \\ y = -x^2 + 2(a+2)x - 2a^2 - 9a - 4 & \cdots ② \end{cases}$$

と $y = 0$ を，それぞれ連立すると

$$\begin{cases} x^2 - 2ax + 2a^2 + 2a - 3 = 0 & \cdots ③ \\ x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + 9a + 4 = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

いま，③，④の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とおくと，条件は

$$D_1 < 0 \text{ かつ } D_2 \geqq 0 \quad \cdots ⑤$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= a^2 - (2a^2 + 2a - 3) \\ &= -a^2 - 2a + 3 \\ &= -(a+3)(a-1) \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= (a+2)^2 - (2a^2 + 9a + 4) \\ &= -a^2 - 5a \\ &= -a(a+5) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{cases} a < -3,\ 1 < a & \cdots ⑥ \\ -5 \leqq a \leqq 0 & \cdots ⑦ \end{cases}$$

よって，⑥ かつ⑦ より

$$-5 \leqq a < -3$$

これを満たす整数 a の値は

$$\boldsymbol{a = -5,\ -4}$$

【4】(1) ①と②の共有点は 2 個あることより

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = x^2 + 3 & \cdots ② \end{cases}$$

①，②より

$$\begin{aligned} ax + b &= x^2 + 3 \\ x^2 - ax + 3 - b &= 0 \quad \cdots ⑤ \end{aligned}$$

ここで，判別式 $D = a^2 - 4(3 - b) = a^2 + 4b - 12$

$D > 0$ より

$$a^2 + 4b - 12 > 0 \quad \cdots \text{(i)}$$

また，①と③の共有点は 1 個あることより

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = x^2 + 6x + 7 & \cdots ③ \end{cases}$$

①，③より

$$ax + b = x^2 + 6x + 7$$
$$x^2 + (6 - a)x + 7 - b = 0 \quad \cdots ⑥$$

ここで，判別式 $D = (6 - a)^2 - 4(7 - b) = a^2 - 12a + 4b + 8$

$D = 0$ より

$$4b = -a^2 + 12a - 8 \quad \cdots \text{(ii)}$$

また，①と④の共有点は 0 個より

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = x^2 + 4x + 5 & \cdots ④ \end{cases}$$

①，④より

$$ax + b = x^2 + 4x + 5$$
$$x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$$

ここで，判別式 $D = (4 - a)^2 - 4(5 - b) = a^2 - 8a + 4b - 4$

$D < 0$ より

$$a^2 - 8a + 4b - 4 < 0 \quad \cdots \text{(iii)}$$

(i)，(ii) より，$4b$ に注目して

$$-a^2 + 12a - 8 > - a^2 + 12$$
$$12a > 20 \qquad \therefore\ a > \frac{5}{3} \quad \cdots \text{(iv)}$$

(ii)，(iii) より b を消去すると

$$a^2 - 8a + (-a^2 + 12a - 8) - 4 < 0$$
$$4a - 12 < 0 \quad \therefore\ a < 3 \quad \cdots \text{(v)}$$

a は整数であるから，(iv)，(v) より

$$\frac{5}{3} < a < 3 \qquad \therefore\ a = 2$$

これを (ii) に代入して

$$4b = -4 + 24 - 8 = 12 \qquad \therefore\ b = 3$$

よって，$\boldsymbol{a = 2,\ b = 3}$

(2) ⑥より

$$\begin{aligned} x^2 + (6 - 2)x + 7 - 3 &= 0 \\ x^2 + 4x + 4 &= 0 \\ (x + 2)^2 &= 0 \\ x &= - 2 \end{aligned}$$

$x = -2$ のとき，①に代入して

$$y = 2 \times (-2) + 3 = -1$$

以上より

①，③の共有点の座標は，$\boldsymbol{(-2,\ -1)}$

【5】 $f(x)=x^2+2ax+6-a$ とおき，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める a の範囲の条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=a^2-(6-a)>0 & \cdots\text{(i)} \\ -a>1 & \cdots\text{(ii)} \\ f(1)>0 & \cdots\text{(iii)} \end{cases}$$

である.

(i) より

$$\begin{aligned} a^2+a-6 &>0 \\ (a+3)(a-2) &>0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ a<-3,\ a>2\ \cdots\text{(i)}'$$

(ii) より，$a<-1\ \cdots$(ii)$'$

(iii) より，

$$\begin{aligned} f(1)=1+2a+6-a&>0 \\ a+7&>0 \\ \therefore\ a&>-7\ \cdots\text{(iii)}' \end{aligned}$$

(i)$'$〜(iii)$'$ より，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{-7<a<-3}$$

【6】 $f(x)=x^2-2ax+2a+3$ とおき，$f(x)=0$ の判別式を D とすると，求める a の範囲の条件は

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4}=a^2-(2a+3)>0 & \cdots\text{(i)} \\ 2<a<4 & \cdots\text{(ii)} \\ f(2)>0 & \cdots\text{(iii)} \\ f(4)>0 & \cdots\text{(iv)} \end{cases}$$

である.

(i) より，

$$\begin{aligned} a^2-2a-3&>0 \\ (a+1)(a-3)&>0 \\ \therefore\ a<-1,\ a&>3\ \cdots\text{(i)}' \end{aligned}$$

(iii) より，

$$\begin{aligned} f(2)=&4-4a+2a+3 \\ =&-2a+7>0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ a<\frac{7}{2}\ \cdots\text{(iii)}'$$

(iv) より，

$$\begin{aligned} f(4)&=16-8a+2a+3 \\ &=-6a+19>0 \end{aligned}$$

$$\therefore\ a<\frac{19}{6}\ \cdots\text{(iv)}'$$

(i)$'$，(ii)，(iii)$'$，(iv)$'$ を同時に満たす a の値の範囲は

$$\boldsymbol{3<a<\frac{19}{6}}$$

【7】 $f(x) = ax^2 - x - 1 = a\left(x - \dfrac{1}{2a}\right)^2 - \dfrac{1}{4a} - 1$ とおき，$f(x) = 0$ の判別式を D とすると

(I) $a > 0$ のとき，求める a の値の範囲の条件は

$$\begin{cases} D = 1 + 4a \geqq 0 & \cdots(\mathrm{i}) \\ -1 < \dfrac{1}{2a} < 1 & \cdots(\mathrm{ii}) \\ f(-1) > 0,\ f(1) > 0 & \cdots(\mathrm{iii}) \end{cases}$$

(i) より，

$$4a \geqq -1 \Longleftrightarrow a \geqq -\frac{1}{4} \quad \cdots ①$$

(ii) より，

$$-2a < 1 < 2a$$
$$-2a < 1 \text{より } a > -\frac{1}{2},\quad 1 < 2a \text{ より } a > \frac{1}{2}$$

ここで，$a > 0$ より，$a > \dfrac{1}{2}$ $\cdots ②$

(iii) より，

$$\begin{aligned} f(-1) &= a + 1 - 1 = a > 0 \\ f(1) &= a - 1 - 1 = a - 2 > 0 \\ &\therefore\ a > 2\ \cdots ③ \end{aligned}$$

①，②，③を同時に満たす a の値の範囲は，$a > 2$

(II) $a < 0$ のとき，求める a の値の範囲の条件は

$$\begin{cases} D = 1 + 4a \geqq 0 & \cdots(\mathrm{i}) \\ -1 < \dfrac{1}{2a} < 1 & \cdots(\mathrm{ii}) \\ f(-1) < 0,\ f(1) < 0 & \cdots(\mathrm{iii}) \end{cases}$$

(i) より，$a \geqq -\dfrac{1}{4}$ $\cdots ①$

(ii) より，

$$2a < 1 < -2a$$
$$2a < 1 \text{より } a < \frac{1}{2},\quad 1 < -2a \text{ より } a < -\frac{1}{2}$$

ここで，$a < 0$ より，$a < -\dfrac{1}{2}$ $\cdots ②$

(iii) より

$$\begin{aligned} f(-1) &= a < 0 \\ f(1) &= a - 2 < 0 \Longleftrightarrow\ a < 2 \\ &\therefore\ a < 0\ \cdots ③ \end{aligned}$$

(i)〜(iii) を同時に満たす a の値の範囲はないことから，解なし．

以上より，$\boldsymbol{a > 2}$

【8】(1) k について整理すると

$$k^2 - kx + x^2 - 4 = 0$$

これを k についての 2 次方程式と考える．この方程式の判別式 D をとると

$$\begin{aligned} D &= (-x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 4) \\ &= -3x^2 + 16 \end{aligned}$$

k は実数だから $D \geqq 0$ より

$$\begin{aligned} -3x^2 + 16 &\geqq 0 \\ x^2 - \frac{16}{3} &\geqq 0 \\ \left(x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) &\leqq 0 \\ \boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \frac{4\sqrt{3}}{3}} \end{aligned}$$

(2) k について整理すると

$$k^2 - (x+2)k + x^2 - x - 2 = 0$$

これを k についての 2 次方程式と考える．この方程式の判別式 D をとると，

$$\begin{aligned} D &= \{-(x+2)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - x - 2) \\ &= -3x^2 + 8x + 12 \end{aligned}$$

k は実数だから $D \geqq 0$ より

$$\begin{aligned} -3x^2 + 8x + 12 &\geqq 0 \\ 3x^2 - 8x - 12 &\leqq 0 \\ \boldsymbol{\frac{4 - 2\sqrt{13}}{3} \leqq x \leqq \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = x^2 - 2kx + 2k^2 - 4$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2kx + 2k^2 - 4 \\ &= (x-k)^2 + k^2 - 4 \end{aligned}$$

と変形できる．

(i) 1 つが 0 以上で，もう 1 つが正の解をもつとき

頂点の y 座標 $\leqq 0$ より

$$\begin{aligned} k^2 - 4 &\leqq 0 \\ (k+2)(k-2) &\leqq 0 \\ -2 \leqq k &\leqq 2 \end{aligned}$$

軸 $x = k > 0$ より

$$k > 0$$

端点 $f(0) = 2k^2 - 4 \geqq 0$ より

$$\begin{aligned} 2k^2 - 4 &\geqq 0 \\ k^2 - 2 &\geqq 0 \\ (k + \sqrt{2})(k - \sqrt{2}) &\geqq 0 \\ k \leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2} &\leqq k \end{aligned}$$

よって，$\sqrt{2} \leqq k \leqq 2$

(ii) 異符号の解をもつとき

端点 $f(0)=2k^2-4<0$ より

$$\begin{aligned} 2k^2-4&<0\\ k^2-2&<0\\ (k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})&<0\\ -\sqrt{2}<k&<\sqrt{2} \end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{-\sqrt{2}<k\leqq 2}$

(4) $f(x)=x^2+kx-k^2$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+kx-k^2\\ &=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{5}{4}k^2 \end{aligned}$$

と変形できる．

(i) ともに $-1\leqq x\leqq 1$ に解をもつとき

頂点の y 座標 $\leqq 0$ より

$$-\frac{5}{4}k^2\leqq 0 \qquad \therefore\ k^2\geqq 0$$

よって，すべての実数．

軸 $x=-\dfrac{k}{2}$ は $-1\leqq -\dfrac{k}{2}\leqq 1$ より，$-2\leqq k\leqq 2$

端点 $f(-1)\geqq 0$ より

$$\begin{aligned} &1-k-k^2\geqq 0\\ &k^2+k-1\leqq 0\\ &\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq k\leqq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

端点 $f(1)\geqq 0$ より

$$1+k-k^2\geqq 0$$

$$k^2-k-1\leqq 0$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq k\leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq k\leqq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii) 1 つが $-1\leqq x\leqq 1$ のとき

$f(1)=f(-1)=0$ となることはないので，$f(1)f(-1)\leqq 0$ であればよい．

よって

$$\begin{aligned} &(1+k-k^2)(1-k-k^2)\leqq 0\\ &(k^2-k-1)(k^2+k-1)\leqq 0 \end{aligned}$$

ここで $k^2-k-1\leqq 0$，$k^2+k-1\geqq 0$ のとき

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq k\leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$k^2-k-1 \geqq 0,\ k^2+k-1 \leqq 0$ のとき

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq k \leqq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

よって

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq k \leqq \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq k \leqq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

以上より，$\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

【9】 (1) $f(x)=(x-b)^2+4(x-a)(x-c)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-b)^2+4(a-a)(a-c) \\ &= (a-b)^2 \end{aligned}$$

$a<b<c$ から $(a-b)^2>0$ となり，$f(a)>0$ となる.

$$\begin{aligned} f(b) &= (b-b)^2+4(b-a)(b-c) \\ &= 4(b-a)(b-c) \end{aligned}$$

$a<b<c$ から $4(b-a)(b-c)<0$ となり，$f(b)<0$ となる.

$$\begin{aligned} f(c) &= (c-b)^2+4(c-a)(c-c) \\ &= (c-b)^2 \end{aligned}$$

$a<b<c$ から $(c-b)^2>0$ となり，$f(c)>0$ となる.

よって，

$f(a)f(b)<0$ となり, a と b の間で x 軸と交わる.

$f(b)f(c)<0$ となり, b と c の間で x 軸と交わる.

これと $\alpha<\beta$ より

$\boldsymbol{a<\alpha<b<\beta<c}$

(2) $f(x)=(x-a)(x-b)-5(x-c)^2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-a)(a-b)-5(a-c)^2 \\ &= -5(a-c)^2 \end{aligned}$$

$a<b<c$ から $-5(a-c)^2<0$ となり，$f(a)<0$ となる.

$$\begin{aligned} f(b) &= (b-a)(b-b)-5(b-c)^2 \\ &= -5(b-c)^2 \end{aligned}$$

$a<b<c$ から $-5(b-c)^2<0$ となり，$f(b)<0$ となる.

$$\begin{aligned} f(c) &= (c-a)(c-b)-5(c-c)^2 \\ &= (c-a)(c-b) \end{aligned}$$

$a<b<c$ から $(c-a)(c-b)>0$ となり，$f(c)>0$ となる.

これと，$y=f(x)$ のグラフが上に凸なグラフであることから，

$\boldsymbol{a<b<\alpha<c<\beta}$

問題

【1】(1) $y=x^2+3x-5$ に $y=0$ を代入して，$x^2+3x-5=0$ とする．
さらに，$x^2+3x-5=0$ の 2 解を α, β とおくと

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= -3 \\ \alpha\beta &= -5 \end{aligned}$$

となる．2 次関数 $y=x^2+3x-5$ のグラフが x 軸から切り取る線分 ℓ の長さは

$$\begin{aligned} \ell = |\alpha-\beta| &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

(2) $y=x^2-2\sqrt{3}x+1$ に $y=0$ を代入して，$x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ とする．
さらに，$x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ の 2 解を α, β とおくと

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 2\sqrt{3} \\ \alpha\beta &= 1 \end{aligned}$$

となる．
2 次関数 $y=x^2-2\sqrt{3}x+1$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ ℓ は

$$\begin{aligned} \ell = |\alpha-\beta| &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $y=x^2-kx+k$ に $y=0$ を代入して $x^2-kx+k=0$ とする．
さらに，$x^2-kx+k=0$ の 2 解を α, β とすると

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= k \\ \alpha\beta &= k \end{aligned}$$

となる．2 次関数 $y=x^2-kx+k$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ ℓ は

$$\ell = |\alpha-\beta|$$

である．ℓ が 2 以上であるとき，

$$\begin{aligned} |\alpha-\beta| &\geqq 2 \\ |\alpha-\beta|^2 &\geqq 4 \\ (\alpha-\beta)^2 &\geqq 4 \\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta &\geqq 4 \\ k^2-4k &\geqq 4 \\ k^2-4k-4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ここで，$k^2-4k-4=0$ の解が $k=2\pm2\sqrt{2}$ だから，定数 k の範囲は

$$\boldsymbol{k \leqq 2-2\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2} \leqq k}$$

(4) $y=x^2+(k-1)x+k+2$ に $y=0$ を代入して，$x^2+(k-1)x+k+2=0$ とする．さらに，$x^2+(k-1)x+k+2=0$ の 2 解を α, β とすると，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=1-k\\ \alpha\beta&=k+2\end{aligned}$$

となる．2 次関数 $y=x^2+(k-1)x+k+2$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ ℓ は

$$\ell=|\alpha-\beta|$$

である．ℓ が 3 以上であるとき

$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&\geqq 3\\ |\alpha-\beta|^2&\geqq 9\\ (\alpha-\beta)^2&\geqq 9\\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta&\geqq 9\\ (1-k)^2-4(k+2)&\geqq 9\\ k^2-6k-16&\geqq 0\\ (k+2)(k-8)&\geqq 0\end{aligned}$$

よって，定数 k の範囲は，$\boldsymbol{k\leqq -2,\ 8\leqq k}$

(5) 頂点が $(2,\ -3)$ なので，$y=a(x-2)^2-3\ (a\neqq 0)\ \cdots$①
とおく．①に $y=0$ を代入して，$a(x-2)^2-3=0$ とする．さらに，$a(x-2)^2-3=0$ の 2 解を α, β とすると

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=4\\ \alpha\beta&=\frac{4a-3}{a}\end{aligned}$$

となる．2 次関数 $y=a(x-2)^2-3$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さ ℓ は

$$\ell=|\alpha-\beta|$$

である．ℓ が 6 であるとき

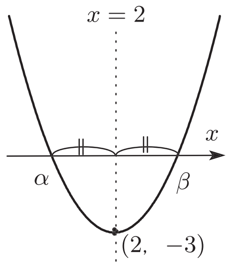
$$\begin{aligned}|\alpha-\beta|&=6\\ |\alpha-\beta|^2&=36\\ (\alpha-\beta)^2&=36\\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta&=36\\ 16-4\cdot\frac{4a-3}{a}&=36\\ 16a-16a+12&=36a\\ a&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって，①に $a=\dfrac{1}{3}$ を代入して

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3}$$

＜別解＞

グラフと x 軸の交点を $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(\alpha < \beta)$ とおく．
グラフが x 軸から切り取る長さが 6 のとき，
グラフの軸 $x = 2$ に対する対称性から



$$2 - \alpha = \beta - 2 = 3$$
$$\therefore\quad \alpha = -1,\ \beta = 5$$

よって，求める 2 次関数は，k を実数として

$$y = k(x+1)(x-5)$$

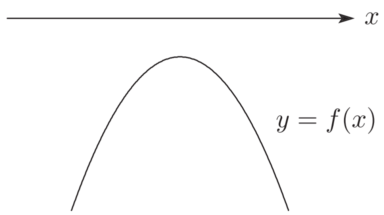
とおけ，この 2 次関数が $(2,\ -3)$ を通るので

$$-3 = k(2+1)(2-5)$$
$$\therefore\quad k = \frac{1}{3}$$

よって，求める 2 次関数は

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}(x+1)(x-5)}$$

【2】 $f(x) = ax^2 - 5x + a$ とおく．$y = f(x)$ のグラフが右図のようになればよいから



$$a < 0 \quad \cdots ①$$

また，$ax^2 - 5x + a = 0$ の判別式を D とすると

$$D = 25 - 4a^2 < 0$$

であればよい．これを解いて

$$\left(a + \frac{5}{2}\right)\left(a - \frac{5}{2}\right) > 0$$
$$\therefore\ a < -\frac{5}{2},\quad a > \frac{5}{2}$$

ここで①から，求める a の値の範囲は，$\boldsymbol{a < -\frac{5}{2}}$

※　なお，$a = 0$ のとき，$y = f(x)$ は放物線とはならず，注意が必要だが，このとき与式は $-5x < 0$ となり，不適である．

【3】(1) $y=f(x)$ のグラフを考えると，このグラフは下に凸の放物線であることより，
題意をみたすためには，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点を持たない，
すなわち，2 次方程式 $f(x)=0$ が実数解を持たなければよい．
2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &=(2k)^2-(-3k+1)\\ &=4k^2+3k-1<0\end{aligned}$$

$$(4k-1)(k+1)<0 \quad \therefore\ \boldsymbol{-1<k<\frac{1}{4}}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値が正であればよい．

$$\begin{aligned}f(x) &=x^2+4kx-3k+1\\ &=(x+2k)^2-4k^2-3k+1\end{aligned}$$

より，軸 $x=-2k$ と $x=0$，$x=1$ の位置により場合を分ける．

(i) $-2k<0$ すなわち，$k>0$ のとき，
最小値は $f(0)=-3k+1>0$．よって，$k<\dfrac{1}{3}$
これと，$k>0$ をあわせて，$0<k<\dfrac{1}{3}$

(ii) $0 \leqq -2k<1$ すなわち，$-\dfrac{1}{2}<k \leqq 0$ のとき
最小値は $f(-2k)=-4k^2-3k+1$ より，

$$-4k^2-3k+1>0$$

$$(4k-1)(k+1)<0 \quad \therefore\ -1<k<\frac{1}{4}$$

これと，$-\dfrac{1}{2}<k \leqq 0$ より，$-\dfrac{1}{2}<k \leqq 0$

(iii) $-2k \geqq 1$ すなわち，$k \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，
最小値は，$f(1)=k+2$ より，

$$k+2>0 \quad \therefore\ k>-2$$

これと，$k \leqq -\dfrac{1}{2}$ より，$-2<k \leqq -\dfrac{1}{2}$

(i)，(ii)，(iii) をあわせて，$\boldsymbol{-2<k<\frac{1}{3}}$

【4】(1) まず，$\dfrac{3x-1}{x+3} \leqq 2$ において，定義域は $x \fallingdotseq -3$ の実数全体である．

そして，$\dfrac{3x-1}{x+3} \leqq 2$ より

$$\frac{3x-1-2x-6}{x+3} \leqq 0 \qquad \therefore\ \frac{x-7}{x+3} \leqq 0$$

このもとで与不等式は

$x+3>0$ のとき，$x-7 \leqq 0$
$x+3<0$ のとき，$x-7 \geqq 0$

である．すなわち

$$(x+3)(x-7) \leqq 0 \quad (x \fallingdotseq -3)$$

と同じことであるから，これを解けばよい．
よって左辺の因数 $x+3$，$x-7$，$(x+3)(x-7)$ の符号を調べると

x	$x<-3$	-3	$-3<x<7$	7	$7<x$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

だから，$-3<x \leqq 7$ $\cdots$①
次に，$\dfrac{5x+7}{x} \geqq 2$ において，定義域は $x \fallingdotseq 0$ の実数全体である．
そして，$\dfrac{5x+7}{x} \geqq 2$ より

$$\frac{5x+7-2x}{x} \geqq 0 \qquad \therefore\ \frac{3x+7}{x} \geqq 0$$

このもとで与不等式は

$x>0$ のとき，$3x+7 \geqq 0$
$x<0$ のとき，$3x+7 \leqq 0$

である．すなわち

$$x(3x+7) \geqq 0 \quad (x \fallingdotseq 0)$$

と同じことであるから，これを解けばよい．
よって左辺の因数 $3x+7$，x，$x(3x+7)$ の符号を調べると

x	$x<-\dfrac{7}{3}$	$-\dfrac{7}{3}$	$-\dfrac{7}{3}<x<0$	0	$0<x$
$3x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(3x+7)$	$+$	0	$-$	0	$+$

だから，$x \leqq -\dfrac{7}{3}$，　$x>0$ $\cdots$②

①，② より，$\boldsymbol{-3<x \leqq -\dfrac{7}{3},\quad 0<x \leqq 7}$

※　別解として，$(x+3)(x-7) \leqq 0$，$x(3x+7) \geqq 0$ のそれぞれについて，不等式を満たす x の値の範囲は，グラフを利用して求めることもできる．

(2) 与式において，定義域は $x \fallingdotseq 4$ の実数全体である．そして，$\dfrac{x-10}{|x-4|} < -2$ より

$$\frac{x-10+2|x-4|}{|x-4|} < 0$$

まず，$x > 4$ のとき

$$\frac{x-10+2(x-4)}{x-4} < 0 \qquad \therefore\ \frac{x-6}{x-4} < 0$$

$x > 4$ のもとでこの不等式は

$$x-6 < 0 \qquad \therefore\ x < 6$$

である．すなわち

$$4 < x < 6 \quad \cdots ①$$

$x < 4$ のとき

$$\frac{x-10-2(x-4)}{-(x-4)} < 0 \qquad \therefore\ \frac{x+2}{x-4} < 0$$

$x < 4$ のもとでこの不等式は

$$x+2 > 0 \qquad \therefore\ x > -2$$

である．すなわち

$$-2 < x < 4 \quad \cdots ②$$

①，② より

$$\boldsymbol{-2 < x < 4,\quad 4 < x < 6}$$

(3) 定義域は $x \fallingdotseq \dfrac{a}{5}$ の実数全体である．

$\dfrac{ax+3-4(5x-a)}{5x-a} < 0$ より

$$\frac{(20-a)x-4a-3}{5x-a} > 0 \qquad \therefore\ \{(20-a)x-4a-3\}(5x-a) > 0$$

$20-a > 0$ より

$$\left(x-\frac{4a+3}{20-a}\right)\left(x-\frac{a}{5}\right) > 0$$

$\dfrac{4a+3}{20-a} > \dfrac{a}{5}$ のとき

$$20a+15 > 20a-a^2 \qquad \therefore\ a^2+15 > 0$$

これは常に成り立つので，$\dfrac{4a+3}{20-a} > \dfrac{a}{5}$

よって，求める解は，$\boldsymbol{x < \dfrac{a}{5},\quad \dfrac{4a+3}{20-a} < x}$

(4) 定義域は $x \neq 0$ の実数全体である.

$$
\begin{aligned}
\frac{x+2a}{2x} &< -1 \\
\frac{x+2a+2x}{2x} &< 0 \\
\frac{3x+2a}{2x} &< 0 \\
x(3x+2a) &< 0 \\
\therefore\ x\left(x+\frac{2}{3}a\right) &< 0
\end{aligned}
$$

(i) $a < 0$ のとき, $0 < x < -\dfrac{2a}{3}$

(ii) $a > 0$ のとき, $-\dfrac{2a}{3} < x < 0$

(iii) $a = 0$ のとき, $x^2 < 0$ は成立しない.

以上より,

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a < 0} \ \textbf{のとき,} \quad \boldsymbol{0 < x < -\dfrac{2a}{3}} \\
\boldsymbol{a > 0} \ \textbf{のとき,} \quad \boldsymbol{-\dfrac{2a}{3} < x < 0} \\
\boldsymbol{a = 0} \ \textbf{のとき,} \quad \textbf{解なし}
\end{cases}
$$

(5) 定義域は $x \neq -2a$ の実数全体

$$
\begin{aligned}
\frac{2x}{x+2a} &> 1 \\
\frac{2x-x-2a}{x+2a} &> 0 \\
\frac{x-2a}{x+2a} &> 0 \\
\therefore\ (x-2a)(x+2a) &> 0
\end{aligned}
$$

(i) $a > 0$ のとき, $x < -2a$, $2a < x$

(ii) $a < 0$ のとき, $x < 2a$, $-2a < x$

(iii) $a = 0$ のとき, $x^2 > 0$ より $x \neq 0$

以上より

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{a > 0} \ \textbf{のとき,} \quad \boldsymbol{x < -2a,\ 2a < x} \\
\boldsymbol{a < 0} \ \textbf{のとき,} \quad \boldsymbol{x < 2a,\ -2a < x} \\
\boldsymbol{a = 0} \ \textbf{のとき,} \quad \boldsymbol{x \neq 0} \ \textbf{のすべての実数}
\end{cases}
$$

【5】定義域は $x \neq 2$ の実数全体

$$\frac{ax-(a-2)(2-x)}{2-x} > 0$$

$$\frac{(a-1)x-(a-2)}{2-x} > 0$$

$$\therefore\ (a-1)\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2) < 0 \quad (a \neq 1)$$

(i) $a-1>0$ のとき，つまり $a>1$ のとき

$$\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2) < 0$$

$\dfrac{a-2}{a-1} \geqq 2$ のとき

$$a-2 \geqq 2a-2 \qquad \therefore\ a \leqq 0$$

これは成り立たないから，$\dfrac{a-2}{a-1} < 2$

よって

$$\frac{a-2}{a-1} < x < 2$$

(ii) $a-1<0$ のとき，つまり $a<1$ のとき

$$\left(x-\frac{a-2}{a-1}\right)(x-2) > 0$$

$\dfrac{a-2}{a-1} > 2$ のとき

$$a-2 < 2a-2 \qquad \therefore\ a > 0$$

であり，仮定より，これは常に成り立つので

$$\frac{a-2}{a-1} > 2$$

よって

$$x<2, \quad \frac{a-2}{a-1} < x$$

(iii) $a=1$ の場合

$$\frac{1}{2-x} > 0 \qquad \therefore\ x<2$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{a>1} \text{ のとき,} & \boldsymbol{\dfrac{a-2}{a-1} < x < 2} \\ \boldsymbol{a=1} \text{ のとき,} & \boldsymbol{x<2} \\ \boldsymbol{0<a<1} \text{ のとき,} & \boldsymbol{x<2,\ \dfrac{a-2}{a-1} < x} \end{cases}$$

3MJSS/3MJS/3MJ
中３選抜東大・医学部数学
中３数学
中３東大数学

Z-KAI

会員番号	

氏　名	