M3JSA/M3JA1/M3JA2/M3JA/M3TA

本科２期９月度

解答

Ｚ会東大進学教室

選抜東大・医学部理系数学
東大理系数学ⅠＡⅡＢ
東大理系数学Ⅲ
東大理系数学
難関大理系数学Ｔ

１４章－１　数の理論（１）

問題

【1】 $\begin{cases} 43x+782y=1 \\ 2<\left|x+18y\right|<12 \end{cases}$ $\cdots\cdots(*)$

ここで

$x+18y=k \quad \cdots\cdots①$

とおくと

$$\begin{aligned} 43x+782y=1 &\iff 43(k-18y)+782y=1 \\ &\iff 43k+8y=1 \\ &\iff y=\frac{1-43k}{8} \end{aligned}$$

より

$$(*) \iff \begin{cases} y=\dfrac{1-43k}{8} & \cdots\cdots② \\ 2<\left|k\right|<12 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③ のもとで ② の y が整数となるのは

$k=-5,\ 3,\ 11$

である．

(i) $k=-5$ のとき

②，① より

$(x,\ y)=(-491,\ 27)$

(ii) $k=3$ のとき

②，① より

$(x,\ y)=(291,\ -16)$

(iii) $k=11$ のとき

②，① より

$(x,\ y)=(1073,\ -59)$

よって

$(x,\ y)=\mathbf{(-491,\ 27),\ (291,\ -16),\ (1073,\ -59)}$　（答）

【2】(1) 条件

$\begin{cases} p^2=q^2+r^2 & \cdots\cdots① \\ p+q+r=132 & \cdots\cdots② \end{cases}$

より，p を消去すると

$\{132-(q+r)\}^2=q^2+r^2$

$\therefore\ 132^2-2\cdot132\cdot(q+r)+2qr=0$

$\therefore\ qr=2\cdot66\cdot(q+r)-2\cdot66^2$

右辺は偶数であるから，左辺も偶数となり，すなわち，q, r のどちらかは偶数である．

〔証明終〕

(2) ①，② より，q と r は対称であるから，(1) より，q を偶数としてもよい．

(i) $q=2$ のとき，①, ② は,

$$\begin{cases} p^2-r^2=4 \\ p+r=130 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} p-r=\dfrac{4}{130} \\ p+r=130 \end{cases}$$

これをみたす自然数 p, r は存在しない.

(ii) $q=2m$ $(m \geqq 2)$ のとき，p, r はともに素数である．① より

$$(p+q)(p-q)=r^2$$

であり，$0<q<p$ であるから，r が素数より

$$p-q=1 \qquad \therefore \quad q=p-1$$

である． ①, ② に代入して,

$$\begin{cases} 2p-1=r^2 \\ 2p+r=133 \end{cases}$$

より，p を消去して

$$r^2+1+r=133$$

$$\therefore \quad r^2+r-132=0$$

$$\therefore \quad (r+12)(r-11)=0$$

$r>0$ より

$$r=11$$

このとき

$$\begin{cases} p=61 \\ q=60 \end{cases}$$

このとき，p, r がともに素数であるという条件を確かにみたす。

q, r は対称であるから，求める p, q, r の組は

$(p,\ q,\ r)=$ **(61, 60, 11), (61, 11, 60)** (答)

【3】(1) n が偶数のとき，(A) より

$$n=2l \quad (l \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

とおけて，(B) より

$$|l-2| \leqq 2$$

が必要であるから

$$l=2,\ 3,\ 4$$

よって，$n=2\cdot 2=\mathbf{4}$, $n=2\cdot 3=\mathbf{6}$, $n=2\cdot 4=\mathbf{8}$ で，これは条件をみたす.

(答)

(2) n が 7 の倍数のとき，(A) より

$$n=7l \quad (l \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

とおけて，(B) より

$$|l-7| \leqq 2$$

が必要．すなわち l は

5, 6, 7, 8, 9

であることが必要．(1) より，n が偶数のとき，n は 7 の倍数にはならないので，n は奇数．よって，$l=5$, 7, 9．これより

$$n=7\cdot 5=35,\ n=7\cdot 7=49,\ n=7\cdot 9=63$$

$63=3\cdot 21$ なので，これは条件 (B) をみたさない．よって，$\boldsymbol{n=35,\ 49}$ (答)

(3) n が奇数のときを考える．n の最小の素因数を p $(p \geqq 3)$ とすると，(A) より

$n = pl$　(l は 3 以上の奇数)

とおけて，(B) より

$|l - p| \leqq 2$

が必要．すなわち l は

$p-2,\ p-1,\ p,\ p+1,\ p+2$

であることが必要．

n が奇数のときを考えているので，偶数である $p-1$，$p+1$ は不適．p が n の最小の素因数なので $p-2$ は (それが素数であるとしても合成数であるとしても) 不適．

よって，$l = p,\ p+2$．

(i) $n = p^2$ のとき

$2 \leqq n \leqq 1000$ でこれをみたすのは

$n = 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 11^2,\ 13^2,\ 17^2,\ 19^2,\ 23^2,\ 29^2,\ 31^2$

(ii) $n = p(p+2)$ のとき

$p+2$ が合成数であると仮定すると，その素因数は p 以下となるが p 未満の素因数はもたないので

$p + 2 = p^k$　(k は 2 以上の自然数)　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$

ところが，$p \geqq 3$ より $p^k - p = p(p^{k-1} - 1) \geqq 6$ であるから，$(*)$ は成り立たず，$p+2$ は素数でなくてはならない．

$2 \leqq n \leqq 1000$ でこれをみたすのは

$n = 3 \cdot 5,\ 5 \cdot 7,\ 11 \cdot 13,\ 17 \cdot 19,\ 29 \cdot 31$

n が偶数のときは，(1) の場合だから，求める n の値は

$\boldsymbol{n = 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,}$
$\boldsymbol{361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961}$　**(答)**

【4】(1)　$a_2 + b_2\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab$

より，

$a_2 = a^2 + 2b^2,\ b_2 = 2ab$

a は奇数より，a_2 は奇数．

次に a_2 と b_2 が奇素数 p を共通因数としてもつとする．

a と b は互いに素だから，b_2 において，a，b のうち一方だけが p を因数としてもつ．

このとき，a_2 は p で割り切れない．

これは a_2 と b_2 が奇素数 p を共通因数としてもつことに矛盾するので，示された．

〔証明終〕

(2)
$$
\begin{aligned}
a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\
&= aa_n + 2bb_n + (ba_n + ab_n)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad a_{n+1} = aa_n + 2bb_n,\ b_{n+1} = ba_n + ab_n \cdots\cdots ①$

$n = 1$ のとき，a は奇数であり，$n = k$ のとき a_k が奇数とすると a，a_k は奇数だから，$a_{k+1} = aa_k + 2bb_k$ は奇数である．

よって，すべての n に対して a_n は奇数である．

(1) より

a_1 が奇数であり，a_1 と b_1 が互いに素

のとき

a_2 が奇数であり，a_2 と b_2 が互いに素

が成り立つ．ここで

$$\begin{aligned} a_{2n}+b_{2n}\sqrt{2} &= (a+b\sqrt{2})^{2n} \\ &= (a_n+b_n\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

を利用すると，無限に大きな n に対して

「a_n が奇数であり，a_n と b_n が互いに素」である n が存在する $\cdots\cdots$ ②

ここで，ある整数 k について，a_k と b_k が奇素数 q を共通因数としてもつとすると，①より，a_{k+1} と b_{k+1} が奇素数 q を共通因数としてもつ．

このとき，$n \geqq k$ についてすべての a_n と b_n が奇素数 q を共通因数としてもつ．

これは②に矛盾．よって，すべての n に対して a_n と b_n は互いに素である．

〔証明終〕

１４章－２　複素数平面（１）

問題

【1】(1) $z_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$,　$z_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$,　$z_3=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ より

$$z_1-z_2=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$
$$z_3-z_2=-\frac{\sqrt{3}+i}{2}=-(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}&=\frac{\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ}\\&=\cos(60^\circ-30^\circ)+i\sin(60^\circ-30^\circ)\\&=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\end{aligned}$$

よって

$$\angle \mathrm{P_1P_2P_3}=\arg\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\mathbf{30^\circ}\qquad \text{(答)}$$

(2) $\mathrm{P_1P_2}=|z_1-z_2|=1$,　$\mathrm{P_2P_3}=|z_3-z_2|=1$ だから

$$\triangle \mathrm{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 30^\circ=\mathbf{\frac{1}{4}}\qquad \text{(答)}$$

(3) $\alpha=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{4}{3}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ より，$\triangle \mathrm{Q_1Q_2Q_3}$ は $\triangle \mathrm{P_1P_2P_3}$ を原点のまわりに 60° 回転し，原点を相似の中心として $\dfrac{4}{3}$ 倍に拡大したものである．よって，

$$\triangle \mathrm{Q_1Q_2Q_3}=\left(\frac{4}{3}\right)^2\triangle \mathrm{P_1P_2P_3}=\mathbf{\frac{4}{9}}\qquad \text{(答)}$$

(4) $z_2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$ だから，求める角は

$$\arg\alpha z_2=\arg\alpha+\arg z_2=60^\circ+45^\circ=\mathbf{105^\circ}\qquad \text{(答)}$$

【2】$w=\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ とおく．まず，w が実数であることより，$w=\overline{w}$ であるから

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{2}+\frac{1}{\bar{z}}$$

両辺に $2z\bar{z}$ をかけて

$$z^2\bar{z}+2\bar{z}=z(\bar{z})^2+2z\qquad \therefore\quad (z\bar{z}-2)(z-\bar{z})=0$$

したがって

$$z\bar{z}-2=0\quad \text{または}\quad z-\bar{z}=0$$

(i) $z\bar{z}-2=0$ のとき

$$|z|^2=z\bar{z}=2$$

より，z は 0 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある．また，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{2}$ であるから

$$w=\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{z}{2}+\frac{\bar{z}}{2}=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

これは z の実数部分を表す．$0\leqq w\leqq 2$ より，z の実数部分は 0 以上．

(ii) $z-\bar{z}=0$ のとき　z は実数であるから

$$0\leqq w=\frac{z}{2}+\frac{1}{z}\leqq 2$$

より

$$0 \leqq \frac{z^2+2}{2z}, \quad \frac{z^2-4z+2}{2z} \leqq 0$$

第 1 式から $z>0$ であるから, 第 2 式より

$$z^2-4z+2 \leqq 0$$

$$\therefore \quad 2-\sqrt{2} \leqq z \leqq 2+\sqrt{2}$$

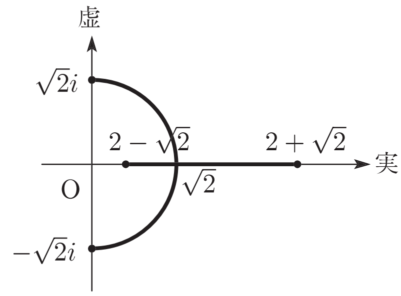
(i), (ii) より, 求める式は

$\boldsymbol{z\bar{z}-2=0}$ **(z の実数部分は 0 以上)**

または

$\boldsymbol{z-\bar{z}=0\ (2-\sqrt{2} \leqq z \leqq 2+\sqrt{2})}$

求める集合は右図の太線部となる．ただし, 端点を含む． (答)



【3】(1) B は円の接点であるから

$$\mathrm{AB} \perp \mathrm{OB}$$

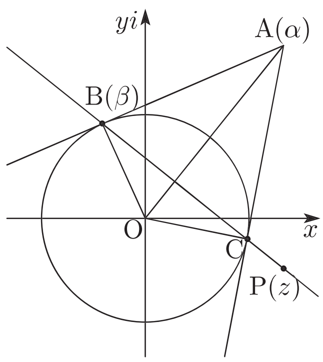
$$\therefore \quad \arg\frac{\beta-\alpha}{\beta} = \pm 90^\circ$$

よって, s を実数として

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta} = si$$

と書ける．これより β を α の式で表すと

$$\beta = \frac{\alpha}{1-si} \qquad \text{〔証明終〕}$$



(2) OB = OC, AB = AC だから, OA は線分 BC の垂直 2 等分線となり

$$\mathrm{BC} \perp \mathrm{OA}$$

そして, P は BC 上にあるから, (1) と同様に考えると t を実数として

$$\frac{z-\beta}{\alpha} = ti \qquad \therefore \quad z = \beta + \alpha ti$$

と書ける．よって

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} &= \overline{\alpha}(\beta+\alpha ti) + \alpha\overline{(\beta+\alpha ti)} \\
&= \overline{\alpha}(\beta+\alpha ti) + \alpha(\overline{\beta}-\overline{\alpha}ti) \\
&= \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1-si} + \alpha\cdot\overline{\left(\frac{\alpha}{1-si}\right)} \\
&= \overline{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{1-si} + \alpha\cdot\frac{\overline{\alpha}}{1+si} \\
&= \alpha\overline{\alpha}\left(\frac{1}{1-si}+\frac{1}{1+si}\right) \\
&= \alpha\overline{\alpha}\cdot\frac{2}{1+s^2} \ = \ \frac{2|\alpha|^2}{1+s^2}
\end{aligned}$$

ここで, B は円周上の点なので

$|\beta| = 1 \qquad \therefore \quad |\alpha| = |1 - si| = \sqrt{1 + s^2}$

したがって

$\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \dfrac{2(1 + s^2)}{1 + s^2} = \mathbf{2} \qquad$ (答)

となり, A, P のとり方に関係なく一定である. 〔証明終〕

【4】(1) $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ は虚数であるから，これが実数係数の 2 次方程式の解であるとき，共役複素数 $\overline{\omega} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ もまた，その 2 次方程式の解である．

$\omega + \overline{\omega} = -1,\ \omega\overline{\omega} = 1 \quad \cdots ①$

であるから，解と係数の関係により，ω，$\overline{\omega}$ を 2 解にもつ 2 次方程式は

$x^2 + x + 1 = 0$

x^2 の係数を 1 にすれば，2 数を 2 解にもつ 2 次方程式は 1 つに決まるから，実数 p，q について

$\omega^2 + p\omega + q = 0$

とするためには $p = q = 1$ が必要かつ十分である． 〔証明終〕

(2) 正三角形の 3 つの頂点を A$(-2 + t)$，B，C とし，重心を G(-2) とおくと，B，C は A を G のまわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点である．B または C を表す複素数を z とすると

$z - (-2) = \{-2 + t - (-2)\}\{\cos(120^\circ) \pm i\sin(120^\circ)\}$

より

$\boldsymbol{z = -2 + t\omega}$ または $\boldsymbol{z = -2 + t\overline{\omega}} \qquad$ (答)

(3) (2) より，正三角形の 3 頂点 z_1，z_2，z_3 は

$-2 + t,\ -2 + t\omega,\ -2 + t\overline{\omega}$

である．$z_1z_2z_3 = -16$ に代入して

$$(-2 + t)(-2 + t\omega)(-2 + t\overline{\omega}) = -16$$
$$-8 + 4(t + t\omega + t\overline{\omega}) - 2(t \cdot t\omega + t\omega \cdot t\overline{\omega} + t\overline{\omega} \cdot t) + (t \cdot t\omega \cdot t\overline{\omega}) = -16$$
$$-8 + 4t(1 + \omega + \overline{\omega}) - 2t^2(\omega + \omega\overline{\omega} + \overline{\omega}) + t^3\omega\overline{\omega} = -16$$

①を用いて整理すると

$t^3 + 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (t + 2)(t^2 - 2t + 4) = 0$

より

$t = -2,\ 1 + \sqrt{3}i\ (= -2\overline{\omega}),\ 1 - \sqrt{3}i\ (= -2\omega)$

(1) より

$\omega^2 = -\omega - 1,\ \overline{\omega}^2 = -\overline{\omega} - 1$

であるから，t が 3 つの値のいずれの場合も，正三角形の 3 頂点は

$$-4 = 4(\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$$
$$-1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$
$$-1 - \sqrt{3}i = 2(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$

である．よって，$\arg(z_1) \leqq \arg(z_2) \leqq \arg(z_3)$ より

$z_1 = \boldsymbol{-1 + \sqrt{3}i},\ z_2 = \boldsymbol{-4},\ z_3 = \boldsymbol{-1 - \sqrt{3}i} \qquad$ (答)

添削課題

【1】$a^2-a=a(a-1)$ が $10000=2^4\cdot 5^4$ で割り切れるならば，奇数 a と偶数 $a-1$ が互いに素であることから

$a=5^4\cdot m$　(ただし，m は奇数)

$a-1=2^4\cdot n$　(ただし，n は整数)

と表される．これより

$$5^4\cdot m=2^4\cdot n+1$$

$$\therefore\quad n=\frac{5^4\cdot m-1}{2^4}=\frac{625m-1}{16}=\frac{16\cdot 39m+m-1}{16}=39m+\frac{m-1}{16}$$

ここで，$3\leqq a\leqq 9999$ より

$$\frac{3}{5^4}\leqq\frac{a}{5^4}\leqq\frac{9999}{5^4}$$

$$\therefore\quad 1\leqq m\leqq 15$$

これをみたす奇数 m において，$m=1$ をのぞいて，$\dfrac{m-1}{16}$ は整数とはなりえない．

よって，$(m,\ n)=(1,\ 39)$ のときであり

$a=\mathbf{625}$　　(答)